

Travaux dirigés 2

1 Rappels de cours

Un *espace vectoriel* (abrégé *ev*) est le cadre le plus général où l'on peut faire des *combinaisons linéaires*, *i. e.* où l'on peut former pour tous objets a_1, a_2, \dots, a_n des expressions de la forme $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$ où les λ_i sont des réels. Les objets de l'espace vectoriel sont appelés *vecteurs*, les réels sont appelés *scalaires* pour les différencier des vecteurs.

Les combinaisons linéaires sont soumises aux lois que l'on attend, à savoir (pour tous vecteurs a, b et pour tous scalaires λ, μ) :

$$\begin{aligned} 1a &= a \text{ (neutre)}, \\ \lambda(\mu a) &= (\lambda\mu)a \text{ (associativité)}, \\ \lambda(a+b) &= \lambda a + \lambda b \text{ (distributivité à droite)}, \\ (\lambda + \mu)a &= \lambda a + \mu a \text{ (distributivité à gauche)}. \end{aligned}$$

On laisse en guise d'exercice la déduction, depuis les propriétés précédentes, des identités $0a = 0$ et $(-\lambda)a = \lambda(-a) = -\lambda a$ pour tout scalaire λ et vecteur a .

Par exemple, \mathbb{R} est un ev où la multiplication d'un vecteur par un scalaire *est* le produit de deux réels. De même, on vérifie que \mathbb{R}^2 est un ev muni des lois "coordonnées" suivantes (λ est un scalaire et a, b, a', b' sont des réels)

$$\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a + a' \\ \lambda b + b' \end{pmatrix} \text{ (lire chaque coordonnée en ligne).}$$

On généralise sans peine à $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4 \dots$. Ainsi, \mathbb{C} est un ev (vu comme \mathbb{R}^2).

De même, si X désigne n'importe quel ensemble, l'ensemble \mathbb{R}^X des fonctions de X à valeurs réelles est un ev pour les lois "ponctuelles" (λ est un scalaire, f et g des vecteurs dans \mathbb{R}^X)

$$\lambda f + g : x \mapsto \lambda f(x) + g(x).$$

De même pour \mathbb{C}^X . Cet exemple fonctionnel est très général et permet de montrer que beaucoup de ses parties sont des ev, grâce au critère suivant.

Un *sous-espace vectoriel* (abrégé *sev*) d'un ev E est une partie de E qui est un ev (pour les lois de E). On montre que c'est équivalent à ce que la partie considérée vérifie les trois conditions suivantes¹ :

1. contenir le vecteur nul 0 ;
2. être stable par somme;
3. être stable par homothétie².

On rappelle les notations suivantes définies pour toutes parties A et B d'un ev, pour tout vecteur a et pour tout scalaire λ (les lire en français pour s'assurer de leur bonne compréhension) :

$$\begin{aligned} \lambda A &: = \{\lambda a\}_{a \in A}, \\ \mathbb{R}a &: = \{ta\}_{t \in \mathbb{R}}, \\ A + B &: = \{a + b\}_{\substack{a \in A \\ b \in B}}. \end{aligned}$$

2 Exercices

Parmi les parties suivantes du plan complexe, décrire lesquelles sont des ev :

$$\begin{aligned} &\emptyset, \{0\}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, [0, 1], 1 + i\mathbb{R}, \mathbb{C}^*, i\mathbb{R}, \{\vartheta \in \mathbb{C} ; 3 \operatorname{Re} \vartheta + \operatorname{Im} \vartheta = 0\}, \\ &\{f \in \mathbb{C} ; |f| = 1\}, \{\varrho \in \mathbb{C} ; |\varrho| \leq 1\}, \{\aleph \in \mathbb{C} ; |\operatorname{Arg} \aleph| < \frac{\pi}{6}\}, \{\Psi \in \mathbb{C} ; |\operatorname{Re} \Psi| < 3|\operatorname{Im} \Psi|\}, \\ &\{(\omega, \rho) \in \mathbb{R}^2 ; \omega + 7\rho = 0 \text{ et } 2\omega - \rho = 4\}, \mathbb{R} + i\sqrt{5}\mathbb{Q}, \mathbb{Q} + \sqrt{2}\mathbb{Q}, \end{aligned}$$

¹on peut remplacer les deux derniers points par "être stable par combinaison linéaire"

²Dans un espace vectoriel E , une *homothétie* est une application de la forme $a \mapsto \lambda a$ où λ est un scalaire fixé (appelé rapport de l'homothétie).

Rappeler pourquoi l'ensemble $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ des suites complexes est un ev. Parmi les parties suivantes de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, déterminer lesquelles sont des ev : l'ensemble des suites (respectivement) convergentes, divergentes, tendant vers ∞ , tendant vers un réel ou vers ∞ ou vers $-\infty$, dont le terme général u_n est un $O(n^3)$, périodiques.

Même question en se plaçant dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ avec l'ensemble des fonctions (respectivement) continues, dérivables, continues d'intégrale sur $[0, 1]$ nulle, positives, solutions de l'équation $f'' + f = \exp$ d'inconnue f , périodiques de période rationnelle, périodiques.

Solution rapide proposée.

On passe en revue les trois critères que doit vérifier un sev.

\emptyset ne contient personne, *a fortiori* pas le vecteur nul.

$\{0\}$ est un ev (il contient 0, il est stable par somme vu que $0 + 0 = 0$, il est stable par homothétie vu que $\lambda 0 = 0$ pour tout réel λ).

\mathbb{Z} n'est pas stable par division, donc n'est pas stable par homothétie (en prendre de rapport $\frac{1}{2}$).

\mathbb{R} est un ev (cf cours).

\mathbb{R}^2 est un ev (cf cours).

$[0, 1]$ n'est pas stable par somme ($1 + 1$ n'est pas dedans).

$1 + i\mathbb{R}$ ne contient pas 0 (la partie réelle de tous ses éléments est fixée à 1).

\mathbb{C}^* ne contient pas 0.

$i\mathbb{R}$ est un ev : il contient $0 = 0i$, il est stable par somme vu que $ia + ib = i(a + b)$ pour tous réels a et b (et que \mathbb{R} est stable par somme), il est stable par homothétie vu que $\lambda(ia) = i(\lambda a)$ pour tous réels a et scalaires λ (et vu que \mathbb{R} est stable par homothétie).

$\{\vartheta \in \mathbb{C} ; 3\operatorname{Re} \vartheta + \operatorname{Im} \vartheta = 0\}$ est un ev (c'est la droite de pente -3 en l'origine).

Le cercle unité n'est pas stable par somme ($1 + 1$ n'est pas unitaire).

Le disque unité non plus (même contre-exemple).

Le cône $\{\mathbb{N} \in \mathbb{C} ; |\operatorname{Arg} \mathbb{N}| < \frac{\pi}{6}\}$ n'est pas stable par homothétie de rapport strictement négatif (cela revient à ajouter $\pm\pi$ à l'argument principal).

Le (double-)cône $\{\Psi \in \mathbb{C} ; |\operatorname{Re} \Psi| < 3|\operatorname{Im} \Psi|\}$ délimité par les droites d'équation $y = \pm\frac{1}{3}x$ n'est pas stable par somme : $\pm i$ sont dedans mais pas leur somme 2.

$\{(\omega, \rho) \in \mathbb{R}^2 ; \omega + 7\rho = 0 \text{ et } 2\omega - \rho = 4\}$ n'est pas un ev car ne contient pas 0 à cause de la seconde équation.

$\mathbb{R} + i\sqrt{5}\mathbb{Q}$ n'est pas stable par homothétie : l'image de l'élément $0 + i\sqrt{5}$ par une homothétie de rapport irrationnel (disons λ) a pour partie imaginaire $\lambda\sqrt{5}$ qui ne peut être de la forme $r'\sqrt{5}$ avec r' rationnel (sinon $\lambda = r'$ serait rationnel).

(Plus difficile.) $\mathbb{Q} + \sqrt{2}\mathbb{Q}$ n'est stable par homothétie : si c'était le cas, puisque $1 = 1 + 0\sqrt{2}$ est dedans, son image par toute homothétie resterait dedans, donc tout réel appartiendrait à $\mathbb{Q} + \sqrt{2}\mathbb{Q}$. Montrons que c'est impossible pour $\sqrt{3}$: si on pouvait écrire $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$ pour des rationnels a, b , élever au carré donnerait $3 = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2}$, d'où $\sqrt{2} = \frac{3-a^2-2b^2}{2ab}$ qui serait rationnel (comme quotient de rationnels), contradiction³.

$\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est un ev d'après le cours (c'est l'ev \mathbb{C}^X avec $X = \mathbb{N}$)

Les théorèmes généraux sur les sommes et produits de suites convergentes assurent que ces dernières forment un ev.

La suite nulle n'est pas divergente (elle converge vers 0) et ne tend pas vers ∞ .

$n \mapsto n + \sin n$ tend vers ∞ (car $n \mapsto n$ tend vers ∞ et $n \mapsto \sin n$ bornée), $n \mapsto -n$ tend vers $-\infty$, mais la somme $n \mapsto \sin n$ ne tend ni vers un réel ni vers ∞ ni vers $-\infty$.

La suite nulle est bien un $O(n^3)$, toute combinaison de $O(n^3)$ en reste un (revenir aux définitions) :

$$O(n^3) + O(n^3) = n^3\Theta_n + n^3\Theta'_n = n^3(\Theta_n + \Theta'_n)$$

où les suites Θ_n et Θ'_n sont bornées (*a fortiori* leur somme).

La suite nulle est périodique, si (a_n) est a -périodiques et (b_n) est b -périodiques, alors a et b sont des entiers ≥ 1 , donc (a_n) et (b_n) sont toutes deux ab -périodiques, *a fortiori* toute combinaison linéaire $(\lambda a_n + b_n)$ aussi.

Les théorèmes généraux sur les sommes et produits de fonctions continues (resp. dérivables) assurent que ces dernières forment un ev.

³Bien vérifier que a et b sont non nuls pour pouvoir diviser par ab : si a était nul, l'égalité $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$ deviendrait $b = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, d'où la rationalité (absurde) de $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ et de même la nullité de b impliquerait la rationalité de $\sqrt{3}$.

L'intégration sur un segment étant linéaire, l'ensemble $\left\{ f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) ; \int_0^1 f = 0 \right\}$ est bien un ev.

La positivité n'est pas préservée par homothétie de rapport strictement négatif.

La fonction nulle n'est pas solution de $f'' + f = \exp$.

Même idée que pour les suites : si le rapport $\frac{a}{b}$ des périodes $a > 0$ et $b > 0$ de deux fonctions périodiques est rationnel, mettons $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$, alors ces deux fonctions sont $qa = pb$ -périodiques, donc toute combinaison linéaire aussi.

(Plus difficile.) Montrons que la somme de $e^{i\cdot}$ et $e^{ir\cdot}$ avec r irrationnel ne peut être périodique. Si c'est le cas, notons $T > 0$ une période. Par définition de cette dernière, on aura pour tout réel t

$$[e^{i\cdot} + e^{ir\cdot}](t + T) = [e^{i\cdot} + e^{ir\cdot}](T), \text{ i. e. } e^{iT} e^{it} + e^{irT} e^{irt} = e^{it} + e^{irt},$$

$$\text{ce qui s'écrit } (e^{iT} - 1) e^{it} = (1 - e^{irT}) e^{irt}, \text{ ou encore } e^{it(1-r)} = \frac{1 - e^{irT}}{e^{iT} - 1}.$$

La dernière fraction fait sens si $e^{iT} \neq 1$, mais alors la quantité $e^{it(1-r)}$ lui serait constamment égale, ce qui est impossible (elle vaut 1 en $\frac{2\pi}{1-r}$ et -1 en $\frac{\pi}{1-r}$, points autorisés car $r \neq 1$). On doit donc avec $e^{iT} = 1$, d'où l'on déduit (réinjecter dans l'égalité d'avant) $e^{irt} = 1$. Il y a donc deux entiers a et b tels que $T = 2a\pi$ et $rT = 2b\pi$, d'où en divisant⁴ la rationalité de $r = \frac{b}{a}$, contradiction.

⁴ a est non nul car T est non nul