Travaux dirigés 7

1 Rappels de cours

La *taille* d'une matrice est le couple (a, b) où a désigne son nombre de lignes et b son nombre de colonnes – également noté $a \times b$. Par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ est de taille 2×3 et la matrice $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est de taille 4×1.

Memento. L'indice de ligne vient toujours **avant** celui de colonne.

Concaténation. La *concaténée* d'une matrice A de taille $n \times a$ et d'une matrice B de taille $n \times b$ est la matrice formée des a colonnes de A suivies des b colonnes de B : elle est de taille $n \times (a + b)$. Par exemple, concaténer $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ donne $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$. Bien noter que les deux matrices doivent avoir même nombre de lignes. Rien n'empêche toutefois de concaténer en mettant une matrice au-dessus de l'autre (le préciser alors).

Matrices d'un vecteur, d'une famille de vecteur, d'une application linéaire, d'un endomorphime, de passage.

Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{B}$ une base de E.

1. La *matrice d'un vecteur* x de E dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice colonne formée des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$. On la note $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} x$ ou $[x]_{\mathcal{B}}$. Par exemple, dans le plan $\mathbb{R}^2$, on a $\operatorname{Mat}_{\binom{1}{1},\binom{1}{-1}} \binom{1}{0} = \binom{1/2}{1/2}$.
2. La *matrice d'une famille* finie $\mathcal{F} := (x_1, ..., x_n)$ de vecteurs de E est la matrice concaténée des $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} x_i$ pour i variant de 1 à n (on met en première colonne les coordonnées de x_1 dans la base $\mathcal{B}$, puis en seconde colonne les coordonnées de x_2 dans la base $\mathcal{B}$, etc.). On la note $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{F}$ ou $[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}}$.
3. La *matrice de passage* de la base $\mathcal{B}$ vers/dans/à une autre base $\mathcal{B}'$ de E est la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'$ de la nouvelle base inconnue $(\mathcal{B}')$ exprimée dans l'ancienne base $(\mathcal{B})$ connue. On la note $\operatorname{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ ou $\operatorname{Pass}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$ ou $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ (ou tout autre assemblage **clair** évoquant un passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$).
4. La *matrice d'un endomorphisme* u de E dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u(\mathcal{B})$, notée $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u$ ou $[u]_{\mathcal{B}}$.
5. La *matrice d'une application linéaire* $f : E \longrightarrow F$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ (où F est un espace vectoriel, dont une base est $\mathcal{C}$) est la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}} f(\mathcal{B})$ de la famille $f(\mathcal{B})$ dans la base $\mathcal{C}$, notée $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} f$ ou $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$. Par exemple, vérifier que $\operatorname{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \operatorname{Id}$ et que pour u endomorphisme de E on a $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}} u$.

Produit matriciel. On se donne une matrice A de taille $p \times q$ et une matrice B de taille $q \times r$. Le *produit* AB est la matrice de taille $p \times r$ dont le coefficient situé à la i-ième ligne et j-ième colonne est $\sum_{x=1,...,q} a_{i,x} b_{x,j}$. Par exemple :

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} \times & \longrightarrow \\ \uparrow & = \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & x \\ 0 & b & 0 & 0 \\ a & \rho & a & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -a+2 & b+2\lambda-\rho & -a & 2x \\ 7a & 5b+7\rho & 7a & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

NB sur les tailles : pour pouvoir multiplier des tailles $(a, b) \times (c, d)$, il faut que les indices en contact (ici b et c) soient égaux. On a alors une sorte de relation de Chasles : muliplier $(p, q) \times (q, r)$ donne du (p, r) en "simplifiant par q".

2 Exercices

1. *Calculer la matrice du vecteur* $(1 + X)^3$ *dans la base* $(1, X - 2, X^2, X^3 + 3X)$ *de* $\mathbb{R}_3[X]$.
2. *Évaluer la matrice de la famille de vecteurs* $\binom{1}{3}\binom{-2}{0}\binom{7}{5}$ *dans la base* $\binom{1}{1}\binom{1}{-1}$ *de* $\mathbb{R}^2$.

3. *Donner la matrice de la dérivation dans les bases canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ (espace de départ) et $\mathbb{R}_2[X]$ (espace d'arrivée).*
4. *Simplifier les produits matriciels suivants et commenter :*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \quad et \quad \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. *On considère l'application linéaire $L : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & (X+1)P'' \end{array} \right.$ et le vecteur $x := (1+X)^3$ de l'espace de départ. Donner les matrices (toujours dans les bases canoniques) : du vecteur x, du vecteur $L(x)$, de l'application L. Que vaut le produit $[L][x]$? Commenter.*

Solution proposée.

1. On décompose le vecteur $(1+X)^3 = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$ dans la base donnée en $1(1) + 0(X-2) + 3(X^2) + 1(X^3 + 3X)$, d'où la matrice cherchée $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. On décompose chacun des vecteurs de la famille donnée dans la base considérée :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} &= 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} &= 6\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d'où la matrice cherchée $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. On décompose les images :

$$1 \longmapsto 0 \qquad X \longmapsto 1 \qquad X^2 \longmapsto 2X \qquad X^3 \longmapsto 3X$$

d'où la matrice voulue $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4. On trouve $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les deux produits ne sont pas égaux, ce qui illustre la *non-commutativité* du produit matriciel : en général, $AB \neq BA$ pour des matrices A et B. Autre commentaire : on a trouvé un produit nul, donc le produit matriciel n'est pas *intègre* : en général, $AB = 0$ n'implique pas forcément $A = 0$ ou $B = 0$.

   On obtient

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -8 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 \\ 15 & -20 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -16 & 4 & 0 \\ 114 & -152 & 38 & 0 \end{pmatrix}, \\ \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 38 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -16 & 4 & 0 \\ 114 & -152 & 38 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   On trouve la même chose, ce qui illustre l'*associativité* du produit matriciel : on a toujours

$$A(BC) = (AB)C$$

   pour toutes matrices A, B, C, ce qui permet d'*associer* les facteurs d'un produit comme l'on veut pour calculer ce dernier.

5. Il est clair que $\operatorname{Mat} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. De plus, vue la valeur de

$$L(x) = (X+1)\left[(X+1)^3\right]'' = (X+1)\,6\,(X+1) = 6X^2 + 12X + 6,$$

on peut affirmer que $\operatorname{Mat} L(x) = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$. Par ailleurs, L envoit

$$1 \longmapsto 0 \qquad X \longmapsto 0 \qquad X^2 \longmapsto 2X+2 \qquad X^3 \longmapsto 3X^2 + 3X,$$

d'où la matrice $\operatorname{Mat} L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Le produit demandé vaut donc

$$[L]\,[x] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} = [L(x)]\,.$$

On retrouve ainsi la propriété $\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}} f(x) = [\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} f]\,[\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} x]$.