Travaux dirigés 8

Rappel. La notation $o_{x\to a}(q)$ désigne quelque chose de la forme "q multiplié par une fonction de x de limite nulle en a". Même chose pour $O_{x\to a}(q)$ en remplaçant "de limite nulle en a" par "borné au voisinage de a", et idem pour une quantité équivalente à q (au voisinage de a) en remplaçant "de limite nulle en a" par "de limite 1 en a". En d'autres termes :

$$\begin{aligned} o_{x\to a}(q) \text{ désigne quelque chose de la forme } \varepsilon(x)\,q \text{ où } \lim_a \varepsilon &= 0, \\ O_{x\to a}(q) \text{ désigne quelque chose de la forme } \Theta(x)\,q \text{ où } \Theta \text{ borné au voisinage de } a, \\ \text{une quantité équivalente à } q \text{ (au voisinage de } a\text{) est quelque chose de la forme } u(x)\,q \text{ où } \lim_a u &= 1. \end{aligned}$$

Ce qui précède sont des **définitions**, donc on peut toujours s'y ramener si on est bloqué. Et même si on ne les comprend pas, on peut toujours les manipuler. C'est d'ailleurs ce que vous faites depuis toujours en maths : c'est quoi au juste un nombre ? et un cercle ? un ensemble ? une fonction ? Sans faire de philosophie des fondements, ces questions simples doivent vous mettre devant une évidence : vous manipulez des notions et énoncez des relations entre elles sans même savoir de quoi vous parlez (je vous rassure, la plupart des matheux non plus). Mais il reste les **relations** entre les objets, ce sont sur elles que vous tenez un discours (on peut toujours affirmer $1+1=2$ quel que soit le sens que l'on donne aux symboles 1, 2, + et =).

Pas besoin de **comprendre** un petit o, il suffit de savoir le **relier** à du connu. Et pour cela, vous avez la définition ci-dessus. Pour citer Von Neumann : "Young man, you don't understand Mathematics, you just get used to them" (et je compléterai : "you will fathom out matters later").

Exemple 1. *Montrer qu'une somme finie de petits o (d'une même quantité en un même point) reste un petit o (de la même quantité en ce même point).*

Preuve. Appelons q et a les quantité et point considérés. On veut montrer que $o_{x\to a}(q)+o_{x\to a}(q)+\cdots+o_{x\to a}(q)=o_{x\to a}(q)$ où le nombre de terme du membre de gauche est un entier naturel quelconque ≥ 1. Par une récurrence immédiate, il suffit de montrer l'égalité précédente pour cet entier valant 2.

On revient à la définition : les termes à gauche sont chacun de la forme $\varepsilon(x)\,q$ avec $\lim_0 \varepsilon = 0$ (*a priori*, pas la même fonction ε pour les différents termes), ce qui permet d'écrire $o_{x\to a}(q)+o_{x\to a}(q)$ sous la forme $\varepsilon(x)\,q+e(x)\,q=[\varepsilon(x)+e(x)]\,q$ avec $\lim_a \varepsilon = 0 = \lim_a e$. Puisque $\varepsilon(x)+e(x)$ tend vers $0+0=0$ lorsque $x\to a$, on peut réécrire $[\varepsilon(x)+e(x)]\,q$ sous la forme $E(x)\,q$ où $\lim_a E=0$, ce qui est exactement la définition d'un $o_{x\to a}(q)$. On a donc terminé la preuve – au besoin, récapituler

$$o_{x\to a}(q)+o_{x\to a}(q)=\varepsilon(x)\,q+e(x)\,q=[\varepsilon(x)+e(x)]\,q=E(x)\,q=o_{x\to a}(q).$$

Exemple 2. *Montrer l'égalité* $o_{x\to a}(1)\,O_{x\to a}(1)=o_{x\to a}(1)$ *et en déduire*

$$o_{x\to a}(q)\,O_{x\to a}(1)=o_{x\to a}(q).$$

Interprêter en français.

Preuve. On remplace par les définitions : $o_{x\to a}(1)\,O_{x\to a}(1)$ est de la forme $[\varepsilon(x)\,1]\,[\Theta(x)\,1]$ où $\lim_a \varepsilon=0$ et où Θ est borné au voisinage de a. D'après le cours sur les limites, quelque chose de borné multiplié par quelque chose de limite nulle tend vers 0. Ainsi, on a $\lim_a \varepsilon\Theta=0$, ce qui montre que $o_{x\to a}(1)\,O_{x\to a}(1)$ s'écrit $[\varepsilon\Theta(x)]\,1$, autrement dit est un $o_{x\to a}(1)$. Pour en déduire l'égalité voulue, on multiplie les deux membres par q.

La première égalité ne fait que traduire que "quelque chose de borné multiplié par un truc qui tend vers zéro tend toujours vers zéro". La seconde dit que, au voisinage d'un point donné, "quelque chose de négligeable reste négligeable après multiplication par un truc borné."

Exemple 3. *Montrer qu'un* $o_{\frac{\sin t}{2t}\longrightarrow\frac12}\left(t^3\right)$ *est un* $o_{t\longrightarrow 0}\left(t^3\right)$.

Preuve. On revient à la définition : un $o_{\frac{\sin t}{2t}\longrightarrow\frac12}\left(t^3\right)$ est de la forme $\varepsilon\left(\frac{\sin t}{2t}\right)t^3$ où $\lim_{\frac12}\varepsilon=0$. Or, vue la limite classique $\frac{\sin t}{t}\overset{t\to 0}{\longrightarrow}1$ (ce qui s'écrit aussi $\sin t \overset{t\to 0}{\sim} t$ **par définition** de $\sim$), la quantité $\frac{\sin t}{2t}$ tend vers $\frac12$ quand $t\to 0$, donc par composition des limites la quantité $\varepsilon\left(\frac{\sin t}{2t}\right)$ tend vers 0 quand $t\to 0$. Cette dernière est donc de la forme $E(t)$ avec $\lim_0 E=0$, ce qui montre que

$$o_{\frac{\sin t}{2t}\longrightarrow\frac12}\left(t^3\right)=\varepsilon\left(\frac{\sin t}{2t}\right)t^3=E(t)\,t^3=o_{t\to 0}\left(t^3\right), \text{ ce qu'il fallait démontrer.}$$

Exemple 4. *Parmi les équivalences suivantes (toutes énoncées lorsque $x \sim 0$), dire lesquelles sont justes/fausses (justifier) :*

$$\begin{array}{lllll}\cos x \sim 1-\frac{x^2}{2} & \cos x \sim 1+\frac{x^2}{2} & \cos x \sim 1+x^2 & \cos x \sim 1+\frac{x^3}{3} & \cos x \sim 1+42x^{18} \\ \cos x \sim x-\frac{x^3}{6} & \cos x \sim x+\frac{x^3}{6} & \cos x \sim x+x^2+x^3 & \sin x \sim \frac{3^{12}}{2^{19}}x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}. & \end{array}$$

Preuve. Dans chaque équivalence de la première ligne, les deux membres tendent vers une même limite non nulle (ici 1), donc le quotient tend vers 1, donc l'équivalence est vérifiée (par définition d'une équivalence !). Dans la deuxième ligne, au contraire, les trois premières équivalences sont fausses car les deux membres tendent vers des limites distinctes (1 et 0), donc le quotient (dans un sens ou dans l'autre) ne peut pas tendre vers 1.

Enfin, puisque x^3 et x^5 sont négligeables devant x, le membre de droite de la dernière équivalence équivaut à son premier terme $\frac{3^{12}}{2^{19}}x$; puisque par ailleurs $\sin x \sim x$, la justesse de la dernière équivalence impliquerait celle de $x \sim \frac{3^{12}}{2^{19}}x$, c'est-à-dire $\frac{\frac{3^{12}}{2^{19}}x}{x} \longrightarrow 1$, ou encore $\frac{3^{12}}{2^{19}} = 1$, ce qui est faux[1] (même si $\frac{3^{12}}{2^{19}} \simeq 1,01$, il ne vaut pas *exactement* 1, sinon $3^{12} = 2^{19}$ serait un entier à la fois pair et impair).

Remarque. Qu'est-ce qui est bizarre dans ce qui précède ? On a l'impression que l'on peut mettre (presque) n'importe quoi comme DL et toujours obtenir une équivalence : c'est exactement ça !

La raison est qu'une équivalence ne "voit" *que* le terme prépondérant d'un DL : toute précision supplémentaire est *inutile* car invisible (par $\sim$). On peut donc rajouter quelque chose de juste (comme un DL à l'ordre 42) tout comme n'importe quoi de négligeable devant le terme prépondérant, cela n'en modifiera en rien l'équivalence.

Mais alors à quoi servent les DLs ? Précisément à voir au-delà du terme prépondérant (ce que ne peuvent faire les équivalences bigleuses).

Donner un développement limité des fonctions suivantes au voisinage de 0 *(jusqu'à l'ordre indiqué)* :

1. $y \mapsto \sin(3y)$ *à l'ordre* 6 *;*
2. $\cos^2$ *à l'ordre* 2 *;*
3. $g \mapsto e^g \times \ln(1+g)$ *à l'ordre* 3 *;*
4. $\sin^5$ *à l'ordre* 7 *;*
5. $\Lambda \mapsto \exp(\ln(1+\Lambda))$ *à l'ordre* 4 *(commenter) ;*
6. $\tan$ *à l'ordre* 7*.*

Solution rapide proposée.

1. On sait que $\sin \square = \square - \frac{\square^3}{3!} + \frac{\square^5}{5!} + o_{\square \to 0}\left(\square^6\right)$ où le carré désigne n'importe quelle quantité. En particulier, en le remplaçant par $3y$, on obtient

$$\sin(3y) = 3y - \frac{(3y)^3}{3!} + \frac{(3y)^5}{5!} + o_{3y\to 0}\left((3y)^6\right) = 3y - \frac{9}{2}y^3 + \frac{81}{40}y^5 + o_{3y\to 0}\left(3^6 y^6\right).$$

Pour avoir un vrai DL à l'ordre 6 lorsque $y \to 0$, il faudrait montrer que le petit o ci-dessus est un $o_{y\to 0}\left(y^6\right)$. On procède comme dans l'introduction, en revanant aux définition : la quantité $o_{3y\to 0}\left((3y)^6\right)$ s'écrit $\varepsilon(3y)(3y)^6$ où $\lim_0 \varepsilon = 0$, ou encore $\left[3^6\varepsilon(3y)\right] y^6$ où la quantité $3^6\varepsilon(3y)$ est de limite nulle lorsque $y \to 0$, donc est de la forme $e(y)\, y^6$ avec $\lim_0 e = 0$, ce qui est la définition d'un $o_{y\to 0}\left(y^6\right)$.

[1] Ainsi, conntrairement à ce qui se passe sur un piano, 12 quintes (qui chacune multiplie la fréquence d'une note par $\frac{3}{2}$) ne peuvent faire exactement 7 octaves (chacune doublant la fréquence d'une note), sinon on aurait $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} = 2^7$ et $3^{12} = 2^{12+7} = 2^{19}$, ce qui est faux.

2. On connaît $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$ lorsque x est proche de 0. Développer le carré donne[2]

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right)^2 = 1 + \frac{x^4}{4} + o\left(x^2\right) o\left(x^2\right) + 2\left(-\frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) - \frac{x^2}{2} o\left(x^2\right)\right) \\ &= 1 - x^2 + \underline{2o\left(x^2\right) + \frac{x^4}{4} + o\left(x^2\right) o\left(x^2\right) - x^2 o\left(x^2\right)}.\end{aligned}$$

Montrons que chacun des termes de la quantité soulignée est un $o\left(x^2\right)$, ce qui montrera (en vertu de l'exemple 1) que cette dernière est un $o\left(x^2\right)$.

Déjà, on a $\frac{x^4}{4} = o\left(x^2\right)$ puisque le quotient $\frac{\frac{x^4}{4}}{x^2} = \frac{x^2}{4} \longrightarrow 0$. Ensuite, le produit de deux $o\left(x^2\right)$ est de la forme $\left[\varepsilon(x) x^2\right]\left[e(x) x^2\right]$ avec $\lim_0 \varepsilon = 0 = \lim_0 e$, donc est de la forme $\varepsilon e(x) x^4$ avec $\lim_0 \varepsilon e = 0$, donc est un $o\left(x^4\right)$ (*a fortiori* un $o\left(x^2\right)$). De même, le terme $x^2 o\left(x^2\right)$ est un $o\left(x^4\right)$ (écrire pourquoi), donc un $o\left(x^2\right)$. Enfin, il est clair que $2o\left(x^2\right)$ est un $o\left(x^2\right)$ (c'est l'exemple 2 avec pour $O(1)$ la fonction constante 2).

Moralité. *Quand on développe un DL, on ne garde pas les termes qui sont négligeables devant l'ordre voulu (ici x^2).*

Autre méthode : afin d'éviter de *multiplier*, on peut d'abord *linéairiser* $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ puis utiliser le DL connu de cos en 0 :

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + o_{2x\to 0}\left((2x)^2\right).$$

On montre à la main que $o_{2x\to 0}\left((2x)^2\right)$ est un $o_{x\to 0}\left(x^2\right)$ ("on", c'est vous !), d'où

$$\cos^2 x = \frac{2 - 2x^2 + o_{x\to 0}\left(x^2\right)}{2} = 1 - x^2 + o\left(x^2\right).$$

Heureusement (et bien sûr !), on trouve la même chose.

3. On invoque les DLs connus de exp en 0 et de ln en 1 : (g est pris au voisinage de 0)

$$e^g \times \ln(1+g) = \left(1 + g + \frac{g^2}{2} + \frac{g^3}{6} + o\left(g^3\right)\right)\left(g - \frac{g^2}{2} + \frac{g^3}{3} + o\left(g^3\right)\right).$$

Quand on développe, on récupère un polynôme de degré ≤ 3 plus d'autres termes qui sont : ou bien des monômes d'ordre > 3 (rappeller pourquoi ces derniers sont des $o\left(g^3\right)$), ou bien de la forme $\lambda g^n o\left(g^3\right)$ pour λ réel et $n \in \mathbb{N}$ (montrer alors qu'ils sont des $o\left(g^3\right)$), ou bien un produit de $o\left(g^3\right)$ (dire pourquoi c'est encore un $o\left(g^3\right)$). Ainsi, seul reste le polynôme plus un $o\left(g^3\right)$:

$$\begin{aligned}e^g \ln(1+g) &= \left(1 + g + \frac{g^2}{2} + \frac{g^3}{6} + o\left(g^3\right)\right)\left(g - \frac{g^2}{2} + \frac{g^3}{3} + o\left(g^3\right)\right) = \left(g - \frac{g^2}{2} + \frac{g^3}{3}\right) + \left(g^2 - \frac{g^3}{2}\right) + \frac{g^3}{2} + o\left(g^3\right) \\ &= g + \frac{g^2}{2} + \frac{g^3}{3} + o\left(g^3\right).\end{aligned}$$

4. On commence par mettre bêtement de DL à l'ordre 7 de sin à la puissance 5 :

$$\sin^5 t = \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + o\left(t^7\right)\right)^5.$$

Afin de s'épargner des calculs inutiles, on observera qu'un t se factorise :

$$\sin^5 t = t^5\left(1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{t^6}{7!} + o\left(t^6\right)\right)^5.$$

Ainsi, puisqu'on veut de l'ordre 7 à la fin, il suffit d'avoir de l'ordre 2 dans la puissance cinquième, ce qui donne $\left(1 - \frac{t^2}{3!} + o\left(t^2\right)\right)^5 = 1 - 5 \times \frac{t^2}{6} + o\left(t^2\right)$ (quand on développe tout, les seuls termes d'ordre ≤ 2 sont 1 et $\frac{t^2}{6}$ (lequel apparaît cinq fois)).

Ainsi, on aurait pu partir du DL de sin à l'ordre $2+1$ (le $+1$ vient du t que l'on a factorisé) :

$$\sin^5 t = \left(t - \frac{t^3}{6} + o\left(t^3\right)\right)^5 = t^5\left(1 - \frac{t^2}{6} + o\left(t^2\right)\right)^5 = t^5\left(1 - \frac{5}{6}t^2 + o\left(t^2\right)\right) = t^5 - \frac{5}{6}t^7 + o\left(t^7\right).$$

[2] on rappelle $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ pour tous complexes a, b, c,

5. On remplace dans le DL connu de exp en 0 la "variable" par $\ln(1+\Lambda)$ (pour Λ au voisinage de 0) :

$$e^{\ln(1+\Lambda)} = 1 + \ln(1+\Lambda) + \frac{[\ln(1+\Lambda)]^2}{2} + \frac{[\ln(1+\Lambda)]^3}{3!} + o_{\ln(1+\Lambda)\to 0}\left([\ln(1+\Lambda)]^3\right).$$

Comme dans l'exemple 3 (remind moreover $\ln(1+\Lambda) \sim \Lambda$), on montre que le petit o ci-dessus est un $o_{\Lambda\to 0}\left(\Lambda^3\right)$. Il s'agit donc de faire un DL des trois termes contenant du $\ln(1+\Lambda)$.

On observera judicieusement (comme dans le DL de $\sin^5$) que, puisque le DL de $\ln(1+\Lambda)$ commence par un Λ, ceux de $[\ln(1+\Lambda)]^n$ commençent par Λ^n pour tout entier n (factoriser par Λ). Ainsi, puisqu'on veut l'ordre 3, on DLifiera $\ln(1+\Lambda)$ à l'ordre $(4-n)$ pour $n = 1, 2, 3$.

Commençons par $[\ln(1+\Lambda)]^3 \overset{\text{ordre } 1}{=} (\Lambda + o(\Lambda))^3$. Quand on développe tout, en invoquant la "moralité" ci-dessus, on ne garde que le cube Λ^3, d'où

$$[\ln(1+\Lambda)]^3 = \Lambda^3 + o\left(\Lambda^3\right).$$

Ensuite, on a $[\ln(1+\Lambda)]^2 \overset{\text{ordre } 2}{=} \left(\Lambda - \frac{\Lambda^2}{2} + o\left(\Lambda^2\right)\right)^2$. En dévéloppant[3], les seuls termes d'ordre ≤ 3 sont Λ^2 et $2\left(\Lambda \cdot \frac{-\Lambda^2}{2}\right)$, ce qui donne

$$[\ln(1+\Lambda)]^2 = \left(\Lambda - \frac{\Lambda^2}{2} + o\left(\Lambda^2\right)\right)^2 = \Lambda^2 - \Lambda^3 + o\left(\Lambda^3\right).$$

Il reste à tout réinjecter pour conclure :

$$\begin{aligned}
e^{\ln(1+\Lambda)} &= 1 + \ln(1+\Lambda) + \frac{[\ln(1+\Lambda)]^2}{2} + \frac{[\ln(1+\Lambda)]^3}{3!} + o_{\Lambda\to 0}\left(\Lambda^3\right) \\
&= 1 + \Lambda\left(1 - \frac{\Lambda}{2} + \frac{\Lambda^2}{3} + o\left(\Lambda^2\right)\right) + \frac{\Lambda^2 - \Lambda^3 + o\left(\Lambda^3\right)}{2} + \frac{\Lambda^3 + o\left(\Lambda^3\right)}{6} + o\left(\Lambda^3\right) \\
&= 1 + \left(\Lambda - \frac{\Lambda^2}{2} + \frac{\Lambda^3}{3}\right) + \left(\frac{\Lambda^2}{2} - \frac{\Lambda^3}{2}\right) + \frac{\Lambda^3}{6} + o\left(\Lambda^3\right) \\
&= 1 + \Lambda + 0\Lambda^2 + 0\Lambda^3 + o\left(\Lambda^3\right).
\end{aligned}$$

Commentaire : puisque $\exp \circ \ln = \mathrm{Id}$, on savait bien que l'on allait trouver $e^{\ln(1+\Lambda)} = 1 + \Lambda$, et cela même à n'importe quel ordre ! Il n'y ici aucune approximation (ou plutôt cette dernière est *nulle*), le résultat est exact, le $o\left(\Lambda^3\right)$ dans la dernière égalité vaut zéro.

6. Plusieurs méthodes possibles : on peut

(a) calculer les dérivées n-ièmes de tan, les évaluer en 0 et appliquer Taylor-Young ;

(b) faire un quotient de DLs en écrivant $\tan = \frac{\sin}{\cos}$;

(c) utiliser le DL connu d'arctan, écrire $\mathrm{Id} = \tan \circ \arctan$ et invoquer l'unicité du DL ;

(d) intégrer la formule $\tan' = 1 + \tan^2$ pour faire une récurrence.

On va choisir la dernière.

On part du DL (pour x au voisinage de 0) $\tan x = x + o(x)$ (qui n'est qu'une traduction de l'équivalence $\tan x \sim x$). On le réinjecte dans

$$\tan' x = 1 + \tan^2 x = 1 + (x + o(x))^2 = 1 + x^2 + o\left(x^2\right),$$

d'où par intégration (la constante d'intégration est nulle car $\tan 0 = 0$)

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right).$$

On recommence : $\tan' x = 1 + \tan^2 x = 1 + \left(x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)\right)^2$. Le carré se simplifie en $x^2\left(1 + \frac{x^2}{3} + o\left(x^2\right)\right)^2$: lorsqu'on le développe[4], on obtient $x^2\left(1 + 2\frac{x^2}{3} + o\left(x^2\right)\right)$, d'où $\tan' x = 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o\left(x^4\right)$ et

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o\left(x^5\right).$$

[3] on rappelle $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ pour tout complexes a, b, c,

[4] on rappelle $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ pour tout complexes a, b, c,

Allez, une dernère fois : $\tan' x = 1 + \tan^2 x = 1 + \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o\left(x^5\right)\right)^2$. Encore une fois, sortir le x de la grosse puissance avant toute action : $\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o\left(x^5\right)\right)^2 = x^2\left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15} + o\left(x^4\right)\right)^2$. Lorsqu'on développe tout, on récupère

$$x^2\left(1 + \frac{2x^2}{3} + \left(\frac{x^2}{3}\right)^2 + 2\frac{2x^4}{15} + o\left(x^4\right)\right) = x^2 + \frac{2x^4}{3} + \left(\frac{1}{9} + \frac{4}{15}\right)x^6 + o\left(x^6\right),$$

d'où (simplifier $\frac{1}{9} + \frac{4}{15} = \frac{5+3\cdot 4}{3\cdot 3\cdot 5} = \frac{17}{45}$)

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o\left(x^7\right).$$