Devoir sur table

(samedi 7 novembre 2015)

Exercices groupes (cours).

1. *Définir un groupe.*
2. *Donner les deux caractérisations d'un sous-groupe avec démonstration de leur équivalence.*
3. Soit G un groupe. *Montrer que* $\operatorname{Aut} G$ *est un groupe pour une loi à préciser. Montrer alors qu'est un morphisme de groupes l'application* $\left\{\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \operatorname{Aut} G \\ g & \longmapsto & x \mapsto gxg^{-1} \end{array}\right.$ *dont on décrira les noyau et image.*
4. *Les groupes* $\mathbf{Z}/_{2} \times \mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_2$ *et* $\mathbf{Z}/_{3} \times D_8$ *sont-ils isomorphes*[1] *?*
5. *On définit deux lois* $\boxplus : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ (a,b) & \longmapsto & \ln\left(e^a + e^b - 1\right) \end{array}\right.$ *et* $\boxtimes : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ (a,b) & \longmapsto & \ln\left(e^{a+b} - e^a - e^b + 2\right) \end{array}\right.$
   Montrer que ces lois sont bien définies, associatives, commutatives, unifères et que $\boxtimes$ *se distribue sur* $\boxplus$.
6. *Déterminer tous les morphismes de* $GL_{42}(\mathbf{R})$ *vers* $\mathbf{H}_8$.

Exercices anneaux (cours).

1. *Définir un idéal (d'un anneau commutatif donné), définir un anneau intègre, définir un corps.*
2. *Décrire (avec démonstration) les idéaux de* $\mathbf{Q}[X]$.
3. *Soit* $K \longrightarrow A$ *un morphisme d'anneaux où* K *est un corps et* A *un anneau non nul. Montrer que ce morphisme est injectif.*
4. *Définir la caractéristique d'un anneau.*
   Soit K un corps fini dont on note c la caractéristique, supposée non nulle. *Montrer alors que* c *est un premier et que l'élévation à la puissance* c *est un automorphisme du corps* K.
5. *Combien l'anneau* $\mathbf{Z}/_{18!}$ *possède-t-il d'inversibles ? On décomposera la réponse en premiers.*
6. Notons A l'ensemble formée des matrices de la formes $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ pour (a,b) décrivant $\mathbf{R}^2$.
   (a) *Montrer que* A *est un sous-anneau de* $M_2(\mathbf{R})$ *qui est un corps.*
   (b) *Retrouver ce résultat par transfert de structure à l'aide de la bijection* $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & A \\ a+ib & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \end{array}\right.$.

[1] on rappelle au besoin que D_8 désigne le groupe des symétries euclidiennes du carré

Exercice 1. Soient G et H deux groupes.
Donner une condition nécessaire et suffisante (simple) pour que le groupe produit $G \times H$ soit cyclique.

Exercice 2. Soit G un groupe.
Expliquer en quoi $\mathrm{Hom}\,(G, \mathbf{C}^*)$ *est inclus dans* $\mathbf{C}^G$.
Montrer que toute partie de $\mathrm{Hom}\,(G, \mathbf{C}^*)$ *est linéairement libre dans le* $\mathbf{C}$*-espace vectoriel* $\mathbf{C}^G$. *On pourra raisonner par l'absurde et invoquer une partie liée de cardinal minimal.*

Problème. Soient p un premier et u un naturel.

1. Soit K un sous-corps de $\mathbf{F}_{p^u}$.
   (a) *Montrer que K est (isomorphe à) $\mathbf{F}_{q^v}$ pour un certain premier q et pour un certain naturel v.*
   (b) *Montrer la divisibilité $q^v \mid p^u$ et en déduire q.*
   (c) *Montrer la divisibilité $v \mid u$.*
2. Soit $d \mid u$. On veut réaliser $\mathbf{F}_{p^d}$ comme sous-corps de $\mathbf{F}_{p^u}$. On définit $K := \left\{a \in \mathbf{F}_{p^u} \;;\; a^{p^d} = a\right\}$.
   (a) *Pour tous naturels non nuls a et b, montrer d'une part l'égalité*
   $$(X^a - 1) \wedge \left(X^b - 1\right) = X^{a \wedge b} - 1$$
   d'autre part l'équivalence $X^a - 1 \mid X^b - 1 \iff a \mid b$.
   (b) *Établir la factorisation $X^{p^u} - X = \prod_{\lambda \in \mathbf{F}_{p^u}} (X - \lambda)$ et en déduire le cardinal $|K| = p^d$.*
   (c) *Montrer que K est un sous-corps de $\mathbf{F}_{p^u}$.*