Travaux dirigés 6

1 Rappels de cours

Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie. On considère $\mathcal{B} := (e_1, ..., e_p)$ une base de E et $\mathcal{C} := (f_1, ..., f_q)$ une base de F.

Les images $u(e_j)$ se décomposent dans F selon la base $(f_1, ..., f_q)$, mettons $u(e_j) = \sum_{i=1}^{q} a_{i,j} f_j$ pour tout $j = 1, ..., q$ pour certains scalaires $a_{i,j}$.

Par **définition**, la *matrice* de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est le tableau formé des scalaires $(a_{i,j})$ lorsque l'indice de ligne i varie de 1 à q et l'indice de colonne j de 1 à p. On la note

$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} u := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,p} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & a_{q,3} & \cdots & a_{q,p} \end{pmatrix}.$$

Retenir que l'indice de *ligne* vient *avant* celui de *colonne*.

À propos des *bases canoniques*, on renvoit au TD 4.

Étant donnée une base (e_i), *décomposer* un vecteur dans cette base, c'est l'écrire sous la forme $\sum \lambda_i e_i$ (une telle décomposition existe en vertu du caractère générateur d'une base et est unique en vertu de son caractère libre). On dit alors que les λ_i sont les *coordonnées* du vecteur considéré dans la base donnée.

2 Exercices

Donner les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases considérées :

1. $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$ *dans les bases canoniques ;*
2. $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ p & \longmapsto & p' \end{array} \right.$ *dans la base* $\left(1, X-2, X^2+7X, X^3\right)$ *au départ et* $\left(5, 1-X, 3-2X^2\right)$ *à l'arrivée ;*
3. $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_4[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ \pi & \longmapsto & X^2\pi' - \pi \end{array} \right.$ *dans les bases canoniques ;*
4. *n'importe quelle homothétie dans n'importe quelle base (la même au départ et à l'arrivée) ;*
5. $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (i,m,a,c) & \longmapsto & (i-2m+a, c+3i) \end{array} \right.$ *dans les bases canoniques ;*
6. *la rotation (dans* $\mathbb{R}^2$*) de centre* 0 *et d'angle* $\frac{\pi}{3}$ *dans la base canonique (au départ et à l'arrivée) ;*
7. *la rotation (dans* $\mathbb{R}^2$*) de centre* 0 *et d'angle* $\frac{\pi}{3}$ *dans la base* $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ *(au départ et à l'arrivée) ;*
8. *la projection* $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (i,u,t) & \longmapsto & (i,t) \end{array} \right.$ *dans les bases* $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ *au départ et* $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ *à l'arrivée.*

Solution proposée.

1. On considère la base donnée au départ, à savoir celle canonique $\left(1, X, X^2, X^3\right)$, on calcule les images de chacun des vecteurs de cette base par l'application donnée et on décompose chacune de ses images dans la base donnée à l'arrivée – à savoir celle canonique $\left(1, X, X^2\right)$. On trouve

$$\begin{array}{rcl} 1 & \longmapsto & 1' = 0 = 01 + 0X + 0X^2 \\ X & \longmapsto & X' = 1 = 1 \cdot 1 + 0X + 0X^2 \\ X^2 & \longmapsto & \left(X^2\right)' = 2X = 01 + 2X + 0X^2 \\ X^3 & \longmapsto & \left(X^3\right)' = 3X^2 = 01 + 0X + 2X^2 \end{array}$$

d'où la matrice (en reprenant la définition)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dans la première colonne, on lit les coordonnées de l'image de 1 (dans la base canonique), dans la seconde celles de l'image de X, dans la troisième celles de l'image de X^2 et dans la dernière celles de l'image de X^3.

2. On n'oubliera pas de vérifier que les deux bases imposées en sont bien[1]. On regarde l'image de chacun des vecteurs de la base $\left(1, X-2, X^2+7X, X^3\right)$ donnée au départ :

$$\begin{array}{rcl} 1 & \longmapsto & 1' = 0 \\ X-2 & \longmapsto & (X-2)' = 1 \\ X^2+7X & \longmapsto & \left(X^2+7X\right)' = 2X+7 \\ X^3 & \longmapsto & \left(X^3\right)' = 3X^2. \end{array}$$

Pour décomposer ces dernières dans la base $\left(5, 1-X, 3-2X^2\right)$ donnée à l'arrivée, le deux premiers sont aisés :

$$\begin{array}{rcl} 1 & \longmapsto & 0 = 05 + 0\,(1-X) + 0\left(3-2X^2\right) \\ X-2 & \longmapsto & 1 = \dfrac{1}{5}5 + 0\,(1-X) + 0\left(3-2X^2\right). \end{array}$$

Pour les autres, on commence par ajuster le terme de plus haut degré :

$$X^2+7X \longmapsto 2X+7 \stackrel{?}{=} \lambda 5 + \mu\,(1-X) + \nu\left(3-2X^2\right) \text{ pour des scalaires } \lambda, \mu, \nu.$$

Pas de terme en X^2, donc on doit prendre $\nu = 0$. Puis le coefficient en X vaut 2, donc on doit choisir $\mu = -2$. Il reste $2X+7 \stackrel{?}{=} \lambda 5 - 2\,(1-X)$, ce qui force $\lambda = \frac{9}{5}$.

De même, on écrirait

$$X^3 \longmapsto 3X^2 \stackrel{?}{=} a5 + b\,(1-X) + c\left(3-2X^2\right) \text{ pour des scalaires } a, b, c \text{ à trouver.}$$

Le terme $3X^2$ impose de prendre $c = -\frac{3}{2}$, le terme $0X$ impose $b = 0$; il reste $3X^2 \stackrel{?}{=} 5a - \frac{3}{2}\left(3-2X^2\right)$, ce qui équivaut à $a = \frac{9}{10}$.

Finalement, la matrice voulue vaut

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{9}{5} & \frac{9}{10} \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Ce n'est pas la même, et pourtant il s'agit de la même application : d'où l'importance de préciser les *bases* – au départ comme à l'arrivée.

3. On regarde les images des éléments de la base donnée au départ, à savoir $\left(1, X, X^2, X^3\right)$:

$$\begin{array}{rcl} 1 & \longmapsto & X^2 1' - 1 = -1 \\ X & \longmapsto & X^2 X' - X = X^2 - X \\ X^2 & \longmapsto & X^2\left(X^2\right)' - X^2 = 2X^3 - X^2 \\ X^3 & \longmapsto & X^2\left(X^3\right)' - X^3 = 3X^4 - X^3, \end{array}$$

[1] vus leurs cardinaux, il suffit de montrer qu'elles sont libres, ce qui est laissé aux bons soins du lecteur

d'où la matrice cherchée

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. On fixe une homothétie $x \mapsto \lambda x$ pour un certain scalaire λ (le rapport de l'homothétie). On fixe une base $(e_1, ..., e_n)$ de l'espace vectoriel considéré. Alors tout e_i est envoyé sur λe_i dont les coordonnées dans la base $(e_1, ..., e_n)$ sont toutes nulles sauf la i-ième qui vaut 1. Ainsi, la matrice voulue est

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$ avec que des λ sur la diagonale et 0 partout ailleurs.

On observera que c'est la même matrice quelle que soit la base choisie.

5. Comme d'habitude, on regarde les images des vecteurs de la base donnée au départ (ici la base canonique de $\mathbb{R}^4$) :

$$\begin{array}{ccc} (1,0,0,0) & \longmapsto & (1,3) \\ (0,1,0,0) & \longmapsto & (-2,0) \\ (0,0,1,0) & \longmapsto & (1,0) \\ (0,0,0,1) & \longmapsto & (0,1)\,, \end{array}$$

d'où la matrice désirée

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Codons un point de $\mathbb{R}^2$ par le complexe associé. On sait alors qu'appliquer une rotation de centre 0 et d'angle θ revient (en complexe) à multiplier par $e^{i\theta}$. Appliquons (avec ici $\theta = \frac{\pi}{3}$) : un point (a,b) codé par le complexe $a + ib$ est envoyé sur

$$\begin{aligned} (a+ib)\,e^{i\frac{\pi}{3}} &= (a+ib)\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = (a+ib)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{a - b\sqrt{3}}{2} + i\frac{b + a\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, la base donnée au départ est envoyée sur :

$$\begin{array}{ccc} (1,0) & \longmapsto & \left(\dfrac{1-0\sqrt{3}}{2}, \dfrac{0+1\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ (0,1) & \longmapsto & \left(\dfrac{0-1\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1+0\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right), \end{array}$$

d'où la matrice cherchée

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

7. On reprend le résultat de la question précédente, en décomposant les images des vecteur de la base donnée au départ dans celle imposée à l'arrivée :

$$\begin{array}{ccc} (1,-2) & \longmapsto & \begin{pmatrix} \frac{1-(-2)\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-2+1\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ (2,1) & \longmapsto & \begin{pmatrix} \frac{2-1\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+2\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} + \sqrt{3} \end{pmatrix} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{array}$$

d'où ma matrice voulue :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

C'est la même que celle qui précède.

On montrerait de même que la matrice de la rotation de centre 0 et d'angle θ dans n'importe quelle base orthornormée directe est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

8. Et pour changer on décompose les images des vecteurs de la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ imposée au départ dans la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ donnée à l'arrivée :

$$\begin{aligned}
(1,0,0) &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
(0,1,0) &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
(0,0,1) &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

d'où la matrice cherchée

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$