Quelques exercices sur groupes symétriques et déterminants

Groupes symétriques. Soit $n \in \mathbf{N}$. On appelle ***inversion*** d'un $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tout couple $(i,j) \in \{1,...,n\}^2$ tel que $\begin{cases} i < j \\ \sigma(i) > \sigma(j) \end{cases}$.

1. Déterminer $|\mathfrak{A}_n|$ par deux méthodes différentes.
2. Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions (sans passer par les cycles), par une transposition et un n-cycle, par les transpositions $(1,k)$, par les transpositions $(k,k+1)$.
3. Montrer que la signature d'une permutation vaut -1 puissance son nombre d'inversions.
4. Montrer qu'une permutation de $\mathfrak{S}_n$ fixe en moyenne n points.
5. Montrer qu'une permutation inverse en moyenne la moitié des couples $(i<j)$.
6. On note $\mathfrak{S}_\infty$ le sous-groupe de $\mathfrak{S}_\mathbf{N}$ formé des permutations à support fini. Montrer que $\mathfrak{S}_\infty$ est dénombrable.
7. Soit E un ensemble infini dont toute partie est équipotente à son carré (toujours vrai sous l'axiome de choix). Montrer que $\mathfrak{S}_E$ est équipotent à $\mathfrak{P}(E)$.

Déterminants.

1. Soit $A \in M_n(K)$ telle que $a_{i,j} \neq 0 \Longrightarrow a_{j,i} = 0$ et $a_{i,j}a_{j,k} \neq 0 \Longrightarrow a_{i,k} = 0$ pour tous indices i,j,k deux à deux distincts. Calculer $|A|$.
2. Soit $A \in M_n(\{\pm 1\})$. Montrer que $|A|$ est multiple de 2^{n-1}.
3. Déterminer la frontière de $SL_n(K)$ et celle des matrices de rang fixé.
4. Soit $(a,b) \in K^n \times K^n$ tel que $\prod_{i,j}(a_i + b_j) \neq 0$. Calculer $\det\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)$ (au moins deux méthodes).
5. Soit $A \in M_n$. On note $f_A : \begin{cases} M_n & \longrightarrow & K \\ (C_1 \mid \cdots \mid C_n) & \longmapsto & \sum_{j=1}^n \det(C_1 \mid \cdots \mid C_{j-1} \mid AC_j \mid C_{j+1} \mid \cdots \mid C_n) \end{cases}$ où les C_i désignent les colonnes de la matrice $(C_1 \mid \cdots \mid C_n)$. Montrer que $f_A = (\operatorname{tr} A)\det$.
   (application) On considère l'équation différentielle $X' = AX$ où I est un intervalle de $\mathbf{R}$, A une application continue $I \longrightarrow M_n(\mathbf{R})$ et l'inconnue X est une application dérivable $I \longrightarrow \mathbf{R}^n$. Calculer $w_{\overrightarrow{X}} := \det(X_1(t), ..., X_n(t))$ où les X_i sont n solutions de l'équation $X' = AX$. Commenter.
6. Soient A,B,C,D quatre matrices carrées telles que B et D commutent. Montrer que $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - BC)$. Généraliser à une famille commutative de m^2 matrices.
7. Montrer que det, vu comme polynôme de $K[X_{i,j}]$, est irréductible.
8. Soient A et B deux matrices réelles qui commutent. Donner une CNS simple pour que $\forall p \in \mathbf{N}^*,\ \det(A^p + B^p) \geq 0$.
9. Soit $f : M_n(K) \longrightarrow K$ multiplicative. Montrer que les $J_{r<n}$ sont d'image nulle. Montrer qu'une transvection peut toujours s'écrire sous la forme $ABA^{-1}B^{-1}$. En déduire que $f = \varphi \circ \det$ où $\varphi : K \longrightarrow K$ est multiplicative (on rappelle que GL_n est engendré par les transvections et les dilatations). Commenter.
10. Soit $p \geq 3$ premier. Posons $K := \mathbf{F}_p$. Une matrice de $GL_n(K)$ étant une bijection (linéaire) de K^n dans lui-même, elle induit une permutation de K^n. Montrer qu'une matrice de $GL_n(K)$ induit une permutation paire ssi son déterminant est un carré dans K. Que dire si l'on remplace K par un corps fini ? Détailler le cas $p = 2$.