Travaux dirigés 6

On rappelle l'existence de wikipedia pour trouver un alphabet grec.

Calculer la dérivée des fonctions suivantes au points considérés :

1. *prendre l'inverse en* 18
2. *élever au carré en* 3 *;*
3. *élever à la puissance* 43 *en* 2 *;*
4. *prendre la racine carrée en* 15 *;*
5. *prendre la racine carrée en* 0 *;*
6. $\phi \mapsto \frac{5-\phi}{7-\phi}$ *en* 5 *;*
7. $t \mapsto \begin{cases} t \sin \frac{1}{t} \text{ si } t \neq 0 \\ 0 \text{ si } t = 0 \end{cases}$ *en* 0 *;*
8. $\chi \mapsto \begin{cases} \chi^2 \sin \frac{1}{\chi} \text{ si } \chi \neq 0 \\ 0 \text{ si } \chi = 0 \end{cases}$ *en* 0 *;*
9. *l'exponentielle en* -4 *(on admet* $\exp' 0 = 1$*) ;*
10. *le logarithme népérien en* 42 *(on admet* $\ln' 1 = 1$*) ;*
11. *cosinus en* $\frac{\pi}{6}$ *;*
12. *prendre la racine cubique en* 18.

Solution rapide proposée.

Sans résultat général, on revient à la défintion de la dérivée d'une fonction f en un point a comme limite (si elle existe !) du taux d'accroissement $\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}$ lorsque ε tend vers 0. Dans ce qui suit, on pourra noter ε d'une autre manière.

1. $\frac{\frac{1}{18+\varepsilon}-\frac{1}{18}}{\varepsilon} = \frac{\frac{18-(18+\varepsilon)}{(18+\varepsilon)18}}{\varepsilon} = \frac{-1}{(18+\varepsilon)18} \overset{\varepsilon\longrightarrow 0}{\longrightarrow} \frac{-1}{18^2}$.
2. $\frac{(3+\varepsilon)^2-3^2}{\varepsilon} = \frac{6\varepsilon+\varepsilon^2}{\varepsilon} = 6+\varepsilon \overset{\varepsilon\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 6$.
3. $\frac{(2+h)^{43}-2^{43}}{h} = \frac{2^{43}+43\cdot 2^{42}h+h^2Q-2^{43}}{h} = 43\cdot 2^{42}+hQ \overset{h\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 43\cdot 2^{42}$ (ici, Q désigne une quantité dépendant de h mais qui reste bornée lorsque h est proche de 0).
4. $\frac{\sqrt{15+\beta}-\sqrt{15}}{\beta} \underset{\text{conjuguée}}{\overset{\text{quantité}}{=}} \frac{(15+\beta)-15}{\beta\left(\sqrt{15+\beta}+\sqrt{15}\right)} = \frac{1}{\sqrt{15+\beta}+\sqrt{15}} \overset{\beta\longrightarrow 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2\sqrt{15}}$.
5. $\frac{\sqrt{0+\omega}-\sqrt{0}}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \overset{\omega\longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} \infty$ (la racine carrée n'est donc pas dérivable en 0).
6. On simplifie **avant** de dériver : $\frac{5-\phi}{7-\phi} = \frac{7-\phi-2}{7-\phi} = 1+\frac{2}{\phi-7}$. Puis on regarde le taux d'accroissement en 5 : $\frac{\left(1+\frac{2}{(5+\zeta)-7}\right)-\left(1+\frac{2}{5-7}\right)}{\zeta} = \frac{\frac{2}{\zeta-2}+2}{\zeta} = \frac{\frac{2+(\zeta-2)}{\zeta-2}}{\zeta} = \frac{1}{\zeta-2} \overset{\zeta\longrightarrow 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$. Sanity check : la quantité $1+\frac{2}{\zeta-7}$ décroît (comme $\frac{1}{\zeta}$).
7. $\frac{t\sin\frac{1}{t}-0}{t} = \sin\frac{1}{t}$ n'a pas de limite lorsque $t \longrightarrow 0^+$ (a fortiori quand $t \longrightarrow 0$) car sin n'a pas de limite en ∞. La fonction n'est donc la dérivable en 0, la dérivée divergeant par oscillations (même si le graphe a une limite en 0).
8. $\frac{\chi^2\sin\frac{1}{\chi}-0}{\chi} = \chi\sin\frac{1}{\chi} \overset{\chi\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$ (par les gendarmes). Interprétation graphique : les enveloppes du sinus, formées de deux paraboles, montrent que la tangente en 0 ne peut être qu'horizontale.
9. $\frac{e^{-4+y}-e^{-4}}{y} = e^{-4}\frac{e^y-1}{y} \overset{y\longrightarrow 0}{\longrightarrow} e^{-4}e'(0) = \frac{1}{e^4}$.
10. $\frac{\ln(42+\upsilon)-\ln 42}{\upsilon} = \frac{\ln\left[42\left(1+\frac{\upsilon}{42}\right)\right]-\ln 42}{\upsilon} = \frac{\left[\ln 42+\ln\left(1+\frac{\upsilon}{42}\right)\right]-\ln 42}{\upsilon} = \frac{1}{42}\frac{\ln\left(1+\frac{\upsilon}{42}\right)}{\frac{\nu}{42}} \overset{\nu\longrightarrow 0}{\longrightarrow} \frac{\ln'(0)}{42} = \frac{1}{42}$.
11. $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}+\kappa\right)-\cos\frac{\pi}{6}}{\kappa} = \frac{\cos\frac{\pi}{6}\cos\kappa-\sin\frac{\pi}{6}\sin\kappa-\cos\frac{\pi}{6}}{\kappa} = \frac{\cos\kappa-1}{\kappa}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sin\kappa}{\kappa}\frac{1}{2}$; or, on rappelle que $\frac{\sin\kappa}{\kappa} \overset{\kappa\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 1$, d'où $\frac{\cos\kappa-1}{\kappa} = \frac{-2\sin^2\frac{\kappa}{2}}{\kappa} = \frac{-\kappa}{2}\left(\frac{\sin\frac{\kappa}{2}}{\frac{\kappa}{2}}\right)^2 \overset{\kappa\longrightarrow 0}{\longrightarrow} \frac{-0}{2}1^2 = 0$. La dérivée voulue vaut donc $-\frac{1}{2}$.

12. Difficulté : pas de quantité conjuguée pour les racines cubiques. En fait, si, mais il faut passer dans les complexes : en notant $j := e^{\frac{2\pi}{3} i}$ une racine cubique de l'unité (*i. e.* $j^3 = 1$), on peut vérifier en développant que[1]

$$(a-b)(a-bj)\left(a-bj^2\right) = a^3 - b^3.$$

Noter au passage que $j^2 = \overline{j} = e^{-\frac{2\pi}{3} i}$. Ainsi, on aura

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[3]{18+\Gamma} - \sqrt[3]{18}}{\Gamma} &= \frac{\left(\sqrt[3]{18+\Gamma} - \sqrt[3]{18}\right)\left(\sqrt[3]{18+\Gamma} - j\sqrt[3]{18}\right)\left(\sqrt[3]{18+\Gamma} - j^2\sqrt[3]{18}\right)}{\Gamma\left(\sqrt[3]{18+\Gamma} - j\sqrt[3]{18}\right)\left(\sqrt[3]{18+\Gamma} - j^2\sqrt[3]{18}\right)} \\
&= \frac{(18+\Gamma) - 18}{\Gamma\left(\sqrt[3]{18+\Gamma} - j\sqrt[3]{18}\right)\overline{\left(\sqrt[3]{18+\Gamma} - j\sqrt[3]{18}\right)}} \\
&= \frac{1}{\left|\sqrt[3]{18+\Gamma} - j\sqrt[3]{18}\right|^2} \xrightarrow{\Gamma\to 0} \frac{1}{\left|\sqrt[3]{18} - j\sqrt[3]{18}\right|^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{18}^2}\frac{1}{|1-j|^2}.
\end{aligned}$$

Pour conclure, il reste à calculer

$$\begin{aligned}
|1-j|^2 &= (1-j)\overline{(1-j)} = (1-j)\left(1-j^2\right) = 1 - j^2 - j + j^3 = 1 - \left(j + \overline{j}\right) + 1 \\
&= 2 - 2\operatorname{Re} j = 2 - 2\cos\frac{2\pi}{3} = 2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 3.
\end{aligned}$$

Finalement, la dérivée cherchée est $\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{18}^2}$.

[1] Lorsque l'on a une racine carrée, on fait en fait la même chose : en notant $\varepsilon := -1$ une racine carrée de 1, on vérifie que $a^2 - b^2 = (a-b)(a-\varepsilon b)$.