# Partiel analyse

Chaque exercice est indicativement sur six points.

1. Donner une expression simple du terme général de chacune des deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par
$$\begin{aligned}(a_1,a_0) &= (1,0) \text{ et } \forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n,\\ (b_2,b_1) &= (0,1) \text{ et } \forall n\in\mathbb{N},\ 4b_{n+3}=b_{n+2}+4b_{n+1}.\end{aligned}$$
2. Déterminer les trois limites $\lim_{c\to-\infty}\frac{e^{-\sqrt[3]{c}}}{c^{18}}$, $\lim_{\Sigma\to\infty}\frac{\Sigma^{42}+\ln\Sigma}{e^{\Sigma}-\sqrt{\Sigma}}$ et $\lim_{\mu\to 3}\frac{\mu^3-\mu^2-21\mu+45}{\mu^2-6\mu+9}$.
3. Donner, pour chacune des trois fonctions suivantes, les intervalles où elles sont monotones (et préciser alors le sens de monotonie) : $b\mapsto\left(\frac{7e^b-1}{2e^b+3}\right)^4$, $\frac{\cos}{2}+\frac{\sqrt{3}\sin}{2}$ et $\ln\left(1+\sqrt{\frac{1}{\cos+\sin}}\right)$.
4. Donner l'ensemble de définition et la dérivée logarithmique de la fonction $\cos^{\sin}\times\sin^{\left(\cos^{\tan}\right)}$. (On rappelle que la dérivée logarithmique d'une fonction $f$ est $\frac{f'}{f}$.)

**Solution proposée.**

1. $(a_n)$ et $(b_{n+1})$ sont des suites récurrentes linéaires à coefficients constants. Leurs polyômes caractéristiques sont respectivement $X^2-X-1=\left(X-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ et $4X^2-X+4=4\left(X-\frac{1+\sqrt{65}}{8}\right)\left(X-\frac{1-\sqrt{65}}{8}\right)$. On peut donc écrire pour certains réels $A,B,C,D$
$$\begin{aligned}\forall n &\in \mathbb{N},\ a_n=A\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n+B\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \text{ et}\\ \forall n &\in \mathbb{N},\ b_{n+1}=C\left(\frac{1+\sqrt{65}}{8}\right)^n+D\left(\frac{1-\sqrt{65}}{8}\right)^n.\end{aligned}$$
Les conditions initiales donnent d'une part $(1,0)=(a_1,a_0)=\left(\frac{A+B}{2}+\sqrt{5}\frac{B-A}{2},A+B\right)$, *i. e.* $(A,B)=\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, d'autre part $(0,1)=(b_2,b_1)=\left(\frac{C+D}{8}+\sqrt{65}\frac{C-D}{8},C+D\right)$, *i. e.* $(C,B)=\left(\frac{\sqrt{65}-1}{2\sqrt{65}},\frac{\sqrt{65}+1}{2\sqrt{65}}\right)$.
2. On écrit $\frac{e^{-\sqrt[3]{c}}}{c^{18}}=\frac{e^{\sqrt[3]{-c}}}{\left(\sqrt[3]{-c}\right)^{3\times 18}}$ de la forme $\frac{e^{\square}}{\square^n}$ où $\square\longrightarrow\infty$ et $n$ entier ; par croissance comparée, le quotient tend vers $\infty$.

   On divise tout par le terme pilote $e^{\Sigma}$, ce qui donne $\frac{\frac{\Sigma^{42}}{e^{\Sigma}}+\frac{\ln\Sigma}{e^{\Sigma}}}{1-\frac{\sqrt{\Sigma}}{e^{\Sigma}}}$ : par croissance comparée, le numérateur tend vers $0+0$ et le dénominateur vers $1-0$, donc la fraction a une limite nulle.

   C'est une forme indéterminée. On peut factoriser le dénominateur au numérateur en posant la division euclidienne
$$\mu^3-\mu^2-21\mu+45=\left(\mu^2-6\mu+9\right)(\mu+5)$$
(la fraction se simplifie alors en $\mu+5$ et tend clairement vers 8), ou bien appliquer de l'Hôpital à deux reprises :
$$\frac{\mu^3-\mu^2-21\mu+45}{\mu^2-6\mu+9}\leadsto\frac{3\mu^2-2\mu-21}{2\mu-6}\leadsto\frac{6\mu-2}{2}=3\mu-1\longrightarrow 8.$$
3. La quantité $\frac{7E-1}{2E+3}=\frac{\frac{7}{2}(2E+3)-\frac{23}{2}}{2E+3}=\frac{7}{2}-\frac{23}{2}\frac{1}{2E+3}$ croît (en $E$) sur $\mathbb{R}^+$, donc (puisque exp croît) la composée $\frac{7\exp-1}{2\exp+3}$ croît sur tout $\mathbb{R}$. Puisqu'elle s'annule en $-\ln 7$ (et vu la monotonie de $a\mapsto a^4$), elle décroît avant $-\ln 7$ et croît après.

   On reconnaît les lignes usuelles :
$$\frac{\cos\theta}{2}+\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{2}=\cos\theta\times\cos\frac{\pi}{3}+\sin\theta\times\sin\frac{\pi}{3}=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$$

qui décroît sur chaque intervalle $\left[\frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{4\pi}{3}+2k\pi\right]$ et croît sur chaque $\left[-\frac{2\pi}{3}+2k\pi, \frac{\pi}{3}+2k\pi\right]$ (avec $k$ décrivant $\mathbb{Z}$).

La racine étant $\geq 0$, le domaine de définition est celui où le dénominateur $\cos a - \sin a = \sqrt{2}\cos\left(a+\frac{\pi}{4}\right)$ est $> 0$. On a alors croissance sur $\left[-\frac{3\pi}{4}+2k\pi, -\frac{\pi}{4}+2k\pi\right]$ et décroissance sur $\left[-\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{\pi}{4}+2k\pi\right]$ (avec $k$ décrivant $\mathbb{Z}$).

4. Les puissances $\cos^?$ sont définie là où la base $\cos \geq 0$, de même la puissance $\sin^?$ est définie là où $\sin \geq 0$. Vu les lieux d'annulation de cos, sin et tan, aucune forme $0^0$ ne peut apparaître. Ainsi, la fonction est définie sur chaque intervalle $\left[2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ (où $k$ décrit $\mathbb{Z}$). Elle est dérivable à l'intérieur (un doute aux bornes) et y a pour dérivée

$$\sin^{\left(\cos^{\tan}\right)} \times \left[\cos^{\sin}\right]' + \left[\sin^{\left(\cos^{\tan}\right)}\right]' \times \cos^{\sin} = \sin^{\left(\cos^{\tan}\right)} \left[e^{\sin\times\ln\cos}\right]' + \left[e^{e^{\tan\times\ln\cos}\times\ln\sin}\right]' \times \cos^{\sin}.$$

Le premier terme (divisé par la fonction) vaut

$$\frac{\sin^{\cos^{\tan}} \times \left(\sin' \times \ln\cos + \sin \times \frac{\cos'}{\cos}\right) \times \cos^{\sin}}{\cos^{\sin} \times \sin^{\cos^{\tan}}} = \cos \times \ln\cos - \frac{\sin^2}{\cos} = \cos \times \left(\ln\cos - \tan^2\right)$$

et le second (divisé par la fonction) vaut de même

$$\begin{aligned}
\frac{\left[e^{\tan\times\ln\cos} \times \ln\sin\right]' \times \sin^{\left(\cos^{\tan}\right)} \times \cos^{\sin}}{\cos^{\sin} \times \sin^{\cos^{\tan}}} &= [\tan \times \ln\cos]' \times \cos^{\tan} \times \ln\sin + \cos^{\tan} \times [\ln\sin]' \\
&= \cos^{\tan} \times \left(\left(\frac{1}{\cos^2} \times \ln\cos + \frac{\sin}{\cos} \times \frac{-\sin}{\cos}\right) \times \ln\sin + \frac{\cos}{\sin}\right) \\
&= \cos^{\tan} \times \left(\left(\frac{\ln\cos}{\cos^2} - \tan^2\right) \times \ln\sin + \frac{\cos}{\sin}\right).
\end{aligned}$$

Sommer donne le résultat.