# Travaux dirigés 2

*Expliciter le terme général des suites suivantes $u$, $\tau$ et $\Gamma$, chacune définie par ses deux premiers termes et une relation de récurrence :*

1. $\forall a \in N,\ u_{a+1} = u_{a+2} - 2u_a$ *avec* $(u_1, u_0) = (0, 3)$ *;*
2. $\forall \lambda \in N,\ \sqrt{3}\tau_{\lambda+1} = \frac{\tau_{\lambda+2}}{2} + 2\tau_\lambda$ *où* $\left(\sqrt{3}\tau_0, \tau_1\right) = (1, 2)$ *;*
3. $\forall \sigma \in N,\ \Gamma_\sigma = -\frac{\Gamma_{\sigma+2}}{9} - \frac{2}{3}\Gamma_{\sigma+1}$ *et* $(\Gamma_0, \Gamma_1) = (-2, 3)$.

**Solution rapide.**

1. Le polynôme caractéristique vaut (en notant $X$ l'indéterminée) $X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$, donc $u_a$ est pour $a \in \mathbb{N}$ de la forme $C(-1)^a + C'2^a$ où $C$ et $C'$ sont des complexes à trouver grâce au conditions initiales $(3, 0) = (u_0, u_1) = (C + C', 2C' - C)$, d'où $(C, C') = (2, 1)$ et
$$\forall b \in \mathbb{N},\ u_b = 2(-1)^b + 2^b.$$
2. On exprime le polynôme caractéristique (dont on note $t$ l'indéterminée) $t^2 - 2\sqrt{3}t + 4 = \left(t - \sqrt{3}\right)^2 + 1 = \left(t - \sqrt{3} - i\right)\left(t - \sqrt{3} + i\right)$, lequel a deux racines complexes conjuguées $\sqrt{3} \pm i = 2e^{\pm\frac{\pi}{6}i}$, ce qui permet d'écrire pour tout $g$ entier naturel $\tau_g = 2^g\left(A\cos\left(g\frac{\pi}{6}\right) + B\sin\left(g\frac{\pi}{6}\right)\right)$ où $A$ et $B$ sont des complexes vérifiant $(1, 2) = \left(\sqrt{3}\tau_0, \tau_1\right) = \left(\sqrt{3}A, 2A\frac{\sqrt{3}}{2} + 2B\frac{1}{2}\right) = \left(A\sqrt{3}, A\sqrt{3} + B\right)$, d'où $(A, B) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$ et
$$\forall \mu \in \mathbb{N},\ \tau_\mu = 2^\mu\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\left(\mu\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\mu\frac{\pi}{6}\right)\right).$$
3. Factoriser le polynôme caractéristique (en l'indéterminée $K$) $K^2 + 6K + 9 = (K+3)^2$ donne une racine $-3$ double, d'où des complexes $\xi$ et $\nu$ tels que pour tout $d \in \mathbb{N}$ on ait $\Gamma_d = (-3)^d(\xi + \nu d)$. Évaluer en 0 et 1 donne $(-2, 3) = (\Gamma_0, \Gamma_1) = (\xi, -3(\xi + \nu))$, d'où $(\xi, \nu) = (-2, 1)$ et
$$\forall \beta \in \mathbb{N},\ \Gamma_\beta = (-3)^\beta(\beta - 2).$$