Travaux dirigés 1

Résoudre les systèmes suivants en les inconnues réelles données :

1. $\begin{cases} 3a+b=5 \\ 5a-b=-1 \end{cases}$ *en* (a,b) *;*

2. $\begin{cases} 2\lambda-\mu=3 \\ 3\mu-6\lambda=4 \end{cases}$ *en* (λ,μ) *;*

3. $\begin{cases} 7x-42y=14 \\ 6y-x=-2 \end{cases}$ *en* (x,y) *;*

4. $\begin{cases} \lambda+2\mu-\xi=7 \\ 2\lambda+\mu+\nu=5 \end{cases}$ *en* (λ,μ,ν,ξ) *;*

5. $\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=1 \\ 2\alpha-\gamma=-1 \\ \alpha+2\beta+\gamma=1 \end{cases}$ *en* (α,β,γ) *;*

6. $\begin{cases} p+7q-3r+2s=3 \\ p-2r+s=1 \\ 5p-6q-s=1 \\ s-p=3 \end{cases}$ *en* (p,q,r,s).

Solution proposée.

Pour résoudre une équation, on peut considérer un objet solution, obtenir des conditions *nécessaires* portant sur cet objet, puis vérifier en retour que les conditions trouvées *suffisent* pour que l'objet soit solution. On peut également raisonner par équivalences, ce qui est plus contraignant mais qui évite la vérification finale.

1. Considérons un couple (a,b) de réels tel que $\begin{cases} 3a+b=10 \\ 5a-b=-2 \end{cases}$. Additionner les deux lignes donne $8a=8$, d'où $a=1$; en réinjectant (par exemple) dans la première ligne, on trouve $b=10-3a=7$. Réciproquement, on vérifie que le couple $(1,7)$ est bien solution du système proposé.

   Autre démarche : étant fixé un couple (a,b) de réels, on a les équivalences

$$(a,b) \text{ est solution du système proposée} \iff \begin{cases} 3a+b=10 \\ 5a-b=-2 \end{cases} \overset{L_1 \longleftarrow L_1+L_2}{\iff} \begin{cases} 8a=8 \\ b=5a+2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a=1 \\ b=5a+2 \end{cases} \iff \binom{a}{b}=\binom{1}{7}.$$

2. Prenons un couple (u,v) de réels tel que $\begin{cases} 2u-v=3 \\ 3v-6u=4 \end{cases}$. Ajouter la seconde ligne au triple de la première donne $0=4+3\times 3$, ce qui est absurde. Ainsi, le système n'a pas de solution.

3. Fixons des réels x et y. La première ligne du système $\begin{cases} 7x-42y=14 \\ 6y-x=-2 \end{cases}$ s'obtenant en multipliant la première par -7 (opération réversible puisque -7 est inversible), ce système équivaut à n'importe laquelle de ses lignes, par exemple la seconde. On a donc les équivalences

$$(x,y) \text{ solution du système considéré} \iff 6y-x=-2 \iff x=6y+2 \iff \binom{x}{y}=\binom{6y+2}{y}$$
$$\iff \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \binom{x}{y}=\binom{6\lambda+2}{\lambda} \iff \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \binom{x}{y}=\lambda\binom{6}{1}+\binom{2}{0}.$$

   Il est vital de bien comprendre l'équivalence juste avant l'apparition du quantificateur existentiel : pour le sens $\Longrightarrow$, poser $\lambda=y$; pour le sens $\Longleftarrow$, on lit $y=\lambda$ en seconde coordonnée, d'où (en première coordonnée) $x=6\lambda+2=6y+2$.

   Ainsi, les solutions sont les couples de la forme $\lambda\binom{6}{1}+\binom{2}{0}$ avec λ parcourant les réels : l'ensemble des solutions donc la droite affine

$$\mathbb{R}\binom{6}{1}+\binom{2}{0}$$

   passant par le point $\binom{2}{0}$ et dirigée par le vecteur $\binom{6}{1}$.

4. Comme pour le système précédent, on choisit des inconnues (appelées alors *paramètres*) qui vont servir à exprimer les autres. Intuitivement, on a quatre inconnues soumises à deux conditions, donc probablement $4-2$ degrés de liberté, à savoir *deux* paramètres. On en choisit si possible sans trop déformer les conditions imposées (éviter les fractions).

Soit (λ, μ, ν, ξ) un quadruplet de réels. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \nu & \xi \end{pmatrix} \text{ solution du système donné } & \iff \left\{ \begin{array}{l} \lambda + 2\mu - \xi = 7 \\ 2\lambda + \mu + \nu = 5 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \xi = \lambda + 2\mu - 7 \\ \nu = 5 - 2\lambda - \mu \end{array} \right. \\
& \iff \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \nu & \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 5 - 2\lambda - \mu & \lambda + 2\mu - 7 \end{pmatrix} \\
& \iff \exists a, b \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \nu & \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 5 - 2a - b & a + 2b - 7 \end{pmatrix} \\
& \iff \exists a, b \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \nu & \xi \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi, les solutions sont les quadruplets de la forme $a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$ où a et b décrivent $\mathbb{R}$; l'ensemble des solutions est donc le plan affine

$$\mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$$

passant par le point $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$ et dirigé par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Invoquons un triplet réel (α, β, γ) solution de $\left\{ \begin{array}{r} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ 2\alpha - \gamma = -1 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 1 \end{array} \right.$. Retirer la première ligne de la troisième donne $\beta = 0$; addtionner les lignes 1 et 2 donne $3\alpha = 0$; il reste $\gamma = 1$ partout. Réciproquement, on vérifie que le triplet $(0, 0, 1)$ est bien solution.

6. Considérons un quadruplet $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ satisfaisant le système $\left\{ \begin{array}{r} p + 7q - 3r + 2s = 3 \\ p - 2r + s = 1 \\ 5p - 6q - s = 1 \\ s - p = 3 \end{array} \right.$. Susbstituer la dernière ligne $s = p+3$ dans les trois première donne $\left\{ \begin{array}{r} 3p + 7q - 3r = -3 \\ 2p - 2r = -2 \\ 4p - 6q = 4 \end{array} \right.$, *i. e.* $\left\{ \begin{array}{r} 3(p - r + 1) + 7q = 0 \\ p - r + 1 = 0 \\ 2p = 3q + 2 \end{array} \right.$. La première ligne donne $7q = 0$, *i. e.* $q = 0$, d'où (en réinjectant dans la troisième ligne) $p = \frac{3}{2}q + 1 = 1$ puis (seconde ligne) $r = p + 1 = 2$ et enfin $s = p + 3 = 4$. Réciproquement, on vérifie que le quadruplet $(1, 0, 2, 4)$ est solution.