Travaux dirigés 11

1 Rappels sur les séries

Définition. *Une* série *est une suite de la forme* $(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)_{n \geq 1}$ *pour une certaine suite* (u_n) *appelée* terme général *de la série. (Au lieu de 1, on peut démarrer à 0 ou à n'importe quel entier.)*

On pourra désigner abusivement une série $\left(\sum_{n=1}^{N} u_n\right)_{N \geq 1}$ *par* $\sum u_n$.

Les sommes partielles *d'une série* $\sum u_n$ *sont les sommes* $\sum_{n=1}^{N} u_n$ *pour* N *variant.*

On dit qu'une série converge *si la suite de ses sommes partielles converge.*

Remarque télescopique. Toute suite est une série : écrire $u_n = \sum_{i=1}^{n} (u_i - u_{i-1})$ en posant $u_0 := 0$.

Séries de références.
séries gométriques : pour λ complexe, la série $\sum \lambda^n$ converge ssi $|\lambda| < 1$.
série de Riemann : pour α réel, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

Critère de convergence.
Si $a_n = O(b_n)$ et si la série $\sum |b_n|$ converge, alors la série $\sum a_n$ converge.
Si (a_n) est une suite réelle décroissante tendant vers 0, alors la série alternée $\sum (-1)^n a_n$ converge.

Exemples. La série $\sum (-1)^n$ ne converge pas, la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum \frac{1}{n}$ (dite *harmonique*) diverge, la série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge, la série $\sum \frac{\arctan(n^4)}{n\sqrt{n}}$ converge car arctan est bornée et car $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge.

2 Exercice de synthèse

Le but du problème est de montrer l'équivalent suivant, dû à Stirling :

$$n! \overset{n \to \infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

2.1 Stirling à une constante près

On se propose ici de montrer qu'il y a une constante $C > 0$ telle que $n! \sim C\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

1. *Montrer que cela équivaut à la convergence de la suite* $u_n := \ln\left(\frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}\right)$.
2. *Montrer que cela équivaut à la convergence de la série* $\sum (u_{n+1} - u_n)$.
3. *Faire un DL de* $u_{n+1} - u_n$ *à une précision* $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
4. *Conclure.*

Solution proposée.

1. On raisonne par équivalences (logiques) :

$$
\begin{aligned}
& \exists C>0,\ n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \\
\overset{\substack{\text{définition}\\ \text{de } \sim}}{\iff}\quad & \exists C>0,\ \frac{n!}{C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} \longrightarrow 1 \\
\iff\quad & \exists C>0,\ \frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} \longrightarrow C \\
\overset{\substack{\text{définition de}\\ \text{la convergence}}}{\iff}\quad & \text{la suite } \left(\frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}\right) \text{ converge dans } \mathbb{R}_+^* \\
\overset{\substack{\text{continuité de}\\ \ln \text{ et } \exp}}{\iff}\quad & \text{la suite } \left(\ln\left(\frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}\right)\right) \text{ converge dans } \ln\left(\mathbb{R}_+^*\right)=\mathbb{R} \\
\overset{\substack{\text{définition de}\\ \text{la convergence}}}{\iff}\quad & \text{la suite } (u_n) \text{ converge.}
\end{aligned}
$$

2. On raisonne toujours par équivalences :

$$
\begin{aligned}
& \text{la série } \sum (u_{n+1}-u_n) \text{ converge} \\
\overset{\substack{\text{définition de}\\ \text{la convergence}}}{\iff}\quad & \text{la suite } \left(\sum_{n=1}^{N} (u_{n+1}-u_n)\right)_{N\geq 1} \text{ converge} \\
\overset{\substack{\text{remarque}\\ \text{télescopique}}}{\iff}\quad & \text{la suite } (u_{N+1}-u_1)_{N\geq 1} \text{ converge} \\
\overset{u_1 \text{ fixé}}{\iff}\quad & \text{la suite } (u_{N+1}) \text{ converge} \\
\iff\quad & \text{la suite } (u_N) \text{ converge.}
\end{aligned}
$$

3. Tout rentre dans le logarithme et se simplifie :

$$
\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n \quad &= \quad \ln\left(\frac{(n+1)!}{\sqrt{n+1}\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}}\right)-\ln\left(\frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}\right) \\
&\overset{\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b}}{=} \quad \ln\left(\frac{(n+1)!}{\sqrt{n+1}\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}}\frac{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!}\right) \\
&\overset{\substack{\text{simplification}\\ \text{à l'intérieu du } \ln}}{=} \quad \ln\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right) \\
&\overset{\substack{\text{regroupement}\\ \text{des } \frac{n}{n+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}}{=} \quad \ln\left(\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}\right) \\
&\overset{\ln\frac{a}{b^\lambda}=\ln a-\lambda\ln b}{=} \quad 1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&\overset{\substack{\text{le DL, quand } x\longrightarrow 0, \text{ de}\\ \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+O(x^3)}}{=} \quad 1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= \quad 1-\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \quad O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}
$$

4. Puisque $u_{n+1}-u_n=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et que la série $\sum\frac{1}{n^2}$ converge, on en déduit la convergence de la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$, *CQFD.*

2.2 Détermination de la constante

Pour $n\geq 0$ entier, on pose $I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n$ (ce sont les intégrales dites *de Wallis*).

1. *Calculer I_0, I_1 et I_2. Quelles sont les variations de la suite (I_n) ?*
2. *En effectuant une intégration par parties, montrer*
$$\forall n \geq 2,\ I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$
3. *En déduire les identités suivantes pour tout entier $n \geq 0$:*
$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n n!^2} \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad I_{2n+1} = \frac{4^n n!^2}{(2n+1)!}.$$
4. *Établir les équivalents $I_n \sim I_{n+1}$ et $I_{2n} I_{2n+1} \sim \frac{\pi}{4n}$, puis conclure.*

Solution proposée.

1. On a $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 = \frac{\pi}{2}$, puis $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin = [-\cos]_0^{\frac{\pi}{2}} = (-0+1) = 1$ et enfin
$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2\cdot)}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t)\, d(2t).$$
En faisant un changement de variable $u = 2t$, la dernière intégrale devient $\int_0^{\pi} \cos = [\sin]_0^{\pi} = 0$. Il en résulte $I_2 = \frac{\pi}{4}$.
Quant à la monotonie de (I_n), puisque $0 \leq \sin \leq 1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, les puissances $\sin^n(x)$ décroissent (lorsque n croît) en tout point $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ fixé, d'où en intégrant sur ces points la décroissance de (I_n).
2. Pour passer de I_n à I_{n-2}, on fait apparaître un $\sin^{n-2}$: on transforme alors le $\sin^2$ restant en $1-\cos^2$. On obtient ainsi
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos) \times \sin^{n-2} \cos.$$
La première intégrale n'est autre que I_{n-2}. La seconde se transforme par une IPP (intégrer $\sin^{n-2}\cos$ en $\frac{\sin^{n-1}}{n-1}$ et dériver le $-\cos$), d'où l'égalité
$$I_n = I_{n-2} + \left(\left[(-\cos) \frac{\sin^{n-1}}{n-1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \right) = I_{n-2} + 0 - \frac{1}{n-1} I_n.$$
On en déduit $I_{n-2} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) I_n = \frac{n}{n-1} I_n$ et le résultat souhaité.
3. On applique successivement la formule de la question précédente :
$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} I_{2n-4} = \cdots = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{(2n)(2n-2)\cdots 2} I_0.$$
Pour faire apparaître les factorielles souhaitées, on complète au numérateur ce qui manque, à savoir le dénominateur, lequel vaut aussi (factoriser les n facteurs 2) $2^n n!$:
$$I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{(2n)(2n-2)\cdots 2} \frac{(2n)(2n-2)\cdots 2}{(2n)(2n-2)\cdots 2} I_0 = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}.$$
On procède de la même façon pour
$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} I_1 = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$
4. Vus l'encadrement $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$ (découlant de la décroissance des I_n) et l'équivalent $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n \sim I_n$, on en déduit par les gendarmes (diviser l'encadrement qui précède par I_n et faire tendre n vers ∞) l'équivalent $I_n \sim I_{n+1}$.
Vues les formes trouvées à la question précédentes, pas mal de choses vont se simplifier lorsque l'on considère le produit
$$I_{2n} I_{2n+1} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{1}{2n+1} \frac{\pi}{2}.$$

Puisque $I_{2n} \sim I_{2n+1}$ (le quotient $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$ est une sous-suite de $\frac{I_n}{I_{n+1}}$ qui tend vers 1), on en déduit l'équivalent $I_{2n}^2 \sim I_{2n}I_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}\frac{\pi}{2} \sim \frac{\pi}{4n}$. Enfin, en remplaçant I_{2n} par son expression avec des factorielles et en utilisant l'équivalent $n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, on trouve

$$\sqrt{\frac{\pi}{4n}} \sim I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2} \sim \frac{C\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2^{2n}\left[C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]^2}\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2n}}{Cn}\frac{\pi}{2}, \text{ d'où } C \sim \frac{\frac{\sqrt{2n}}{n}\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{\pi}{4n}}} = \sqrt{2\pi},\ \textit{CQFD.}$$