Devoir surveillé

(samedi 22 novembre 2014)

Continuité.

1. *Montrer la continuité du produit dans une algèbre normée.*
2. *Soient E un espace vectoriel normé et F un fermé de E. Montrer la continuité de* $\left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ a & \longmapsto & d(a,F) \end{array}\right.$.
3. *L'application* $\left\{\begin{array}{ccc}]0,18] & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & e^{i\ln t} \end{array}\right.$ *est-elle continue ? uniformément continue ? lipschitzienne ?*
4. *Dans un triangle plan, montrer qu'il y a un point minimisant la somme des distances aux côtés.*

Comparaisons de normes & une frontière.

1. *Soient V et W deux evn. Notons E l'espace vectoriel des fonctions lipschitziennes de V vers W. Montrer que la famille* $\left(f \mapsto \|f(v)\| + \sup_{a\neq b}^{a,b\in V} \frac{\|f(a)-f(b)\|}{\|a-b\|}\right)_{v\in V}$ *est une famille de normes équivalentes sur E.*
2. *Montrer que les applications $f \mapsto \sup_{[7,8]} |f|$ et $f \mapsto \sqrt[18]{f(2)^{18} + f'(6)^{18}} + \int_3^5 |f''|$ sont des normes sur $E := \left\{f : [1,10] \longrightarrow \mathbf{K}\ ;\ f^{(42)} = 0\right\}$ et étudier leur équivalence.*
3. *Dans $C^0([0,1],\mathbf{K})$ normé par $\|\cdot\|_\infty$, quel est le bord de l'ensemble des fonctions dérivables ?*

Anneaux et compacité. Soit S un segment infini de $\mathbf{R}$. On note $A := C^0(S,\mathbf{K})$.

1. *Décrire $A^\times$.* Pour tout $s \in S$, on définit $\mathfrak{m}_s := \{a \in A\ ;\ a(s) = 0\}$.
2. *Montrer que les $\mathfrak{m}_s$ sont des idéaux maximaux*[1] *de A.* (hint : utiliser des $(\mathrm{Id} - s)^2$)
3. Soit $\mathfrak{M}$ un idéal maximal de A. On veut montrer que $\mathfrak{M}$ est un $\mathfrak{m}_s$. On raisonne par l'absurde.
   (a) *Montrer pour tous idéaux maximaux I et J les équivalences $I = J \iff I \subset J \iff J \subset I$. En déduire l'existence d'une famille $(a_s) \in A^S$ telle que $\forall s \in S,\ a_s \in \mathfrak{M}\setminus\mathfrak{m}_s$.* On invoque une telle famille.
   (b) *Montrer l'existence d'une famille $(I_s)_{s\in S}$ d'intervalles rationnels tels que $\forall s \in S,\ \forall x \in I_s \cap S,\ a_s(x) \neq 0$.* On invoque une telle famille et on définit $\mathcal{I} := \{I_s\ ;\ s \in S\}$.
   (c) *Montrer que $\mathcal{I}$ est au plus dénombrable* (hint : montrer qu'il s'injecte dans $\mathbf{Q}^2$) *et en déduire l'existence d'une suite $(s_n) \in S^{\mathbf{N}}$ telle que $\mathcal{I} = \{I_{s_n}\ ;\ n \in \mathbf{N}\}$.* On invoque une telle suite.
   (d) *Montrer l'existence d'un entier $N \in \mathbf{N}$ telle que $S \subset \bigcup_{n=0}^N I_{s_n}$.* On invoque un tel entier.
   (e) *Conclure en utilisant un polynôme en $(a_{s_0}, a_{s_1}, \ldots, a_{s_N})$.*

Un anneau métrisé où la relation de divisibilité est totale. Soit K un corps. On note A l'espace vectoriel $K^{\mathbf{N}}$. On définit un ***produit de convolution*** $* : \left\{\begin{array}{ccc} A^2 & \longrightarrow & A \\ (a,b) & \longmapsto & n \mapsto \sum_{p+q=n} a_p b_q \end{array}\right.$ (dans la somme sont sous-entendues des appartenances $p,q \in \mathbf{N}$), une ***interterminée*** $X : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & K \\ n & \longmapsto & \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } n = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{array}\right. \end{array}\right.$, une ***valuation*** $v : \left\{\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \overline{\mathbf{N}} = \mathbf{N}\cup\{\infty\} \\ a & \longmapsto & \inf_{\overline{\mathbf{N}}} \{n \in \mathbf{N}\ ;\ a_n \neq 0\} \end{array}\right.$ et une ***distance*** $d : \left\{\begin{array}{ccc} A^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (a,b) & \longmapsto & 42^{-v(a-b)} \end{array}\right.$.

1. *Montrer que A est un anneau (unifère associatif) commutatif pour le produit $*$. Est-ce une K-algèbre ?*
2. *Décrire les itérés de X pour $*$ ainsi que les valuations de ces derniers. Que vaut $v(0)$?*
3. *Montrer que d est une distance sur A telle que $\forall a \in A,\ \sum_{n=0}^N a_n X^n \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} a$. Découle-elle d'une norme ?*
4. *Montrer que les polynômes à coefficients dans K forment une sous-K-algèbre dense de A.*
5. *Soit $a \in A$ tel que $a_0 \neq 0$. Montrer l'appartenance $a \in A^\times$.*
6. *En déduire $\forall a \in A,\ \exists n \in \mathbf{N},\ a \sim X^n$ puis $\forall a,b \in A,\ a \mid b$ ou $b \mid a$.*
7. *Montrer qu'aucune norme sur A ne vérifie $\forall a \in A,\ \sum_{n=0}^N a_n X^n \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} a$.*

[1] Un ***idéal maximal*** de A est un idéal strict de A qui est maximal pour l'inclusion.