Travaux dirigés 5

On rapelle qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est *croissante* (ou *croît*) sur une partie P de $\mathbb{R}$ si

$$\forall a, b \in P,\ a \leq b \implies f(a) \leq f(b)$$

(en d'autres termes, f **conserve l'ordre** entre éléments de P) (intuitivement, une fonction f croît sur une partie P lorsque son graphe "monte toujours" en parcourant P des négatifs vers les positifs). On dit que f est *décroissante* sur P si la seconde inégalité est renversée (autrement dit si f **inverse l'ordre** des éléments de P). Une fonction est dite *monotone* si elle croît ou si elle décroît.

Propriété utile : *la composée de deux fonctions monotones est monotone*, le sens de croissance étant déterminée par la règle des signes (en associant $+1$ à la croissance et -1 à la décroissance).

*Étudier la monotonie des applications suivantes **sans dérivées** :*

1. *prendre l'inverse ;*
2. *élever au carré ;*
3. *élever à la puissance* 43 *;*
4. *prendre la racine carrée ;*
5. *prendre la racine cubique ;*
6. *l'exponentielle ;*
7. *le logarithme népérien/naturel ;*
8. $\phi \mapsto \frac{5-\phi}{7-\phi}$ *;*
9. $\varphi \mapsto \frac{4\varphi-1}{\varphi-1}$ *;*
10. $\theta \mapsto \frac{1-r^2}{r^2-2r\cos\theta+1}$ *(où* r *est un réel dans* $]0,1[$*).*

Solution rapide proposée.

Pour tout ce qui suit, il est vital de se faire une intuition avec les graphes déjà connus. Pour les fonctions plus compliquées, on pourra tracer un graphe avec l'outil informatique de son choix.

1. Le graphe est formé de deux branches d'hyperbole, sur chacune desquels notre fonction décroît. Montrons cela.

   Prenons deux réels a et b non nuls de même signe. Quitte à échanger leurs noms, on peut supposer $a \leq b$. En divisant par le produit ab (qui est bien non nul, sa positivité permettant de conserver le sens de l'inégalité), on obtient $\frac{a}{ab} \leq \frac{b}{ab}$, soit $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$, ce qui conclut.

   ATTENTION : "prendre l'inverse" **ne décroît pas** sur tout $\mathbb{R}^*$ car les points -1 et 1 ont pas leurs images dans le même ordre (le graphe "monte" du point d'abscisse -1 à celui d'abscisse 1).

2. Le graphe est une parabole, croissante sur les positifs et décroissante sur les négatifs. Montrons cela proprement.

   Montrons la croissance de notre fonction (appelons-la c) sur $\mathbb{R}^+$. On prend deux réels a et b dedans et on montre que le signe de $c(a) - c(b)$ est le même que celui de $a - b$, ce qui se fait tout seul à l'aide d'une identité remarquable :

   $$c(a) - c(b) = a^2 - b^2 = (a-b)\underbrace{(a+b)}_{\geq 0+0=0},\ \textit{CQFD}.$$

   Même démo pour la décroissance sur $\mathbb{R}^-$.

   En revanche, "élever au carré" **ne croît pas** sur $\mathbb{R}$ (car les réels -2 et 1 n'ont pas leurs images par c dans le même ordre) (plus intuitivement, car le graphe de c descend strictement du point d'abscisse vers celui d'abscisse 1) et **ne décroît pas** non plus sur $\mathbb{R}$ (sinon les réels -1 et 2 auraient leurs images dans le même ordre).

3. Le graphe a l'air de croître, on le montre proprement.

   On utilise encore une identité remarquable

   $$a^{43} - b^{43} = (a-b)\left(a^{42} + ab^{41} + a^2b^{40} + \cdots + a^{40}b^2 + a^{41}b + b^{42}\right)$$

   où le seconde facteur est toujours positif pour a et b de même signe, ce qui montre que notre fonction croît sur $\mathbb{R}^-$ et croît sur $\mathbb{R}^+$, donc croît sur $\mathbb{R}$ (le dernier cas $a \leq 0 \leq b$ donne $a^{43} \leq 0^{43}$ par croissance sur $\mathbb{R}^-$ et $0^{43} \leq b^{43}$ par croissance sur $\mathbb{R}^+$, d'où $a^{43} \leq 0^{43} \leq b^{43}$).

4. Le graphe a l'air de croître toujours, on le montre en introduisant une quantité conjuguée (pour a et b strictement positifs) $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; puisque le dénominateur est positif, les termes $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ et $a-b$ ont même signe, *CQFD.* (Attention à ne pas oublier de traiter le cas où $a=b=0$! Mais cela est facile puisque deux réels égaux sont toujours dans même ordre que leurs images).

   Autre méthode : on a déjà vu (*cf.* question 2) que deux réels positifs étant dans le même ordre que leurs carrés. On applique cela aux réels $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ (avec a et b fixés dans $\mathbb{R}^+$).

5. On utilise la seconde méthode de la question précédente, étant à cours d'identités pour simplifier une différence $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ de racines cubiques. En vertu de l'identité (pour tous réels a et b)

$$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=(a-b)\underbrace{\left[\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}\right]}_{\geq 0 \text{ comme somme de carrés}},$$

   on voit que a^3-b^3 et $a-b$ ont toujours même signe, en particulier pour des racines cubiques. On a donc montré que "élever au cube" et "prendre la racine cubique" croissent toutes les deux.

   Remarque. On notera un point commun entre les questions 4 et 5 : une fonction "bijective" a même monotonie que sa réciproque.

6. On saît bien que l'exponentielle croît (et même de manière particulièremen violente). Pour le montrer proprement, on va comparer le quotient de deux expontielles avec 1. (Pourquoi le quotient par rapport 1 au lieu de la différence par rapport à 0 ? Parce qu'une somme d'exponentielles se comporte bien pire qu'un produit d'exponentielles.) Ainsi, en écrivant $\frac{e^a}{e^b}=e^{a-b}$ (pour tous réels a et b) et en se souvenant des signes $\forall p\geq 0,\ e^p\geq 1$ et $\forall n\leq 0,\ e^n\leq 1$, on obtient l'équivalence $\frac{e^a}{e^b}\geq 1 \iff a\geq b$, ce qui conclut à la croissance cherchée.

7. Deux méthodes (au moins) : écrire $\ln a-\ln b=\ln\left(\frac{a}{b}\right)$ et invoquer l'équivalence $\forall x>0,\ \ln x\geq 0 \iff x\geq 1$, invoquer la croissance de exp appliquée en deux logarithmes (*cf.* remarque liant questions 4 et 5).

8. Idée à retenir devant une fonction de la forme $z\mapsto\frac{az+b}{cz+d}$ (appelée fonction *homographique*) : faire disparaître une variable en faisant apparaître le dénominateur au numérateur. Ainsi, on écrira (pour tout $s\neq 7$)

$$\frac{5-s}{7-s}=\frac{(7-s)-2}{7-s}=\frac{(7-s)}{7-s}-\frac{2}{7-s}=1-\frac{2}{7-s}.$$

   On conclut par composition : la quantité $7-s$ décroît en s (sur chacun des intervalles où elle est définie), donc son inverse $\frac{1}{7-s}$ croît, donc le double $\frac{2}{7-s}$ croît, donc l'opposé $-\frac{2}{7-s}$ décroît, donc le translaté $1-\frac{2}{7-s}$ décroît en s sur chacun des intervalles où elle est définie (ici : $]-\infty,7[$ et $]7,\infty[$).

9. Même méthode : pour tout réel $p\neq 1$, écrire

$$\frac{4p-1}{p-1}=\frac{4(p-1)+4-1}{p-1}=4+\frac{3}{p-1},$$

   puis $p-1$ croît, donc $\frac{3}{p-1}$ décroît, donc $4+\frac{3}{p-1}$ décroît.

   Remarque. En général, la (dé)croissance d'une fonction homographique $z\mapsto\frac{az+b}{cz+d}$est donnée par le signe du déterminant $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$.

10. La seule variation de la fonction considérée se trouve dans le cosinus (r est fixé !). Ainsi, en se plaçant par exemple sur $[0,\pi]$, la fonction cos décroît, donc le multiple $-2r\cos$ croît (car $-2r<0$), donc le translaté $1+r^2-2r\cos$ croît, donc l'inverse $\frac{1}{1+r^2-2r\cos}$ décroît, donc le multiple $\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos}$ décroît (puisque $1-r^2>0$ car $-1<r<1$).

    Sanity check : qui a cherché les racines du trinôme au dénominateur ? Qui a dérivé le dénominateur ou – pire – toute la fraction ?