Travaux dirigés 5

1 Rappels de cours

La *somme* de parties $A_1, A_2, ..., A_n$ d'un même espace vectoriel est définie par

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n := \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}_{\forall i=1,...,n,\ a_i \in A_i}.$$

Une somme $A_1 + \cdots + A_n$ de parties est dite *directe* si tout élément de $A_1 + \cdots + A_n$ se décompose d'une unique façon, *i. e.* si

$$\forall a_1, \alpha_1 \in A_1,\ ...\forall a_n, \alpha_n \in A_n,\ [(a_1 + \cdots + a_n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n) \implies (\forall i = 1, ..., n,\ a_i = \alpha_i)].$$

On note alors la somme $A_1 + \cdots + A_n$ sous la forme $A_1 \oplus \cdots \oplus A_n.\oplus$

Lorsque les A_i sont des sous-espaces vectoriels, la linéarité permet d'obtenir un critère plus simple : *une somme $F_1 + \cdots + F_n$ de sous-espaces vectoriels F_i est directe ssi*

$$\forall f_1 \in F_1,\ ...\forall f_n \in F_n,\ [(f_1 + \cdots + f_n = 0) \implies (\forall i = 1, ..., n,\ f_i = g_i)].$$

Dans le cas de deux sous-espaces vectoriels, le critère se simplifie encore : *une somme de deux sous-espaces vectoriels est directe ssi leur intersection est nulle.*

Ainsi, pour montrer qu'un espace vectoriel E s'écrit $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$ (on dit alors que les F_i sont *supplémentaires* (dans E)), on montre d'une part que la somme $F_1 + \cdots + F_n$ vaut E, autrement dit que tout vecteur de E se décompose sous la forme $f_1 + \cdots + f_n$ avec $f_i \in F_i$ pour tout i, d'autre part que la décomposition qui précède est unique (pour tout vecteur).

2 Exercices

Justifier les décompositions suivantes[1] *en sommes directes :*

1. $\mathbb{R}^{42} = \mathbb{R}^{42} \oplus \{0\}$ *;*
2. $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ *;*
3. $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ *;*
4. $\mathbb{R}_{18}[X] = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}X \oplus \mathbb{R}X^2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}X^{18}$ *;*
5. *si* $(e_1, ..., e_n)$ *est une base d'un espace vectoriel* E : $E = \mathbb{R}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}e_n$ *;*
6. $\mathbb{R}[X] = \{$*polynômes pairs*$\} \oplus \{$*polynômes impairs*$\}$ *;*
7. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{$*fonctions paires*$\} \oplus \{$*fonctions impaires*$\}$ *;*
8. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{$*fonctions nulle en* $42\} \oplus \{$*fonctions constantes*$\}$ *;*
9. $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{$*fonctions continues d'intégrale nulle sur* $[0, 2]\} \oplus \{$*fonctions constantes*$\}$ *;*
10. $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{$*fonctions continues nulles sur* $\mathbb{R}^{+*}\} \oplus \{$*fonctions constantes*$\} \oplus \{$*fonctions continues nulles sur* $\mathbb{R}^{-*}\}$.

Solution proposée.

1. Soit un vecteur x dans $\mathbb{R}^{42}$ que l'on cherche à décomposer sous la forme $a + b$ avec $a \in \mathbb{R}^{42}$ et $b \in \{0\}$. Analyse : la seconde appartenance s'écrit aussi $b = 0$, ce qui impose $b = 0$, d'où $x = a + b = a$. Synthèse : l'analyse nous impose la décomposition $x \stackrel{?}{=} x + 0$, qui en est bien une.

   Il est important de noter que l'analyse nous fournit un moyen très puissant pour "deviner" une décomposition et, au passage, récolter son unicité.

[1] Un polynôme P est *pair* si $P(-X) = P$, *impair* si $P(-X) = -P$. Il revient au même que de dire que la fonction polynomiale associée est (im)paire.

2. On sait qu'un complexe s'écrit d'une unique façon sous forme d'un réel (sa partie réelle) plus i fois un autre réel (sa partie imaginaire), ce qui montre $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i$.
3. Les trois vecteurs apparaissant forment la base canonique de $\mathbb{R}^3$; or, il est clair que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ s'écrit d'une unique façon sous la forme (a, b, c) où a, b, c sont ses coordonnées dans la base canonique.
4. Même chose : on a affaire à la base canonique de $\mathbb{R}[X]$, tout polynôme s'écrit d'une unique façon comme $a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots$ (on parle bien *du* coefficient constant, *du* coefficient dominant, et non d'*un* coefficient constant/dominant).
5. On généralise les trois points précédents : étant donnée une famille $(e_1, ..., e_n)$ de vecteurs, elle engendre l'espace E ssi tout vecteur de E est de la forme $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ pour des réels $\lambda_1, ..., \lambda_n$, autrement dit ssi $E = \mathbb{R}e_1 + \cdots + \mathbb{R}e_n$. Par ailleurs, si l'on suppose de plus les e_i tous non nuls, ils forment une famille libre ssi la somme est directe, comme le montrent les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{R}e_1 + \cdots + \mathbb{R}e_n \text{ directe} \\
\underset{\text{somme directe}}{\overset{\text{définition de la}}{\iff}} \quad & \forall x_1 \in \mathbb{R}e_1,\ ...,\ \forall x_n \in \mathbb{R}e_n,\ [(x_1 + \cdots + x_n = 0) \implies (\forall i = 1, ..., n,\ x_i = 0)] \\
\underset{x_i = \lambda_i e_i}{\overset{\text{paramétrer}}{\iff}} \quad & \forall \lambda_1 \in \mathbb{R},\ ...,\ \forall \lambda_n \in \mathbb{R},\ [(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0) \implies (\forall i = 1, ..., n,\ \lambda_i e_i = 0)] \\
\underset{\text{tous non nuls}}{\overset{\text{les } e_i \text{ sont}}{\iff}} \quad & \forall \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R},\ [(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0) \implies (\forall i = 1, ..., n,\ \lambda_i = 0)] \\
\underset{\text{la liberté}}{\overset{\text{définition de}}{\iff}} \quad & (e_1, ..., e_n) \text{ libre.}
\end{aligned}$$

Par conséquent, lorsque $(e_1, ..., e_n)$ est une base, elle est libre et génératrice, ce qui permet d'écrire $E = \mathbb{R}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}e_n$, *CQFD*.
6. Soit P un polynôme que l'on cherche à décomposer sous la forme $P = A + B$ avec A pair et B impair. Analyse : partant d'une telle décomposition, composer par $-X$ donne $P(-X) = A(-X) + B(-X) = A - B$, d'où en réutilisant $P = A + B$ les égalités $A = \frac{P + P(-X)}{2}$ et $B = \frac{P - P(-X)}{2}$. Synthèse : l'analyse ne nous laisse pas beaucoup le choix, on *doit* essayer d'écrire $P \overset{?}{=} \frac{P+P(-X)}{2} + \frac{P-P(-X)}{2}$, égalité qui est vraie. L'unicité de la décomposition découle de l'analyse.
7. Même raisonner que ci-dessus : une anlayse montre qu'une fonction f s'écrit d'une unique façon sous la forme d'une fonction paire plus une fonction impaire, à savoir $\left[x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}\right] + \left[x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}\right]$.

   Sanity check : vérifier que l'intersection de l'espace des fonctions paires et de celui des fonctions impaires est nul. Si f est dedans, fixant un réel x, l'image $f(-x)$ vaut $f(x)$ par parité et vaut $-f(x)$ par imparité, d'où $2f(x) = 0$ et $f(x) = 0$; ceci tenant pour tout réel x, on en déduit bien la nullité de f.
8. Analyse : on écrit $f = n + c$ où $n(42) = 0$ et c constante. Évaluer en 42 donne $f(42) = n(42) + c(42) = c$, ce qui impose la constante $c = f(42)$ et par conséquent $n = f - f(42)$. Synthèse : on verifie que l'égalité $f \overset{?}{=} (f - f(42)) + f(42)$ est valide (l'unicité de la décomposition découle de l'analyse).

   Sanity check : vérifier que l'intersection de l'espace des fonctions nulles en 42 et de celui des fonctions constantes est nul. Si f est dans cette intersection, f est constante, donc égale à sa valeur en 42, laquelle est nulle, donc f est bien nulle.
9. Analyse : écrivons $f = i + c$ avec $\int_0^2 i = 0$ et c constante. Intégrer entre 0 et 2 donne $\int_0^2 f = \int_0^2 i + \int_0^2 c = 0 + 2c$, ce qui impose la constante $c = \frac{1}{2}\int_0^2 f$ et subséquemment $i = f - \frac{1}{2}\int_0^2 f$. Synthèse : on vérifie la validité de l'écriture $f \overset{?}{=} \left(f - \frac{1}{2}\int_0^2 f\right) + \frac{1}{2}\int_0^2 f$ (l'unicité a été montrée lors de l'analyse).

   Sanity check : vérifier que l'intersection de l'espace des fonctions d'intégrale nulle sur $[0, 2]$ et de celui des fonctions constante est nul. Si f est dans cette intersection, f est constante, mettons à c, donc son intégrale sur $[0, 2]$ vaut $2c$, mais elle est par ailleurs nulle, ce qui impose $c = 0$; autrement dit, f est bien nulle.
10. Analyse : on part d'une décomposition $f = n^+ + c + n^-$ où n^+ est nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$ (donc en 0 par continuité), c constante et n^- nulle sur $\mathbb{R}^{-*}$ (donc en 0 par continuité). Évaluer en 0 donne $f(0) = 0 + c + 0$, ce qui impose $c = f(0)$. Ensuire, étant donné un $x \geq 0$, on aura $f(x) = 0 + c(x) + n^-(x)$, ce qui impose n^- sur $\mathbb{R}^+$, donc sur tout $\mathbb{R}$ (n^- vaut 0 sur $\mathbb{R}^-$). De même, on voit que n^+ restreint à $\mathbb{R}^-$ vaut $f - f(0)$, ce qui impose sa valeur (il vaut 0 ailleurs). Synthèse : on définit pour tout x réel $f^+(x) := \begin{cases} f(x) - f(0) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$, $c(x) := f(0)$ et $f^-(x) = \begin{cases} f(x) - f(0) & \text{si } x \leq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Les fonctions f^+ et f^- sont bien bien continues car elles le sont sur $\mathbb{R}^*$ et sont de limite nulle en 0 (puisque f est continue en 0). On vérifie alors que l'écriture (imposée par l'analyse) $f \overset{?}{=} f^- + c + f^+$ est valide.