# Cours / travaux dirigés 10

## 1 Du vocabulaire de base

**Rappel.** *Une* équation *est une égalité mettant en jeu certains objets, appelés* inconnues*, qui peut être vraie ou fausse selon les valeurs attribuées aux objets. On parle aussi d'*égalité conditionnelle.

Résoudre *une équation, c'est trouver (toutes!) les valeurs des inconnues qui valident l'égalité en jeu, autrement dit c'est déterminer à quelle(s) condition(s) l'égalité est vérifiée.*

**Exemples.**
$2m+1=0$ est une équation dont l'inconnue est $m$. Elle est vérifiée (dans $\mathbb{R}$) ssi $m=\frac{1}{2}$. Elle n'a donc pas de solutions dans $\mathbb{Z}$, mais elle en admet une seule dans $\mathbb{Q}$.

L'équation $f\circ f=\mathrm{Id}$ a pour inconnue une fonction[1] $f$ . L'identité est toujours solution. Si l'on regarde les solutions $\mathbb{R}^*\longrightarrow\mathbb{R}^*$, on trouve en plus la fonction inverse $x\mapsto\frac{1}{x}$. Il pourait en avoir d'autres.

L'égalité $a^2+b^2=1$ peut être vue comme une équation en les inconnues $a$ et $b$. Elle admet alors quatre solution dans $\mathbb{Z}^2$ (les couples $(0,\pm1)$ et $(\pm1,0)$), mais elle en possède une infinité dans $\mathbb{Q}$ (tout couple de la forme $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)$ avec $t$ rationnel est solution). Cette égalité peut également être vue comme une équation en l'inconnue $a$ en considérant $b$ fixé : on obtient alors une équation du second degré en $a$ dont les (deux) solutions sont $\pm\sqrt{1-b^2}$ pourvu que $1-b^2$ admette une racine carrée (c'est toujours le cas dans $\mathbb{C}$).

L'équation fonctionnelle $\forall x,y\in\mathbb{R},\ f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y)$ en les inconues $f$ et $g$ admet (au moins) la solution $(\cos,\sin)$ d'après la formule d'addition du cosinus.

Toute solution de l'équation $f'=0$ en l'inconnue $f$ (fonction dérivable) est constante sur chacun des invervalles où elle est définie (par exemple, prendre $\pi$ sur $[-1,4]$ et $-e$ sur $[18,42]$). Réciproquement, une telle fonction convient. On a donc bien *toutes* les solutions.

**Définition.** *Une* équation différentielle *est une équation dont l'inconnue est une fonction dérivable et où apparaissent les dérivées de l'inconnue.*

*L'*ordre *d'une équation différentielle est le plus grand entier $n\in\mathbb{N}$ tel que la $n$-ième dérivée de l'inconnue apparaît dans l'équation différentielle.*

*Une équation différentielle est dite* affine *si elle est de la forme*

$$a_nf^{(n)}+a_{n-1}f^{(n-1)}+\cdots+a_2f''+a_1f'+a_0f=s$$

*où $f$ est l'inconnue et $a_n$, $a_{n-1}$, ..., $a_0$, $s$ sont des fonctions. Les $a_i$ sont souvent appelés* coefficients *et $s$ est souvent appelée* second membre*. Lorsque ce dernier est nul, l'équation différentielle est dite* linéaire *(ou* sans second membre*).*

**Exemples.**
$f'=0$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre.
$\sqrt{f''}+e^{\cos\left(f^{(4)}\right)}=\ln\left(1+\sin\left(2^f\right)\right)$ est une équation différentielle d'ordre 4, non affine.
$f''+\omega^2f=\cos$ est (à $\omega$ fixé) une équation différentielle affine du deuxième ordre avec second membre.

## 2 Équations différentielles de référence à savoir résoudre

Dans tous ce qui suit, $f$ est une fonction à valeurs *complexes*[2] définie sur un *intervalle* de $\mathbb{R}$, supposée suffisamment de fois dérivable pour que les égalités la mettant en jeu aient du sens.

[1] on parle alors d'*équation fonctionnelle*
[2] On rappelle au besoin que tout réel est un complexe.

## 2.1 Équation différentielle linéaires du premier ordre à coefficients constants

On a pour commencer l'équivalence

$$f' = 0 \iff f \text{ constante.}$$

Si $f$ venait à être définie sur un ensemble "à trous" (typiquement $\mathbb{R}^*$), elle serait constante sur chacun des intervalles où elle serait définie, d'où autant de constantes (*a priori* distinctes) à considérer. On retiendra donc le memento

*autant de constantes d'intégration que d'intervalles.*

Vient ensuite l'équation différentielle définissant l'exponentielle :

$$f' = f \iff \exists C \in \mathbb{C},\ f = C \exp .$$

Bien sûr, lorsque $f$ est réelle, la constante $C$ est réelle.

Plus généralement, on a pour tout complexe $\lambda$ l'équivalence[3]

$$f' = \lambda f \iff \exists C \in \mathbb{C},\ f = C \exp(\lambda\cdot) .$$

Noter que les cas $\lambda \in \{0, 1\}$ redonnent les deux équivalences précédentes.

Souvent, la résolution d'une équation différentielle fait apparaître des constantes, qui peuvent être obtenues en donnant des valeurs particulières à l'inconnue et à ses dérivées. Le nombre de constantes égale très souvent l'ordre de l'équation (multiplié par le nombre d'intervalles considérés).

**Exemple.** Résoudre $4f' + 7f = 0$ sur $\mathbb{R}^*$. L'égalité équivaut à $f' = -\frac{7}{4}f$, soit à $f = Ce^{-\frac{7}{4}\cdot}$ pour une certaine constante $C$ sur chacun des deux intervalles de $\mathbb{R}^*$. Les solutions sont donc de la forme $t \mapsto \begin{cases} Ae^{-\frac{7}{4}t} & \text{si } t > 0 \\ Be^{-\frac{7}{4}t} & \text{si } t < 0 \end{cases}$ où $A$ et $B$ sont des constantes.

## 2.2 Équations différentielles affines du premier ordre à coefficients et second membre continus

On regarde une équation différentielle de la forme $a_1 f' + a_0 f = s$ où les fonctions $a_1$, $a_0$ et $s$ sont continues. Quitte à diviser par $a_1$ sur un intervalle où celle-ci ne s'annule pas, on se ramène à une équation du type $f' + af = b$ (poser $a := \frac{a_0}{a_1}$ et $b := \frac{s}{a_1}$).

L'idée est alors de chercher à faire apparaître à gauche la dérivée d'un produit $\alpha f' + \alpha' f = (\alpha f)'$. Pour cela,

*on multiplie par $e^A$ où $A$ est une primtive de $a$.*

On obtient alors $\left(e^A f\right)' = e^A f' + A' e^A f = e^A (f' + af) = e^A b$. En intégrant cette égalité entre deux réels $t_0$ et $t$ de l'intervalle où l'on a supposé $f$ défini (on peut car tout est continu, donc intégrable), on obtient $\int_{t_0}^{t} \left(e^A f\right)' = \int_{t_0}^{t} e^A b$. Or, le membre de gauche vaut[4] le crochet $\left[e^A f\right]_{t_0}^{t}$, à savoir $e^{A(t)} f(t)$ moins une constante (on va fixer $t_0$ et faire varier $t$). On pourra donc extraire de cette égalité le réel $f(t)$ en l'exprimant à l'aide de $A$, $b$ et $t_0$ uniquement ; comme $t$ a été choisi arbitrairement, on aura résolu notre équation.

Le facteur $e^A$ nous ayant permis d'intégrer notre équation, on l'appellera *facteur intégrant*.

**Exemple.**

On regarde l'équation $\forall x > 0,\ f'(x) + \frac{2f(x)}{x} = 2$. Une primitive du coefficient en $f$ valant $x \mapsto \int_1^x \frac{2dt}{t} = 2 \ln x$, on multiplie par le facteur intégrant $e^{2 \ln x} = x^2$, ce qui donne

$$\forall x > 0,\ 2x^2 = x^2 f'(x) + 2xf(x) = \frac{d}{dx}\left(x^2 f(x)\right) .$$

[3] le point désigne la fonction identité, de sorte que $e^{\lambda\cdot}$ désigne la fonction $\rho \mapsto e^{\lambda\rho}$

[4] on rappelle que $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$ pour toute fonction $f$ dérivable (de dérivée continue)

En intégrant cette égalité pour $x$ allant de 1 à un réel $X > 0$ donné, on obtient

$$\int_1^X 2x^2 dx = \int_1^X \frac{d}{dx}\left(x^2 f(x)\right) dx = \left[x^2 f(x)\right]_1^X, \text{ d'où } \frac{2}{3}X^3 = X^2 f(X) - Cste.$$

On en déduit $f(X) = \frac{2}{3}X + \frac{Cste}{X^2}$. Puisque le réel $X$ a été choisi arbitrairement dans $\mathbb{R}^{+*}$, on a trouvé une expression pour $f$ (la constante ne dépend pas de $X$).

Si l'on souhaite exprimer la constante, on peut évaluer en 1, ce qui donne $f(1) = 2 + Cste$, d'où $Cste = f(1) - 2$ et la forme générale

$$\forall t > 0,\ f(t) = \frac{2}{3}t + \frac{f(1) - 2}{t^2}.$$

Si l'on avait demandé de résoudre cette équation sur $\mathbb{R}^*$, on aurait trouvé le même résultat sur $\mathbb{R}^{-*}$ mais avec une *autre* constante (montrer qu'elle vaut $f(-1) + 2$).

## 2.3 Équations différentielles affines du second ordre à coefficients constants

Comme pour le premier ordre affine, on se ramène à une équation de la forme $f'' + af' + bf = g$ où $a$ et $b$ sont constants (le second membre $g$ est une fonction quelconque).

En supposant connue une solution particulière $f_0$, faire la différence des équations satisfaites par $f_0$ et une inconnue $f$ donne $(f - f_0)'' + a(f - f_0)' + b(f - f_0) = 0$, ce qui permet de se débarrasser du second membre en considérant $f - f_0$ comme nouvelle inconnue.

On est ainsi ramené à une équation de la forme $f'' + af' + bf = 0$, qui se traite comme les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (à coef constants) en cherchant les racines du polynôme caractéristique $X^2 + aX + b$.

1. Lorsque l'on a deux racines distinctes $\lambda \neq \mu$, alors une fonction $f$ est solution ssi

$$\exists A, B \in \mathbb{C},\ f = Ae^{\lambda\cdot} + Be^{\mu\cdot}.$$

   Noter le parallèle avec les suites solutions de la forme $u_n = A\lambda^n + B\mu^n$.

2. Lorsqu'il y a une racine double $\lambda$, alors une fonction $f$ est solution ssi

$$\exists A, B \in \mathbb{C},\ f = (A + B\cdot)\, e^{\lambda\cdot}.$$

   Noter le parallèle avec les suites solutions de la forme $u_n = (A + Bn)\,\lambda^n$.

3. Lorsque le polynôme caractéristique est réel et admet deux racines complexes conjuguées $\lambda \pm i\omega$ (avec $\lambda$ et $\omega$ réels), alors une fonction réelle sera solution ssi

$$\exists A, B \in \mathbb{R},\ f = e^{\lambda\cdot} \times (A\cos(\omega\cdot) + B\sin(\omega\cdot)).$$

   Noter le parallèle avec les suites solutions de la forme $u_n = \lambda^n (A\cos(n\omega) + B\sin(n\omega))$.

**Exemple.** Résoudre $y'' + 4y = 10\exp$ en l'inconnue $y$.

On commence par chercher une solution particulière. Vu que le second membre comporte de l'exponentielle, on en cherche une avec de l'exponentielle. Quelques tâtonnements montrent que $2\exp$ est solution.

On regarde ensuite la même équation (linéaire) sans second membre. Le polynôme caractéristique $X^2 + 4$ a pour racines $\pm 2i$, donc les solutions sont de la forme $A\cos(2\cdot) + B\sin(2\cdot)$.

Maintenant, si $f$ est solution à l'équation de départ, $f - 2\exp$ est solution à l'équation sans second membre, donc $f - 2\exp$ est de la forme $A\cos(2\cdot) + B\sin(2\cdot)$, d'où

$$f = 2\exp + A\cos(2\cdot) + B\sin(2\cdot) \text{ \textit{pour certaines constantes} } A \text{ \textit{et} } B.$$

Pour trouver ces dernières, on peut évaluer $f$ et $f'$ en 0, ce qui donne $f(0) = 2 + A$ et $f'(0) = 2 + 2B$, d'où $A$ et $B$ en fonction des conditions initiales[5] $f(0)$ et $f'(0)$.

On retiendra de l'exemple ci-dessus l'adage suivant :

*solution affine = solution linéaire + solution particulière.*

[5] Pour comprendre la terminologie, penser $f$ comme une position et (donc) $f'$ comme une vitesse.

# 3 Exercices

*Résoudre les équations différentielles suivantes en l'inconnue $f$ :*

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - 2f(x) = x^2$ *et* $f(0) = 1$ *;*
2. $\forall x > 1,\ \left(x^2-1\right) f'(x) + 2x\ f(x) = 1$ *;*
3. $f' + f \tan = \sin(2\cdot)$ *sur* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *avec* $f(0) = 1$ *;*
4. $f' \tan - f = 0$ *sur* $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ *avec* $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$ *;*
5. $f'' - 5f' + 6f = 0$ *;*
6. $f'' + f' + f = \left(c \mapsto c^3\right)$ *avec* $f(0) = -1$ *et* $f\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = e^{1-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} + \frac{\pi^3}{3\sqrt{3}} - \pi^2 + 6$ *;*
7. $f'' - 2f' + f = \left(t \mapsto \frac{2e^t}{(1+t)^3}\right)$ *(penser à* $\frac{e^t}{1+t}$*).*

**Solution proposée.**

1. Une primitive du coefficient en $f$ étant $x \mapsto \int_0^x (-2) = -2x$, on multiplie (à $x$ réel fixé) par le facteur intégrant $e^{-2x}$, ce qui donne $\frac{d}{dx}\left(e^{-2x} f(x)\right) = e^{-2x} x^2$. Cette égalité étant valide pour tout réel $x$, on peut l'intégrer pour $x$ allant de $0$ à un autre réel $t$ donné, ce qui donne $\int_0^t \frac{d}{dx}\left(e^{-2x} f(x)\right) dx = \int_0^t e^{-2x} x^2 dx$. La première intégrale vaut $e^{-2t} f(t)$ moins une constante, la seconde s'évalue par IPP successives (la flèche indique le sens de dérivation) : $\begin{array}{cccc} \xrightarrow{\hspace{3em}} & & & \\ x^2 & 2x & 2 & 0 \\ e^{-2x} & -\frac{1}{2}e^{-2x} & \frac{1}{4}e^{-2x} & -\frac{1}{8}e^{-2x} \\ \xleftarrow{\hspace{3em}} & & & \end{array}$. On trouve $\int_0^t e^{-2x} x^2 dx = \left[\frac{-x^2}{2} e^{-2x} - \frac{2x}{4} e^{-2x} - \frac{2}{8} e^{-2x}\right]_0^t = -\frac{e^{-2t}}{4}\left(2t^2 + 2t + 1\right) - Cste.$

   Ainsi, l'égalité des intégrales devient $e^{-2t} f(t) = -\frac{e^{-2t}}{4}\left(2t^2 + 2t + 1\right) + Cste$, d'où $f(t) = Cste \times e^{2t} - \frac{2t^2+2t+1}{4}$. Vue la condition initiale, évaluer en $0$ donne $1 = Cste - \frac{1}{4}$, d'où $Cste = \frac{5}{4}$. Le choix du réel $t$ étant arbitraire, on peut conclure :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{5}{4} e^{2t} - \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} t - \frac{1}{4}.$$

   Une autre méthode consiterait à trouver une solution particulière et à lui ajouter une solution de l'équation sans second membre associée. Cette dernière s'écrit $f' - 2f = 0$, soit $f' = 2f$, ou encore $f = Ce^{2\cdot}$ pour une constante complexe $C$ (noter qu'on retrouve le premier terme $Cste \cdot e^{2t}$ de la solution ci-dessus). Quant à la solution particulière, vu que le second membre est un trinôme, on peut essayer de chercher un trinôme, disons $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$. Par équivalences, un tel $f$ sera solution ssi

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 = f'(x) - 2f(x) = (2ax + b) - 2\left(ax^2 + bx + c\right) \\ \iff\quad & \forall x \in \mathbb{R},\ (2a+1)x^2 + 0x + 0 = 0x^2 + (2a - 2b)x + (b - 2c) \\ \underset{\text{des coefficients}}{\overset{\text{identification}}{\iff}}\quad & \begin{cases} 2a + 1 = 0 \\ 0 = 2a - 2b \\ 0 = b - 2c \end{cases} \\ \iff\quad & a = -\frac{1}{2} \text{ et } b = a = -\frac{1}{2} \text{ et } c = \frac{b}{2} = -\frac{1}{4} \\ \iff\quad & f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

   On retrouve ainsi le seconde terme de la solution générale déjà trouvée. Par somme, la solution de l'équation de départ est de la forme voulue et l'on explicite la constante comme dans la première solution.

2. Ici, pas besoin de facteur intégrant, on a déjà la dérivée d'un produit $\frac{d}{dx}\left[\left(x^2-1\right) f(x)\right] = 1 = \frac{d}{dx}(x)$, ce qui équivaut à la nullité de la dérivée de $x \mapsto \left(x^2-1\right) f(x) - x$, autrement à la constance de cette dernière (on est bien sur un intervalle), c'est-à-dire à

$$\forall x > 1,\ f(x) = \frac{x + Cste}{x^2 - 1}.$$

3. Une primitive du coefficient en $f$ valant $\int_0^{\cdot} \tan = -\int_0^{\cdot} \frac{\cos'}{\cos} = -\ln\cos$, le facteur intégrant vaut $e^{-\ln\cos} = \frac{1}{\cos}$, ce qui donne

$$\left(\frac{1}{\cos}f\right)' = \frac{\sin(2\cdot)}{\cos} = \frac{2\sin\cos}{\cos} = 2\sin = (-2\cos)'.$$

Ainsi, la fonction $\frac{f}{\cos} + 2\cos$ est de dérivée nulle sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc y est constante, donc vaut sa valeur en 0, à savoir $\frac{f(0)}{\cos 0} + 2\cos 0 = 3$, d'où

$$f = 3\cos - 2\cos^2 = 3\cos - 1 - \cos(2\cdot).$$

4. On réécrit sous la forme $f' - \frac{\cos}{\sin}f = 0$. Une primtive du coefficient en $f$ étant $\int_1^{\cdot} -\frac{\cos}{\sin} = -\int_1^{\cdot} \frac{\sin'}{\sin} = -\ln\sin - Cste$, le facteur intégrant vaut $e^{-\ln\sin} = \frac{1}{\sin}$. On obtient ainsi $\left(\frac{f}{\sin}\right)' = 0$, de sorte que $\frac{f}{\sin}$ est constante sur l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, donc y vaut sa valeur en $\frac{\pi}{6}$, à savoir $\frac{1}{\frac{1}{2}}$. On en déduit $f = 2\sin$.

5. Le polynôme caractéristique vaut $X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$, donc les solutions sont de la forme ($A$ et $B$ sont des constantes complexes)

$$t \mapsto Ae^{2t} + Be^{3t}.$$

6. Le polynôme caractéristique vaut $X^2 + X + 1 = (X - j)\left(X - j^2\right)$ avec $j := e^{\frac{2\pi i}{3}}$, donc a pour racines $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Les solutions linéaires sont par conséquent de la forme ($A$ et $B$ sont des constantes complexes)

$$t \mapsto e^{-\frac{t}{2}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right).$$

Les solutions affines s'obtiennent en ajoutant une solution particulière aux solutions linéaires. Vu le second membre, on cherche une solution particulière polynomiale. Vu le degré, essayons un polynôme du troisième degré. Substituer dans l'équation et résoudre le système fournit les coefficients : la fonction $c \mapsto c^3 - 3c^2 + 6$ est solution.

Finalement, les solutions sont de la forme

$$t \mapsto t^3 - 3t^2 + 6 + e^{-\frac{t}{2}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right).$$

La condition initiale $f(0) = -1$ s'écrit $-1 = -2 + A$, d'où $A = 1$, celle $f\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = e^{1-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} + \frac{\pi^3}{3\sqrt{3}} - \pi^2 + 6$ devient $e^{1-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} + \frac{\pi^3}{3\sqrt{3}} - \pi^2 + 6 = \frac{\pi^3}{3\sqrt{3}} - \pi^2 + 6 + e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}\left(A\cos\frac{\pi}{2} + B\sin\frac{\pi}{2}\right)$, d'où $Be^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} = e^{1-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}$ et $B = e$. Finalement, il n'y a qu'une seule solution :

$$t \mapsto t^3 - 3t^2 + 6 + e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + e\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right).$$

7. Le polynôme caractéristique de l'équation sans second membre vaut $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$, d'où les solutions associées : $t \mapsto (A + Bt)e^t$ pour des constantes $A$ et $B$. Le plus dur est de trouver une solution particulière. L'indication de l'énoncée n'est pas là pour rien : en posant $p : t \mapsto \frac{e^t}{1+t}$, on trouve $p'(t) = \frac{te^t}{(1+t)^2}$ puis $p''(t) = e^t\frac{1+t^2}{(1+t)^3}$, d'où pour tout réel $t$ l'égalité

$$p''(t) - 2p'(t) + p(t) = \frac{e^t}{(1+t)^3}\underbrace{\left[\left(1+t^2\right) - 2t(1+t) + (1+t)^2\right]}_{=2}, \text{ \textit{CQFD}.}$$

Finalement, les solutions sont de la forme

$$t \mapsto e^t\left(A + Bt + \frac{e^t}{(1+t)^2}\right).$$