Partiel algèbre

Exercice 1. (sur 6 points)

Parmi les ensembles suivants, déterminer et justifier lesquels sont des espaces vectoriels (pour les lois évidentes) :

1. *l'ensemble des suites réelles de limite* 1 *;*
2. *l'ensemble des triplets de réels* (a, b, c) *vérifiant* $a^2 + b^{18} + c^{42} = 0$ *;*
3. *l'ensemble des matrices de taille* 2×2 *de carré nul.*

Exercice 2. (sur 6 points)

On considère l'ensemble E des suites réelles u satisfaisant la relation de récurrence $\forall n \geq 0,\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ ainsi que l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ u & \longmapsto & (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)_{n\geq 0} \end{array} \right.$.

1. *Vérifier que* E *est un espace vectoriel et que* f *est linéaire.*
2. *Montrer que l'image de* f *est incluse dans le sous-espace engendré par les trois suites* $(1)_{n\geq 0}$, $(n)_{n\geq 0}$ *et* $(2^n)_{n\geq 0}$.
3. *Donner la matrice de* f *dans une base de votre choix au départ et dans la base* $\left((1)_{n\geq 0}, (n)_{n\geq 0}, (2^n)_{n\geq 0}\right)$ *à l'arrivée.*

Exercice 3. (sur 8 points)

On considère la matrice $A := \begin{pmatrix} \cdot & 3 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 2 & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & 3 & \cdot \end{pmatrix}$.

1. *Résoudre l'équation* $AX = \lambda X$ *pour tout* $\lambda \in \{-3, -1, 1, 3\}$ *en l'inconnue* $X \in \mathbb{R}^4$.
2. *En déduire que* A *s'écrit sous la forme* $A = P \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -3 \end{pmatrix} P^{-1}$ *pour une matrice* P *à préciser.*

Partiel algèbre

Exercice 1. **(sur 6 points)**

Parmi les ensembles suivants, déterminer et justifier lesquels sont des espaces vectoriels (pour les lois évidentes)

1. *l'ensemble des fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *tendant vers* ∞ *en* ∞ *;*
2. *l'ensemble des fonction continues de* $[0, 60]$ *dans* $\mathbb{R}$ *vérifiant* $\int_0^{18} f^2 + \int_0^{42} f(18+t)^2 \, dt = 0$ *;*
3. *l'ensemble des matrices de tailles* 2×2 *égalant leur carré.*

Exercice 2. **(sur 6 points)**

On considère l'ensemble E des fonctions réelles continues f satisfaisant l'équation différentielle $4f' = f'' + 4f$ ainsi que l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ f & \longmapsto & x \mapsto \int_0^x \frac{f(t)}{e^{2t}} dt \end{array} \right.$.

1. *Vérifier que* E *est un espace vectoriel et que* φ *est linéaire.*
2. *Montrer que l'image de* φ *est incluse dans* $\mathbb{R}_2[X]$.
3. *Donner la matrice de* f *dans une base de votre choix au départ et dans la base canonique à l'arrivée.*

Exercice 3. **(sur 8 points)**

On considère la matrice $A := \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ \cdot & 3 & \cdot \\ -2 & 2 & \cdot \end{pmatrix}$ et on désigne par I la matrice identité

1. *Déterminer les noyaux* $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ *pour tout* $\lambda \in \{-2, 1, 3\}$.
2. *En déduire que* A *s'écrit* $P \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -2 \end{pmatrix} P^{-1}$ *pour une matrice* P *à préciser.*

Solution rapide proposée.

Exercice 1.

La suite nulle n'est pas de limite 1.

Une somme de carrés étant ≥ 0 avec $=$ ssi tous les carrés sont nuls, un élément (a,b,c) de notre ensemble doit vérifier $\left(a^2, b^{18}, c^{42}\right) = (0,0,0)$, d'où $a=b=c=0$. Ainsi, on a affaire à l'espace nul.

Les matrices $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ sont de carré nul mais pas leur somme.

Exercice 2.

En notant $\delta : (u_n) \mapsto (u_{n+1})$ l'opérateur de décalage, l'ensemble E s'écrit comme le noyau de $\delta^2 - 3\delta + 2\,\mathrm{Id}$, donc est un espace vectoriel comme tout noyau. La linéarité de f se vérifie de manière "pédestre".

Le polynôme caractéristique valant $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$, notre espace E est le plan engendré par les suites (1) et (2^n), donc $\operatorname{Im} f$ est engendré par les images de ces dernières, à savoir les suites (n) et $\left(2^{n+1}-1\right) = 2\,(2^n) - 1$, lesquelles sont bien engendrées par les trois suites (1), (n) et (2^n).

En prenant au départ la base "naturelle" (1) et (2^n), la décomposition ci-dessus montre que la matrice cherchée est $\begin{pmatrix} \cdot & -1 \\ 1 & \cdot \\ \cdot & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.

On vérifie que les colonnes de la matrice $P := \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont *les* solutions de l'équation à un scalaire près (pour des λ valant respectivement $1, -1, 3, -3$).

Admettons un instant que les colonnes de P forment une base $\mathcal{B}$. Nous venons d'affirmer que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(X \mapsto AX) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -3 \end{pmatrix}$. Mais on sait par ailleurs que $A = \operatorname{Mat}_{b.c.}(X \mapsto AX)$ où *b.c.* désigne dans la base canonique et que $P = \operatorname{Mat}_{b.c.} \mathcal{B} = \operatorname{Pass}(b.c. \to \mathcal{B})$, ce qui permet d'appliquer la formule de changement de base :

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -3 \end{pmatrix} = \operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}}(X \mapsto AX) = \operatorname{Pass}(b.c. \to \mathcal{B})^{-1} \operatorname*{Mat}_{b.c.}(X \mapsto AX) \operatorname{Pass}(b.c. \to \mathcal{B}) = P^{-1}AP, \text{ d'où le résultat.}$$

Pour montrer que $\mathcal{B}$ est bien une base, il suffit de montrer que les colonnes de P sont libres, *i. e.* que son rang vaut 4 :

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{L_1:-3L_2 \\ L_3:+L_2 \\ L_4:+3L_2}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \cdot & -6 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & 2 & 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 4 & 4 \end{pmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & -6 & -2 & -4 \\ \cdot & 2 & 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= 1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -6 & -2 & -4 \\ 2 & 2 & \cdot \\ \cdot & 4 & 4 \end{pmatrix} \overset{L_i:\times\frac{1}{2}}{=} 1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & \cdot \\ \cdot & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{L_1:+3L_2}{=} 1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \cdot & 2 & -2 \\ 1 & 1 & \cdot \\ \cdot & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} 1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdot \\ \cdot & 2 & -2 \\ \cdot & 2 & 2 \end{pmatrix} = 1 + 1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{\substack{L_1:\times\frac{1}{2} \\ L_2:\times\frac{1}{2}}}{=} 2 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_2:-L_1}{=} 2 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \cdot & 2 \end{pmatrix} = 2 + 1 + \operatorname{rg}(2) = 4, \ \textit{CQFD}.$$

On aurait aussi pu, en notant (a,b,c,d) les colonnes de P, partir d'une relation de liaison $\lambda a + \mu b + \nu c + \xi d = 0$. Multiplier par A (à gauche) donne $\lambda a - \mu b + 3\nu c - 3\xi d$, d'où par soustraction (puis division par 2) $\mu b - \nu c + 2\xi d = 0$. Remultiplier par A donne $-\mu b - 3\nu c - 6\xi d = 0$, d'où en ajoutant (puis en simplifiant par -4) $\nu c + \xi d = 0$. Multiplier par A (et simplifier par 3) donne $\nu c - \xi d = 0$, d'où par somme $\nu c = 0$ et $\nu = 0$. Réinjectant, il vient successivement $\xi = 0$, $\mu = 0$, $\lambda = 0$, ce qui conclut.

Solution rapide proposée.

Exercice 1.

La fonction nulle ne tend pas vers ∞.

Une somme de carrés étant ≥ 0 avec $=$ ssi tous les carrés sont nuls, une fonction f de notre ensemble doit vérifier $\int_0^{18} f^2 = 0$ et $\int_0^{42} f(18+t)^2\, dt = 0$. La première nullité nous dit, avec la continuité de f, que cette dernière est nulle sur $[0,18]$; la seconde nullité nous dit de même que $f(18+t) = 0$ pour tout $t \in [0,42]$, *i. e.* que f est nulle sur $[18,60]$. Finalement, f est nulle sur tout $[0,60]$, donc notre espace est l'espace nul.

La matrice I identité vaut son carré, mais ce n'est pas le cas de $2I$ puisque $(2I)^2 = 4I^2 = 4I \neq 2I$.

Exercice 2.

En notant δ l'opérateur de dérivation, notre ensemble E s'écrit comme $\operatorname{Ker}\left(\delta^2 - 4\delta + 4\operatorname{Id}\right)$, donc est un espace vectoriel comme tout noyau. La linéarité de φ est "pédestre".

Le polynôme caractéristique vaut $X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$, donc l'ensemble E est le sous-espace engendré par les fonctions $x \mapsto e^{2x}$ et $x \mapsto xe^{2x}$, donc $\operatorname{Im}\varphi$ est engendré par les images (par φ) de ces deux fonctions, à savoir $x \mapsto x$ et $x \mapsto \frac{x^2}{2}$, lesquelles tombent bien dans $\mathbb{R}_2[X]$.

En prenant pour base au départ les fonctions $x \mapsto e^{2x}$ et $x \mapsto xe^{2x}$, le calcul qui précède montre que la matrice cherchée est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Exercice 3.

On demande de résoudre les systèmes $AX = \lambda X$ pour $\lambda \in \{-2,1,3\}$. On trouve que les colonnes de la matrice $P := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot \\ -2 & \cdot & 1 \end{pmatrix}$ sont *les* solutions (à un scalaire près) pour des λ valant respectivement $1, 3, -2$.

Admettons un instant que les colonnes de P forment une base $\mathcal{B}$. Nous venons d'affirmer que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(X \mapsto AX) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -2 \end{pmatrix}$. Mais on sait par ailleurs que $A = \operatorname{Mat}_{b.c.}(X \mapsto AX)$ où $b.c.$ désigne dans la base canonique et que $P = \operatorname{Mat}_{b.c.}\mathcal{B} = \operatorname{Pass}(b.c. \to \mathcal{B})$, ce qui permet d'appliquer la formule de changement de base :

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -2 \end{pmatrix} = \operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}}(X \mapsto AX) = \operatorname{Pass}(b.c. \to \mathcal{B})^{-1} \operatorname*{Mat}_{b.c.}(X \mapsto AX) \operatorname{Pass}(b.c. \to \mathcal{B}) = P^{-1}AP, \text{ d'où le résultat.}$$

Pour montrer que $\mathcal{B}$ est bien une base, il suffit de montrer que les colonnes de P sont libres, *i. e.* que son rang vaut 3 :

$$\begin{aligned} & \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot \\ -2 & \cdot & 1 \end{pmatrix} \overset{L_1 := -L_3}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ -2 & \cdot & 1 \end{pmatrix} \overset{C_1 \leftrightarrow C_3}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \cdot & 1 & 3 \\ \cdot & 1 & \cdot \\ 1 & \cdot & -2 \end{pmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & \cdot & -2 \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ = \; & 1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 1 + 2 = 3. \end{aligned}$$

On aurait aussi pu, en notant (a,b,c) les colonnes de P, partir d'une relation de liaison $\lambda a + \mu b + \nu c = 0$. Multiplier par A (à gauche) donne $\lambda a + 3\mu b - 2\nu c$, d'où par soustraction $-2\mu b + 3\nu c = 0$. Remultiplier par A donne (après simplification par 3) $-2\mu b + 2\nu c = 0$, d'où en soustrayant $\nu c = 0$; Réinjectant, il vient successivement $\mu = 0$, $\lambda = 0$, ce qui conclut.