Partiel analyse 1

On pourra utiliser librement utiliser le théorème suivant (dit **des valeurs intermédiaires**) :
Soit f continue sur un segment $[a,b]$. Si $f(a)\,f(b)<0$, alors f s'annule sur un point de l'intérieur $]a,b[$.
Le barême est indicatif.

Exercice 1. (3 points) *Déterminer les ensembles de définition et les dérivées des fonctions suivantes d'une variable réelle :*

1. $a \mapsto e^{a^2\cos a}\sqrt{a-1}^{\ln a}$;
2. $\varpi \mapsto \ln\left(\sin\varpi - \frac{1}{1-|\cos\varpi|} - e^{\sqrt[3]{\tan\varpi}}\right)$.

Exercice 2. (3 points) *Déterminer toutes les applications $f:\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telles que*

$$\forall\zeta\geq 0,\ \ f(f(\zeta)) = 6\zeta - f(\zeta)\,.$$

(On pourra introduire des suites réelles (u_n) telles que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n)$.)

Exercice 3. *(4 points)* On pose pour tout x réel $P(x) := (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ où a,b,c,d sont quatre de vos réels préférés – imposés *deux à deux distincts.*

1. *Montrer que* $\frac{\partial}{\partial z}\left[e^{42z}P(z)\right]$ *s'annule trois fois (au moins).*
2. *Donner les variations de* $\frac{P'}{P}+42$.
3. *Montrer que* $\frac{P'}{P}+42$ *s'annule quatre fois (au moins).*
4. *Relier les questions 1 et 3.*

Partiel analyse 2

1. On pourra utiliser librement utiliser le théorème suivant (dit **des valeurs intermédiaires**) :

   Soit f continue sur un segment $[a,b]$. Si $f(a)\,f(b)<0$, alors f s'annule sur un point de l'intérieur $]a,b[$.

Exercice 1. (3 points) *Déterminer les ensembles de définition et les dérivées des fonctions suivantes d'une variable réelle :*

1. $a \mapsto e^{a^3\sin a}\sqrt{a}^{\ln(a-1)}$;
2. $\varpi \mapsto \ln\left(\cos\varpi - \frac{1}{1-e^{-\varpi^2}} - e^{\sqrt[5]{\sin\varpi}}\right)$.

Exercice 2. (3 points) *Déterminer toutes les applications $f:\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telles que*

$$\forall\eta\geq 0,\ \ f(f(\eta)) = 20\eta - f(\eta)\,.$$

(On pourra introduire des suites réelles (a_n) telles que $\forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+1}=f(a_n)$.)

Exercice 3. (4 points) On pose pour tout x réel $P(x) := (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ où α,β,γ sont trois de vos réels préférés – imposés *deux à deux distincts.*

1. *Montrer que* $\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[e^{-18\lambda}P(\lambda)\right]$ *s'annule deux fois (au moins).*
2. *Donner les variations de* $\frac{P'}{P}-18$.
3. *Montrer que* $\frac{P'}{P}-18$ *s'annule trois fois (au moins).*
4. *Relier les questions 1 et 3..*

Solution rapide proposée 1.

Exercice 1.

1. Les seuls problèmes pour définir $e^{a^2\cos a}\sqrt{a-1}^{\ln a} = \exp\left(a^2\cos a + \frac{\ln(a-1)}{2}\ln a\right)$ sont dans les logarithmes : cette quantité est bien définie ssi $a > 1$. Vu que $\left(e^f\right)' = f'e^f$ pour toute fonction f, il suffit pour trouver la dérivée voulue de dériver l'intérieur de la parenthèse. On trouve

$$\begin{aligned}\frac{d}{da}\left[a^2\cos a + \frac{\ln(a-1)}{2}\ln a\right] &= \frac{d}{da}\left[a^2\cos a\right] + \frac{d}{da}\left[\frac{\ln(a-1)}{2}\ln a\right] \\ &= 2a\cos a - a^2\sin a + \frac{\ln(a-1)}{2a} + \frac{\ln a}{2(a-1)},\end{aligned}$$

d'où le résultat en remultipliant par $e^{a^2\cos a}\sqrt{a-1}^{\ln a}$.

2. Regardons quand l'argument du logarithme est > 0. Le sinus est ≤ 1, l'inverse $\frac{1}{1-|\cos\varpi|}$ est ≥ 1 (car $\frac{1}{r} \geq 1$ pour $0 < r \leq 1$), l'exponentielle est > 0, donc l'argument est toujours < 0. La fonction n'est donc définie nulle part : *a fortiori* elle n'est dérivable nulle part.

Exercice 2. Soit a un réel et $a_n := f^{\circ n}(a)$ pour n entier, de sorte que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = f^{\circ(n+1)}(a) = \left[f \circ f^{\circ n}\right](a) = f\left(f^{\circ n}(a)\right) = f(a_n).$$

En évaluant l'hypothèse en a_n, on obtient $a_{n+2} = 6a_n - a_{n+1}$. Le trinôme caractéristique vaut $X^2 + X - 6 = (X-2)(X+3)$, donc a_n est de la forme $\lambda 2^n + \mu(-3)^n$. Or a_n reste positif (comme f), donc μ doit être nul, d'où $f(a) = a_1 = 2\lambda = 2a_0 = 2a$. Ceci tenant pour tout réel a, on a $f = 2\,\mathrm{Id}$ qui réciproquement est bien solution.

Exercice 3.

1. $e^{42x}P(x)$ s'annule en quatre points distincts (a, b, c et d), donc sa dérivée s'annule en trois points d'après Rolle (*cf.* cours).
2. Le cours montre que (pour t réel autre que a, b, c, d) on a

$$\frac{P'}{P}(t) + 42 = \frac{1}{t-a} + \frac{1}{t-b} + \frac{1}{t-c} + \frac{1}{t-d} + 42,$$

somme de fonctions décroissantes (chacune composée de "inverse" par une translation) et d'une constante, donc décroît sur chacun de ses intervalles de définition.

3. Vu que $\frac{P'}{P} + 42$ décroît sur chacun des intervalles $]a, b[$, $]b, c[$ et $]c, d[$ de ∞ à $-\infty$, le théorème des valeurs intermédiaires nous donne un zéro dans chacun de ces intervalles. De même, $\frac{P'}{P} + 42$ décroît sur $]-\infty, a[$ de 42 à $-\infty$, donc s'y annule, d'où un autre zéro. Ces quatre zéros sont tous distincts car appartiennent à des intervalles disjoints.
4. On peut expliciter

$$\frac{d}{dt}\left[e^{42t}P(t)\right] = e^{42t}\left(P'(t) + 42P(t)\right) = e^{42t}P(t)\left(\frac{P'(t)}{P(t)} + 42\right)$$

qui s'annule quatre fois (au moins) d'après la question 3, d'où le résultat de la question 1.

Solution rapide proposée 2.

Exercice 1.

1. Les seuls problèmes pour définir $e^{a^3\sin a}\sqrt{a}^{\ln(a-1)} = \exp\left(a^3\sin a + \frac{\ln a}{2}\ln(a-1)\right)$ sont dans les logarithmes : cette quantité est bien définie ssi $a > 1$. Vu que $\left(e^f\right)' = f'e^f$ pour toute fonction f, il suffit pour trouver la dérivée voulue de dériver l'intérieur de la parenthèse. On trouve

$$\begin{aligned}\frac{d}{da}\left(a^3\sin a + \frac{\ln a}{2}\ln(a-1)\right) &= \frac{d}{da}\left(a^3\sin a\right) + \frac{d}{da}\left(\frac{\ln a}{2}\ln(a-1)\right)\\ &= 3a^2\sin a + a^3\cos a + \frac{\ln(a-1)}{2a} + \frac{\ln a}{2(a-1)},\end{aligned}$$

d'où le résultat en remultipliant par $e^{a^3\sin a}\sqrt{a}^{\ln(a-1)}$.

2. Regardons quand l'argument du logarithme est > 0. Le cosinus est ≤ 1, l'inverse $\frac{1}{1-e^{-\varpi^2}}$ est ≥ 1 (car $0 < e^{-\varpi^2} \leq 1$), l'exponentielle est > 0, donc l'argument est toujours < 0. La fonction n'est donc définie nulle part : *a fortiori* elle n'est dérivable nulle part.

Exercice 2. Soit a un réel et $a_n := f^{\circ n}(a)$ pour tout n entier, de sorte que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = f^{\circ(n+1)}(a) = [f \circ f^{\circ n}](a) = f(f^{\circ n}(a)) = f(a_n).$$

En évaluant l'hypothèse en a_n, on obtient $a_{n+2} = 20a_n - a_{n+1}$. Le trinôme caractéristique vaut $X^2 + X - 20 = (X-4)(X+5)$, donc a_n est de la forme $\lambda 4^n + \mu(-5)^n$ pour certains réels λ et μ. Or a_n reste positif (comme f), donc μ doit être nul, d'où $f(a) = a_1 = 4\lambda = 4a_0 = 4a$. Ceci tenant pour tout réel a, on a $f = 4\,\mathrm{Id}$ qui réciproquement est bien solution.

Exercice 3.

1. $t \mapsto e^{-18t}P(t)$ s'annule en trois points distincts (α, β et γ), donc sa dérivée s'annule en deux points d'après Rolle (*cf.* cours).
2. Le cours montre que (pour tout t réel autre que α, β, γ) on a

$$\frac{P'}{P}(t) - 18 = \frac{1}{t-\alpha} + \frac{1}{t-\beta} + \frac{1}{t-\gamma} - 18,$$

   somme de fonctions décroissantes (chacune composée de "inverse" par une translation) et d'une constante, donc décroît sur chacun de ses intervalles de définition.
3. Vu que $\frac{P'}{P} - 18$ décroît sur chacun des intervalles $]\alpha, \beta[$ et $]\beta, \gamma[$ de ∞ à $-\infty$, le théorème des valeurs intermédiaires nous donne un zéro dans chacun de ces intervalles. De même, $\frac{P'}{P} - 18$ décroît sur $]\gamma, \infty[$ de ∞ à -18, donc s'y annule, d'où un autre zéros. Ces trois zéros sont tous distincts car appartiennent à des intervalles disjoints.
4. On peut expliciter

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-18t}P(t)\right] = e^{-18t}\left(P'(t) - 18P(t)\right) = e^{-18t}P(t)\left(\frac{P'(t)}{P(t)} - 18\right)$$

   qui s'annule trois fois (au moins) d'après la question 3, d'où le résultat de la question 1.