# Travaux dirigés 10

## 1 Rappels de cours

On se donne un endomorphisme $f$ d'un espace vectoriel de dimension finie.

*Réduire* $f$, c'est trouver une base où sa matrice est "gentille", pas trop compliquée, qui facilite les calculs, bref, avec plein de zéros, si possible triangulaire voire diagonale.

Lorsque $f$ est de la forme $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & Ax \end{array}\right.$ pour une certaine matrice $A$ carrée $n \times n$ (cet endomorphisme est *canoniquement associé* à la matrice $A$), on rappelle que la matrice de $f$ dans la base canonique n'est autre que $A$ elle-même. Ce fait n'est pas anecdotique, c'est primordial pour comprendre la réduction des matrices, il faut le vérifier soi-même en revenant aux définitions :

$$\operatorname*{Mat}_{b.\ c.}(x \mapsto Ax) = A.$$

Par ailleurs, on identifiera abusivement – et systématiquement – la matrice $A$ à son endomorphisme canoniquement associé $x \mapsto Ax$.

Considérons $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$. La matrice de la famille $\mathcal{B}$ dans la base canonique est exactement la matrice de passage de la base canonique vers $\mathcal{B}$ :

$$\operatorname*{Mat}_{b.\ c.} \mathcal{B} = \operatorname{Pass}(b.\ c. \to \mathcal{B}).$$

Ainsi, cette matrice de passage, appelons-la $P$, s'obtient en concaténant les vecteurs colonnes[1] de $\mathcal{B}$. Les formules de passages permettent alors d'écrire :

$$A = P \left( \operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} A \right) P^{-1}.$$

Si $\lambda$ est une valeur propre de $A$, le *sous-espace propre* associé à $\lambda$ est l'ensemble des vecteurs propres associés à $\lambda$ auquel on rajoute le vecteur sale $(0)$. Il s'agit donc de l'ensemble formé des vecteurs $x$ tels que $Ax = \lambda x$. Il s'écrit aussi $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)$.

Le *polynôme caractéristique* d'une matrice $A$ est le polynôme $\chi_A := \det(X \operatorname{Id} - A)$. Les valeurs propres de $A$ sont exactement les racines de $\chi_A$.

Les théorèmes qui suivent[2] montrent que la réduction des matrices passe nécessairement par le calcul du polynôme caractéristique.

**Théorème.** *Une matrice réelle $A$ est trigonalisable ssi $\chi_A$ est scindé,* i. e. *se factorise comme produit de facteurs tous de degré* 1.

**Théorème.** *Une matrice réelle $A$ est diagonalisable ssi $\chi_A$ est scindé, mettons $\chi_A = \prod (X - \lambda)^{\omega_\lambda}$, et si pour toute valeur propre $\lambda$ on a $\omega_\lambda = n - \operatorname{rg}(A - \lambda \operatorname{Id})$.*

## 2 Exercices

*Réduire les matrice suivantes :*

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cdot & -9 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & -4 \\ 1 & \cdot & \cdot & -4 \\ \cdot & 1 & \cdot & 3 \\ \cdot & \cdot & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

[1] naturellement écrits dans la base canonique, d'où – est-il besoin de le rappeler ? – le nom de cette dernière

[2] on ne les utilisera toutefois pas dans ce TD

*Pour les deux dernières matrices, on pourra invoquer les vecteurs* $(0,1,-2)$, $(0,4,-4,1)$ *et* $(0,1,2,1)$ *afin d'obtenir des réduites de la forme* $\begin{pmatrix} \lambda & \cdot & \cdot \\ \cdot & \mu & 1 \\ \cdot & \cdot & \mu \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \lambda & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \mu & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \mu \end{pmatrix}$.

**Solution proposée.**

1. On calcule $\chi\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} X+1 & -4 \\ -4 & X+1 \end{vmatrix} = (X+5)(X-3)$, d'où le spectre $\{3,-5\}$. En résolvant deux systèmes, on voit que le sous-espace propre associé à 3 est la droite $\mathbb{R}\binom{1}{1}$, celui associé à $-5$ est $\mathbb{R}\binom{1}{-1}$. On en déduit
$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 3 & \\ & -5 \end{pmatrix} P^{-1}$$
où $P$ s'obtient en concaténant un vecteur propre pour 3 et un vecteur propre pour 5, par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Mais on pourrait tout aussi bien choisir $\begin{pmatrix} 18 & -42 \\ 18 & 42 \end{pmatrix}$. Il faut juste garder le même ordre entre les valeurs propres et les vecteurs propres : on pourra ainsi écrire $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} -5 & \\ & 3 \end{pmatrix} Q^{-1}$, avec $Q := \begin{pmatrix} e & \sqrt{\pi} \\ -e & \sqrt{\pi} \end{pmatrix}$.

2. Le polynôme caractéristique de $B := \begin{pmatrix} \cdot & -9 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$ vaut $X^2+6X+9 = (X+3)^2$, d'où une unique valeur propre 3. On a déjà vu au TD précédent pourquoi on ne peut pas diagonaliser (sinon notre matrice serait l'homothétie $3\,\mathrm{Id}$), ce que confirme le calcul du sous-espace propre $\mathbb{R}\binom{3}{1}$ qui ne saurait être tout l'espace $\mathbb{R}^2$.

   On peut quand même trigonaliser $B$ : en choisissant un second vecteur $b$ libre avec un vecteur propre $a$, par exemple $b := \binom{1}{0}$ pour alléger les calculs, on peut écrire
$$Bb = B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = [\text{première colonne de } B] = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = a - 3b,$$
d'où $\mathrm{Mat}_{(a,b)}\,B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ \cdot & -3 \end{pmatrix}$, ce qui s'écrit aussi $B = P\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ \cdot & -3 \end{pmatrix}P^{-1}$ avec $P := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & \cdot \end{pmatrix}$.

   Le lecteur est encouragé à calculer $2 - \mathrm{rg}\,(B+3\,\mathrm{Id})$ pour vérifier le théorème donné.

3. Le calcul du polynôme caractéristique $\chi\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ donne $(X-1)(X+1)^2$, d'où deux valeurs propres $\pm 1$. Le sous-espace propre associé à 1 est la droite $\mathbb{R}\,(1,1,1)$, celui associé à $-1$ est le plan $\mathbb{R}\,(-1,1,0) + \mathbb{R}\,(1,0,1)$. On peut donc trouver une base de vecteurs propres et écrire
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}P^{-1} \text{ avec } P := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
On incite le lecteur à calculer $3 - \mathrm{rg}\,(S \pm 1)$ pour vérifier le théorème ($S$ désigne la matrice étudiée).

4. Le polynôme caractéristique de $C := \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ vaut $X^3 - X^2 - 5X - 3 = (X-3)(X+1)^2$, d'où le spectre $\{-1,3\}$. Le sous-espace propre associé à $-1$ est la droite $\mathbb{R}\,(1,-1,1)$ et celui associé à 3 est la droite $\mathbb{R}\,(1,3,9)$ : impossible de diagonaliser car les vecteurs propres n'engendrent qu'un plan (et non tout l'espace $\mathbb{R}^3$).

   On peut toutefois trigonaliser en choisissant un troisième vecteur $c$ libre avec deux vecteurs propres libres $a := (1,3,9)$ et $b := (1,-1,1)$, par exemple $c := (1,0,0)$ pour simplifier les calculs. On trouve[3]

[3] Pour trouver la décomposition qui suit, on remarque que l'on pourra ajuster l'abscisse de $Cc$ à l'aide d'un multiple de $c$ : on ne s'intéresse donc qu'à obtenir les ordonnée et cote de $Cc = (?,0,3)$. Puisque l'on veut un 0 en ordonnée, il faut prendre une combinaison $\lambda a + \mu b$ qui annule l'ordonnée, par exemple $a+3b = (4,0,12)$. On ajuste ensuite la cote par un coefficient multiplicatif : pour aller de 12 à 3, on divise par quatre. On obtient $\frac{a+3b}{4} = (1,0,3)$ dont il reste à ajouter le bon multiple de $c$ pour tomber sur $Cc$, à savoir $-c$.

$Cc = (0,0,3) = \frac{a+3b}{4} - c$, ce qui permet d'écrire $\operatorname{Mat}_{\left(\frac{a}{4},\frac{b}{4},c\right)} C = \begin{pmatrix} 3 & \cdot & 1 \\ \cdot & -1 & 3 \\ \cdot & \cdot & -1 \end{pmatrix}$.

En fait, en choisissant $c := (0,1,-2)$ comme suggéré par l'énoncé, on aurait obtenu $Cc = b - c$, d'où la réduite plus simple (un zéro de plus en haut à droite)

$$\operatorname*{Mat}_{(a,b,c)} C = \begin{pmatrix} 3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & 1 \\ \cdot & \cdot & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Le calcul du polynôme caractéristique donne en développant selon la dernière colonne

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} X & \cdot & \cdot & 4 \\ -1 & X & \cdot & 4 \\ \cdot & -1 & X & -3 \\ \cdot & \cdot & -1 & X-2 \end{vmatrix} &= -4 \begin{vmatrix} -1 & X & \cdot \\ \cdot & -1 & X \\ \cdot & \cdot & -1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} X & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & X \\ \cdot & \cdot & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} X & \cdot & \cdot \\ -1 & X & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 \end{vmatrix} + (X-2) \begin{vmatrix} X & \cdot & \cdot \\ -1 & X & \cdot \\ \cdot & -1 & X \end{vmatrix} \\ &= (-4)(-1) + 4X + 3\left(-X^2\right) + (X-2)\,X^3 \\ &= X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 4X + 4 \\ &= (X+1)^2 (X-2)^2 . \end{aligned}$$

Il y a donc deux valeurs propres $-1$ et $2$, chacun de sous-espace propre associée une droite, dirigée par $a := (4,0,-3,1)$ pour $-1$ et par $b := (2,3,0,-1)$ pour $2$. Pas question donc de diagonaliser.

En prenant simplement $c := (1,0,0,0)$ et $d := (0,1,0,0)$, on trouve[4]

$$\begin{aligned} Mc &= [\text{première colonne de } M] = (0,1,0,0) = d, \\ Md &= [\text{deuxième colonne de } M] = (0,0,1,0) = -\frac{a+b}{3} + 2c + d, \end{aligned}$$

d'où la réduite $\operatorname{Mat}_{(a,b,c,d)} M = \begin{pmatrix} -1 & \cdot & \cdot & -\frac{1}{3} \\ \cdot & 2 & \cdot & -\frac{1}{3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & 2 \\ \cdot & \cdot & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

En prenant les vecteurs suggérés par l'énoncé, appelons-les $\alpha := (0,4,-4,1)$ et $\beta := (0,1,2,1)$, on trouve $M\alpha = (-4,-4,7,-2) = -a - \alpha$ et $M\beta = 4(-1,-1,1,1) = 2\beta - 2b$, d'où dans la base $\left(a, -\alpha, b, -\frac{\beta}{2}\right)$ la réduite ayant la forme souhaitée

$$\operatorname*{Mat}_{\left(a,-\alpha,b,-\frac{\beta}{2}\right)} M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 2 \end{pmatrix}.$$

**Remarque sur le polynômes caractéristique.** Le lecteur observera sur les exemples ci-dessus que le polynôme caractéristique d'une matrice de la forme $\begin{pmatrix} & & & -a_0 \\ 1 & & & -a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ ou sa transposée $\begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ est $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ (lire la dernière colonne). Il est encouragé à le montrer en toute généralité.

**Remarque générale sur la réduction.** Sur tous les exemples, il semble possible de réduire toute matrice réelle comme diagonale de blocs de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda$ valeur propre. (Évidemment, lorsque ces blocs sont de taille $1 \times 1$, la surdiagonale de 1 disparaît.) C'est effectivement possible lorsque le polynôme caractéristique est scindé : la réduite obtenue s'appelle *réduite de Jordan*[5].

[4] Pour trouver la seconde décomposition qui suit, on remarque que l'on pourra ajuster les abscisse et ordonnée de $Md$ à l'aide de multiples de $c$ et $d$ : on ne s'intéresse donc qu'à obtenir les troisième et quatrième coordonnées $(?,?,1,0)$. On met un 0 en dernière position en prenant une combinaison linéaire $a + b = (?,?,-3,0)$, on divise par $-3$ pour ajuster la cote, ce qui donne $\frac{a+b}{3} = (-2,-1,1,0)$, puis on ajoute les bons multiples de $c$ et $d$ pour obtenir $Md$, à savoir 2 et 1.

[5] de Camille Jordan, mathématicien français, et non anglophone –> ne pas prononcer "djordane"