Dans tout le devoir, on fixe un anneau A commutatif (unitaire). On pourra noter abusivement 0 l'idéal nul. On définira le ***produit*** de deux idéaux I et J par $IJ := \left\{\sum_{n=1}^{N} i_n j_n \ ; \ N \in \mathbf{N} \text{ et } (i_n, j_n) \in (I \times J)^N\right\}$.

Exercice 1 (idéaux et quotients). Pour tout ensemble E muni d'une relation d'équivalence, pour tout $e \in E$, on notera $\overline{e}$ (ou $\widehat{e}$ ou $\widetilde{e}$) la classe d'équivalence de e.

1. **(idéaux et lois quotients)** *Soit $\equiv$ une relation d'équivalence sur A. Montrer que les **lois quotients** définies pour tout $(a,b,c) \in A^3$ par $\overline{a}\overline{b} + \overline{c} := \overline{ab + c}$ sont bien définies ssi il y a un idéal I de A tel que $\forall a, b \in A,\ a \equiv b \iff b - a \in I$.*

   Le quotient $\{\overline{a} \ ; \ a \in A\}$ est alors noté ${}^{A}\!/_{I} := \{a + I \ ; \ a \in A\}$ et est appelé ***anneau quotient*** de A par I. *Montrer dans ce cas que la projection canonique $\left\{\begin{array}{ccc} A & \twoheadrightarrow & {}^{A}\!/_{I} \\ a & \longmapsto & \overline{a} \end{array}\right.$ est un morphisme d'anneaux.*
2. **(quotients et cardinaux)** *Soit I un idéal de A. Montrer que toutes les classes de ${}^{A}\!/_{I}$ sont en bijection avec I* (hint : translations). *En déduire, lorsque A est fini, l'égalité $\left|{}^{A}\!/_{I}\right| = \frac{|A|}{|I|}$.*
3. **(idéaux d'un produit fini)** *Soit B un anneau. Montrer que les idéaux de $A \times B$ sont exactement les produits d'un idéal de A par un idéal de B.*
4. **(quotient d'un produit fini)** *Montrer que le quotient d'un produit est le produit des quotients, au sens où l'on a un isomorphisme naturel $\left\{\begin{array}{ccc} {}^{A \times B}\!/_{I \times J} & \xrightarrow{\sim} & {}^{A}\!/_{I} \times {}^{B}\!/_{J} \\ \widetilde{(a,b)} & \longmapsto & \left(\overline{a}, \widehat{b}\right) \end{array}\right.$.*
5. **(idéaux d'un quotient)** *Soit I un idéal de A. Montrer que les idéaux de l'anneau quotient ${}^{A}\!/_{I}$ sont les ${}^{J}\!/_{I}$ où J parcourt les idéaux de A contenant I.*
6. **(quotients de quotients)** *Montrer que l'on a un isomorphisme naturel $\left\{\begin{array}{ccc} {}^{\left({}^{A}\!/_{I}\right)}\!/_{\left({}^{J}\!/_{I}\right)} & \xrightarrow{\sim} & {}^{A}\!/_{J} \\ \widetilde{\overline{a}} & \longmapsto & \widehat{a} \end{array}\right.$.*
7. **(lemme chinois)** Deux idéaux sont dits ***étrangers*** lorsque leur somme fait tout l'anneau. *Étant donnés des idéaux en nombre fini deux à deux étrangers, montrer que la flèche produit des surjections canoniques est surjective de noyau l'intersection de ces idéaux. Réciproque ?* (hint : $I = A \iff 1 \in A$)

Exercice 2 (racines). Un élément est dit ***nilpotent*** si l'une de ses puissances ≥ 1 est nulle. Les nilpotents de A forment le ***nilradical*** de A, lequel est noté $\operatorname{Nilrad} A$. On dit que A est ***réduit*** lorsque $\operatorname{Nilrad} A = \{0\}$. On appelle ***radical*** ou ***racine*** d'une partie $P \subset A$ l'ensemble $\sqrt{P} := \{a \in A \ ; \ \exists n \in \mathbf{N}^*,\ a^n \in P\}$. On dira qu'une partie P est ***radicale*** ou ***réduite*** si elle est égale à sa racine.

Soit I un idéal de A

1. **(nilpotents et racines)** *Montrer les égalités* $\operatorname{Nilrad} A = \sqrt{0}$ *et* $\operatorname{Nilrad}\left({}^{A}\!/_{\sqrt{0}}\right) = 0$.
2. **(définition plus simple)** *Montrer que I est radical ssi I est stable par passage aux racines carrés.*
3. **(radicaux de $\mathbf{Z}$)** *Décrire les idéaux radicaux de $\mathbf{Z}$.*
4. **(description externe)** *Montrer que $\sqrt{I}$ est le plus petit idéal radical contenant I.*
5. **(tous radicaux)** *Montrer que tout idéal de A est radical ssi tout élément de A est multiple de son carré. Donner un exemple de tel anneau.*
6. **(définition par le quotient)** *Montrer que I est radical ssi le quotient ${}^{A}\!/_{I}$ est réduit.*
7. **(radicalité de l'idéal nul)** *Montrer que l'idéal* (0) *est radical ssi A est réduit.*
8. **(radicaux d'un quotient)** *Montrer que les idéaux radicaux de ${}^{A}\!/_{I}$ sont les ${}^{\mathfrak{r}}\!/_{I}$ où $\mathfrak{r}$ parcourt les idéaux radicaux de A contenant I.*
9. **(croissance de $\sqrt{\cdot}$)** *Soit J un idéal de A contenant I. Montrer $\sqrt{I} \subset \sqrt{J}$.*
10. **($\sqrt{\cdot}$ se distribue sur $\cap$)** *Soient $I_1, ..., I_k$ des idéaux de A. Montrer les inclusion et égalités*

$$\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}\cdots\sqrt{I_k} \subset \sqrt{I_1 I_2 \cdots I_k} = \sqrt{I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_k} = \sqrt{I_1} \cap \sqrt{I_2} \cap \cdots \cap \sqrt{I_k}.$$

    Donner un exemple d'inclusion stricte.
11. **(l. c. i. $\cap$ sur les radicaux)** *Montrer qu'une intersection finie d'idéaux radicaux est un idéal radical.*
12. *Trouver toutes les sous-algèbres de $M_n(\mathbf{K})$ stables par racines carrées.*

Exercice 3 (idéaux premiers). On appellera ***idéal premier*** de A tout idéal $\mathfrak{p}$ de A tel que

$$\mathfrak{p} \neq A \quad \text{et} \quad \forall a, b \in A,\ (ab \in \mathfrak{p} \iff a \in \mathfrak{p} \text{ ou } b \in \mathfrak{p}).$$

1. **(définition par le quotient).** *Montrer qu'un idéal $\mathfrak{p}$ est premier ssi le quotient $A/\mathfrak{p}$ est intègre.*
2. **(primalité de l'idéal nul)** *Montrer l'idéal nul est premier ssi l'anneau est intègre.*
3. **(premiers d'un quotient).** *Soit I un idéal de A. Montrer que les idéaux premiers de A/I sont les quotients $\mathfrak{p}/I$ où $\mathfrak{p}$ parcourt les idéaux premiers de A contenant I.*
4. **(primalité version idéaux)** *Montrer qu'un idéal $\mathfrak{p}$ est premier ssi, lorsqu'il contient un produit fini d'idéaux, il contient l'un d'entre eux.*
5. **(pas premier)** *Montrer qu'un idéal n'est pas premier ssi il est strictement inclus dans deux idéaux dont il contient le produit.*
6. **(premier = radical + ?)** Un idéal est dit ***irréductible*** lorsqu'il n'est pas intersection de deux idéaux strictement plus grands. *Montrer qu'un idéal est premier ssi il est radical et irréductible.*
7. On suppose que tout ensemble d'idéaux de A admet un élément maximal pour l'inclusion. *Montrer que tout idéal radical est intersection d'un nombre fini d'idéaux premiers.*
8. **(intégrité d'un produit).** *Montrer qu'un produit d'anneaux $A \times B$ est intègre ssi l'un est intègre et l'autre nul.*
9. **(tous premiers)** *Montre qu'un anneau non nul est un corps ssi tous ses idéaux (stricts) sont premiers.*
10. **(premiers de Z)** *Décrire les idéaux premiers de* $\mathbf{Z}$.
11. **(description externe de $\sqrt{I}$)** *Soit I un idéal. Montrer que la racine $\sqrt{I}$ est l'infimum de tous les idéaux premiers contenant I.* (hint : invoquer un $x \notin \sqrt{I}$, appliquer le lemme de Zorn à l'ensemble des idéaux contenant I et ne contenant aucune puissance $x^{n \geq 1}$ ordonné par l'inclusion et montrer qu'un élément maximal dans cet ensemble est premier)
12. **(description externe du nilradical)** *Montrer que* $\operatorname{Nilrad} A$ *est l'infimum des idéaux premiers.*
13. **(application aux polynômes)** *Montrer que les inversibles de l'anneau de polynômes $A[X]$ sont les polynômes de terme constant inversible et dont les autres coefficients sont nilpotents.*

Exercice 4 (idéaux maximaux). Un ***idéal maximal*** de A est un idéal strict de A maximal pour l'inclusion. On appelle ***radical de Jacobson*** de A l'ensemble $\operatorname{Jac} A = \{x \in A\ ;\ 1 + Ax \subset A^\times\}$.

1. **(définition par le quotient)** *Montrer qu'un idéal $\mathfrak{m}$ est maximal ssi le quotient $A/\mathfrak{m}$ est un corps.*
2. **(maximalité de l'idéal nul)** *Montrer que l'idéal nul est maximal ssi A est un corps.*
3. **(maximaux de Z)** *Décrire les idéaux maximaux de* $\mathbf{Z}$.
4. **(maximaux d'un quotient)** *Soit I un idéal de A. Montre que les idéaux maximaux de A/I sont les $\mathfrak{m}/I$ où $\mathfrak{m}$ décrit les idéaux maximaux de A contenant I.*
5. **(maximal & premier)** *Montrer que tout idéal maximal est premier. Réciproque ?*
6. **(maximaux & chinois)** *Montrer que deux idéaux maximaux distincts sont toujours étrangers.*
7. **(espaces vectoriels)** *Soient I un idéal de A et $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A. Montrer que $I/I\mathfrak{m}$ est un $A/\mathfrak{m}$-espace vectoriel.*
8. **(théorème de Krull)** *Montrer que tout idéal strict est inclus dans un idéal maximal.* (hint : Zorn)
9. *Montrer que tout anneau non nul admet un idéal maximal.*
10. **(réunion des maximaux)** *Montrer qu'un élément est non inversible ssi il appartient à un idéal maximal.*
11. **(un seul maximal)** *Montrer que A admet un unique idéal maximal ssi $A \setminus A^\times$ contient 0 et est stable par addition.*
12. **(dimension "linéaire")** *Supposons A non nul et soient p, q deux entiers positifs. Montrer que les anneaux produits A^p et A^q sont isomorphes ssi $p = q$.*
13. *Montrer que le radical de Jacobson est radical et contient le nilradical.*
14. **(description interne de** $\operatorname{Jac} A$**)** *Montrer que* $\operatorname{Jac} A$ *est le plus grand idéal I tel que $1 + I \subset A^\times$.*
15. **(description externe de** $\operatorname{Jac} A$**)** *Montrer que* $\operatorname{Jac} A$ *est l'infimum des idéaux maximaux.*
16. **(annulation de** $\operatorname{Jac} A$**)** *Montrer que le radical de Jacobson de $A/\operatorname{Jac} A$ est nul.*
17. *On suppose que la relation de divisibilité est totale. Montrer que A admet au plus un idéal maximal.*