Travaux dirigés 3

Déterminer les limites (si elles existent!) des suites suivantes indexées par $\mathbb{N}$:

1. $n \mapsto \frac{(-1)^n}{n}$;
2. $x \mapsto \frac{e^x}{x}$;
3. $\lambda \mapsto \frac{\ln\lambda+2}{\lambda-3}$;
4. $l \mapsto \frac{\sin l}{l^2}$;
5. $\Xi \mapsto \frac{\Xi+1}{2\Xi-7}$;
6. $p \mapsto \frac{p^2-18}{e^p+\sqrt{p}}$;
7. $y \mapsto \frac{7y^2+\sin y}{3(y+2)^2\cos\left(y\frac{\pi}{5}\right)}$;
8. $\gamma \mapsto \begin{cases} \frac{2\gamma^2+\ln\gamma}{1+\gamma-\gamma^2} & \textit{lorsque } \gamma \textit{ est pair} \\ \frac{\sin\gamma+2e^\gamma}{e^\gamma-\sqrt{\gamma}} & \textit{quand } \gamma \textit{ est impair} \end{cases}$;
9. $\psi \mapsto \frac{1}{\sqrt{\psi^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{\psi^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{\psi^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{\psi^2+\psi}}$;
10. *la suite définie par* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 4$ *et* $u_0 = 1$.

Solution rapide.

On pense bien sûr à vérifier que le dénominateur des fractions qui apparaissent est non nul à partir d'un certain rang.

1. $(-1)^n$ est bornée (par 1), $\frac{1}{n}$ tend vers 0, donc le produit tend vers 0.
2. Par croissance comparée, $\frac{x^1}{e^{1\times x}}$ tend vers 0 et même vers 0^+ puisque la fraction est positive, donc son inverse $\frac{e^x}{x}$ tend vers ∞.
3. On factorise par ce qui pilote afin de négliger proprement ce qui est négligeable :
$$\frac{\ln\lambda+2}{\lambda-3} = \frac{\ln\lambda}{\lambda}\frac{1+\frac{2}{\ln\lambda}}{1-\frac{3}{\lambda}}.$$
La fraction de droite tend vers $\frac{1+0}{1-0} = 1$, celle de gauche vers 0 d'après les croissance comparées. Le produit est donc convergente de limite nulle.
4. $\sin l$ est bornée (par 1) et $\frac{1}{l^2}$ tend vers 0, donc le produit tend vers 0.
5. On factorise par ce qui pilote en haut et en bas, ce qui revient ici à simplifier la fraction $\frac{\Xi+1}{2\Xi-7}$ par Ξ ; il reste $\frac{1+\frac{1}{\Xi}}{2-\frac{7}{\Xi}}$ qui tend vers $\frac{1+0}{2-0} = \frac{1}{2}$.
6. $\frac{p^2-18}{e^p+\sqrt{p}} = \frac{p^2}{e^p}\frac{1-\frac{18}{p^2}}{1+\frac{p^{1/2}}{e^p}}$; la fraction de droite tend vers $\frac{1-0}{1+0}$ (utiliser les croissances comparées pour le dénominateur), celle de gauche vers 0 (par les croissances comparées), donc le produit tend vers $0 \times 1 = 0$.
7. Prendre le soin de vérifier que le dénominateur $\cos\left(y\frac{\pi}{5}\right)$ ne s'annule jamais[1]. Alors, simplifiant par le pilote y^2, on obtient $\frac{7y^2+\sin y}{3(y+2)^2\cos\left(y\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{7+\frac{\sin y}{y^2}}{3\left(1+\frac{2}{y}\right)^2}\frac{1}{\cos\left(y\frac{\pi}{5}\right)}$. La fraction de gauche tend vers $\frac{7+0}{3(1+0)^2}$, mais celle de droite n'a pas de limite (elle est périodique non constante). Ainsi, la suite étudiée diverge.
8. D'une part, $\frac{2\gamma^2+\ln\gamma}{1+\gamma-\gamma^2} = \frac{2+\frac{\ln\gamma}{\gamma^2}}{\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\gamma}-1} \xrightarrow{\gamma\infty} \frac{2+0}{0+0-1} = -2$ (utilisée les croissances comparées pour $\frac{\ln\gamma}{\gamma^2}$), d'autre part $\frac{\sin\gamma+2e^\gamma}{e^\gamma-\sqrt{\gamma}} = \frac{\frac{\sin\gamma}{e^\gamma}+2}{1-\frac{\gamma^{1/2}}{e^\gamma}} \xrightarrow{\gamma\infty} \frac{0+2}{1-0} = 2$ ($\sin\gamma$ est bornée et $\frac{1}{e^\gamma}$ tend vers 0), donc la suite étudiée ne peut converger, ayant deux sous-suites convergentes vers deux valeurs distinctes (comme $h \mapsto (-1)^h$).

[1] Faire un dessin pour voir que les cinq valeurs que prend ce cosinus sont non nulles. Proprement, si $\cos\left(y\frac{\pi}{5}\right)$ était nul, l'argument $y\frac{\pi}{5}$ serait un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$, mettons $y\frac{\pi}{5} = z\frac{\pi}{2}$, d'où $2y = 5z$ avec un entier pair à gauche et un entier impair à droite, ce qui est une contradiction.

9. On encadre chaque terme de la somme (à ψ fixé) par le dernier (qui est le plus petit) et le premier (qui est le plus grand). En sommant ces inégalités, il vient

$$\frac{\psi}{\sqrt{\psi^2+\psi}} \leq \frac{1}{\sqrt{\psi^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{\psi^2+\psi}} \leq \frac{\psi}{\sqrt{\psi^2+1}}.$$

Le terme de gauche vaut (après simplification par ψ) $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\psi}}}$ et tend donc vers 1, celui de droite vaut $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\psi^2}}}$ qui tend aussi vers 1. D'après le théorème des gendarmes, la somme tend vers 1.

10. On a pour tout entier $n > 0$ l'inégalité $u_{n+1} = 3u_n - 4 \leq 3u_n$, d'où par récurrence $u_n \leq 3^{n-1}u_1 = -3^{n-1}$; or, ce dernier terme tend vers $-\infty$, donc la suite u aussi.

    Retrouvons ce résultat en explicitant le terme générale de cette suite dite *arithmético-géométrique*. La bonne idée pour se ramener à du connu est de se débarrasser de la constante (ici -4) en soustrayant une suite solution particulière – autant la prendre constante pour faire simple. En notant l un réel vérifiant la relation (de récurrence) $l = 3l - 4$ (ce qui équivaut à $l = 2$), on trouve par soustraction $u_{n+1} - l = 3(u_n - l)$ pour tout entier $n \geq 0$, de sorte que la suite $(u_n - l)$ est géométrique, d'où (à $n \in \mathbb{N}$ fixé) $u_n - l = 3^n (u_0 - l)$ et $u_n = 2 - 3^n$ qui diverge bien vers $-\infty$.