Partiel intégration

On notera $\lfloor r \rfloor$ (où r est réel) le plus grand entier inférieur ou égal à r.

On pourra vérifier que $[\ln \circ f]' = \frac{f'}{f}$ pour toute fonction dérivable $f > 0$ et que $\frac{\sigma^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sigma^2}} - \frac{1-\sigma^2}{\sqrt{1-\sigma^2}}$ pour tout réel $\sigma \in]0, 1[$. La dérivée de arcsin peut se retrouver en dérivant l'égalité $\sin \circ \arcsin = \mathrm{Id}$.

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-1}^{3} \lfloor x \rfloor \, dx$ *;*
2. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan$ *;*
3. $\int_1^4 \ln$ *;*
4. $\int_2^3 \frac{2\delta - 1}{\delta - 1} d\delta$ *;*
5. $\int_0^1 \sqrt{1 - a^2} da$ *(interpréter géométriquement).*

Partiel intégration

On pourra vérifier que $[\ln \circ f]' = \frac{f'}{f}$ pour toute fonction dérivable $f > 0$. La dérivée de arctan peut se retrouver en dérivant l'égalité $\tan \circ \arctan = \mathrm{Id}$.

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-2}^{1} \sqrt{x^6} dx$ *;*
2. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan}$ *;*
3. $\int_1^e f \ln f \; df$ *;*
4. $\int_0^b \left(\frac{H-h}{b} j + h \right) dj$ *avec* $b, h, H > 0$ *réels (interpréter géométriquement) ;*
5. $\int_0^1 \frac{2a^2 - 3}{1 + a^2} da.$

Solution rapide proposée.

1. La fonction $\lfloor\cdot\rfloor$ est constante sur tout intervalle du type $[k,k+1[$ avec k entier : elle y vaut k, d'où $\int_k^{k+1}\lfloor\cdot\rfloor=\int_k^{k+1}k=k\,[\alpha]_{\alpha=k}^{k+1}=k$. En utilisant Chasles pour se ramener à de tels intervalles, on trouve

$$\int_{-1}^{3}\lfloor x\rfloor\,dx=\left(\int_{-1}^{0}+\int_{0}^{1}+\int_{1}^{2}+\int_{2}^{3}\right)\lfloor x\rfloor\,dx=-1+0+1+2=2.$$

2. On reconnaît une dérivée logarithmique (identité rappelée) :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin}{\cos}=-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos'}{\cos}=-\left[\ln\circ\cos\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\left(-\ln 2-\ln 1\right)=\ln 2.$$

3. Une intégration par partie conclut (dériver le logarithme) :

$$\int_1^4\ln\gamma\ d\gamma\overset{\text{IPP}}{=}\left[\gamma\ln\gamma\right]_1^4-\int_1^4\frac{1}{\gamma}\gamma d\gamma=(4\ln 4-0)-(4-1)=8\ln 2-3.$$

4. On tue une variable dans la fraction, puis on reconnaît une dérivée logarithmique :

$$\int_2^3\frac{2\delta-1}{\delta-1}d\delta=\int_2^3\left(2+\frac{1}{\delta-1}\right)d\delta=2\int_2^3 d\delta+\int_2^3\frac{d\left(\delta-1\right)}{\delta-1}=2\left(3-2\right)+\left[\ln\left(\delta-1\right)\right]_2^3=2+\ln 2.$$

5. On fait une IPP pour obtenir une équation en l'intégrale cherchée (et on utilise l'identité rappelée) :

$$\begin{aligned}I\quad:\quad&=\int_0^1 1\sqrt{1-a^2}da\overset{\text{IPP}}{=}\left[a\sqrt{1-a^2}\right]_0^1-\int_0^1 a\frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}da=0+\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}-\frac{1-a^2}{\sqrt{1-a^2}}\right)da\\&=\left[\arcsin a\right]_0^1-\int_0^1\sqrt{1-a^2}da=\frac{\pi}{2}-I,\text{ d'où }2I=\frac{\pi}{2}\text{ et }I=\frac{\pi}{4}\text{ (aire d'un quart du cercle unité).}\end{aligned}$$

Pour ceux qui rechignent à intégrer $a\mapsto\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$ sur $[0,1]$ (c'est légitime vu que la fonction intégrée n'est pas définie en 1), remplacer dans ce qui précède 1 par un réel $r\in[0,1[$ donne l'égalié $I\left(r\right)=r\sqrt{1-r^2}-\arcsin r-I\left(r\right)$, d'où le même résultat en faisant tendre r vers 1 (tout est continu).

Solution rapide proposée.

1. On découpe l'intégrale en deux bouts selon $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$ puis on revient à la définition de $\sqrt{x^6}=\left|x^3\right|$:

$$\int_{-2}^1\sqrt{x^6}dx=\int_{-2}^0-x^3dx+\int_0^1 x^3dx=\left[-\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^0+\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{2^4}{4}+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}=4,25.$$

2. On reconnaît une dérivée logarithmique (identité rappelée) :

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos}{\sin}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin'}{\sin}=\left[\ln\circ\sin\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\left(\ln\frac{\sqrt{3}}{2}-\ln\frac{1}{2}\right)=\frac{\ln 3}{2}.$$

3. Une intégration par partie conclut (dériver le logarithme) :

$$\int_1^e f\ln f\ df=\left[\frac{f^2}{2}\ln f\right]_{f=1}^e-\int_1^e\frac{f^2}{2}\frac{1}{f}df=\left(\frac{e^2}{2}-0\right)-\left[\frac{f^2}{4}\right]_{f=1}^e=\frac{e^2+1}{4}.$$

4. On tue une variable dans la fraction, puis on reconnaît la dérivée de arctan :

$$\int_0^1\frac{2a^2-3}{1+a^2}da=\int_0^1\left(2-\frac{5}{1+a^2}\right)da=\left[2a\right]_{a=0}^1-5\left[\arctan\right]_0^1=2-\frac{5\pi}{4}.$$

5. On calcule l'aire d'un trapèze rectangle de base b et de hauteurs h et H :

$$\begin{aligned}\int_0^b\left(\frac{H-h}{b}j+h\right)dj&=\frac{H-h}{b}\int_0^b j\ dj+h\int_0^b dj=\frac{H-h}{b}\left[\frac{j^2}{2}\right]_{j=0}^b+h\left[j\right]_{j=0}^b\\&=\frac{H-h}{b}\frac{b^2}{2}+hb=\frac{1}{2}b\left(H+h\right),\text{ c'est bien la formule connue.}\end{aligned}$$