Familles sommables
(reliquat)

Marc SAGE

1er mars 2018

Table des matières

1 Cours

On appelle la ***somme*** *de la famille a le supremum*

$$\sum_{d\in\mathcal{D}} a_d := \sup_{D\subset\mathcal{D}}^{D \text{ fini}} \sum_{d\in D} a_d.$$

La famlle a est dite ***sommable*** *si sa somme est finie.*

1.1 Suites exhaustives

1. DANS EXO APP SUR SUITE EXHAUST *Montrer la formule d'*EULER *pour ζ, à savoir*

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} \qquad \text{où } \mathbb{P} \text{ désigne l'ensemble des premiers.}$$

Pour donner sens au produit infini, on va faire comme pour une somme infinie : on considère une suite exhaustive $\mathbb{P}_n = \{p_1, ..., p_N\}$ de $\mathbb{P}$. On veut alors montrer $\zeta(s) = \lim_{n\infty} \prod_{p\in\mathbb{P}_n} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$. Comme tout est positif, on peut directement développer

$$\prod_{p\in\mathbb{P}_n} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \prod_{p\in\mathbb{P}_n} \sum_{k\geq 0} \left(\frac{1}{p^s}\right)^k = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{p_1^{ks}} \cdots \sum_{k\geq 0} \frac{1}{p_N^{ks}} = \sum_{k_1,\ldots,k_N\geq 0} \frac{1}{p_1^{k_1 s}} \cdots \frac{1}{p_N^{k_N s}} = \sum_{\pi\in\Pi_n} \frac{1}{\pi^s}$$

où l'on somme sur l'ensemble Π_n des entiers dont l'ensemble des facteurs premiers est inclus dans $\mathbb{P}_n$. Puisque ces derniers épuisent $\mathbb{P}$, les Π_n épuisent $\mathbb{N}^*$, donc la somme ci-dessus vaut $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$, *CQFD*. Nous avons montré que la limite est indépendante de la suite exhaustive choisie, ce qui est une définition possible des familles *multipliables* – et des familles sommables dans un Banach.

DEF – PPO

On appelle ***suite exhaustive*** *(HP) de $\mathcal{D}$ toute suite croissante de parties finies de $\mathcal{D}$ dont la réunion vaut*[1] *$\mathcal{D}$.*

1. *Le domaine $\mathcal{D}$ admet une suite exhaustive ssi $\mathcal{D}$ est au plus dénombrable.*
2. *Soit (D_n) épuisant $\mathcal{D}$. Alors chaque partie finie de $\mathcal{D}$ est contenue à partir d'un certain rang dans chaque*[2] *D_n.*

DEM

1. Soit (D_n) épuisant $\mathcal{D}$. Alors $\mathcal{D}$ est réunion dénombrable de parties finies, donc est au plus dénombrable. Supposant $\mathcal{D}$ dénombrable. Alors chaque énumération $\mathbb{N} \widetilde{\longrightarrow} \mathcal{D}$ fournit une suite exhaustive $(\{\varphi(i) \ ; \ i \in [|0, n]\})$.
2. Soit $D \subset \mathcal{D}$ fini. Puisque $\mathcal{D} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$, l'application $\mu := \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ d & \longmapsto & \min\{n\in\mathbb{N} \ ; \ d \in D_n\} \end{array} \right.$ fait sens. En notant $N := \max_D \mu$ (qui fait sens car D est fini), la croissance de (D_n) montre alors que chaque $d \in D$ appartient à $D_{\mu(d)} \subset D_N$, d'où l'inclusion voulue à partir du rang N.

EGs

1. $\mathbb{N}$ est épuisé par les segment $[0, n|]$.
2. $\mathbb{Z}$ est épuisé par les segment $[-n, n|]$.
3. $\mathbb{N}^2$ est épuisé par les carrés $[0, n|]^2$, par les triangles $\{(a,b)\}_{a+b\leq n}$ (isocèles rectangles) ou encore par les "triangles isocèles hyperboliques" $\{(a,b)\}_{ab\leq n}$ (dont l'"hypoténuse" est une branche d'hyperbole).

[1] Une telle suite est dite ***épuiser*** $\mathcal{D}$.

[2] Cela justifie la terminologie : la suite "épuise" le domaine $\mathcal{D}$ en recouvrant chaque sous-domaine fini à partir d'un certain rang.

PPO (calcul effectif)

Pour chaque suite (D_n) épuisant $\mathcal{D}$, on a la tendance[3]

$$\sum_{D_n} a \longrightarrow \sum_{\mathcal{D}} a.$$

DEM

Notons $S := \sum_{\mathcal{D}} a$ et soit $s < S$. Par caractérisation du *supremum*[4], il y a une partie finie $D \subset \mathcal{D}$ telle que $s < \sum_D a \leq S$. Soit alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $D \subset D_N$: vu les inclusions $D \subset D_N \subset \mathcal{D}$, on en déduit (par croissance) l'encadrement $s < \sum_{D_N} a \leq S$. Ceci tenant pour chaque $s < S$, il en résulte que S vaut le *supremum* des $\sum_{d \in D_n} a_d$ lorsque n décrit $\mathbb{N}$; or ce *supremum* n'est autre que limite de la suite croissante $\left(\sum_{d \in D_n} a_d\right)$.

RQs

- Lorsque nous voudrons étendre la définition de la somme d'une famille sommable aux familles non nécessairement positives, c'est cette propriété que nous utiliserons.
- Cette propriété permet de démontrer élégamment les propriétés admises à la section précédente (linéarité, croissances, associativité). Élégantes ou non, ces démonstrations seront tout ce qu'il nous restera lorsque nous n'aurons plus d'ordre pour considérer des *suprema*, d'où leur intérêt.

Exercice d'application

a. *Retrouver le calcul de la somme double $\sum x_a y_b$ à l'aide d'une suite exhaustive.*

b. *Démontrer l'invariance par permutation à l'aide de suites exhaustives*[5]*.*

c. *Même question pour l'associativité.*

---

a. On épuise $\mathbb{N}^2$ avec des carrés :

$$\sum_{a,b \geq 0} x_a y_b = \lim_{n \to \infty} \sum_{a,b \leq n} x_a y_b = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{a \leq n} x_a \sum_{b \leq n} y_b \right) = \left(\lim_{n \to \infty} \sum_{a \leq n} x_a \right) \left(\lim_{n \to \infty} \sum_{b \leq n} y_b \right) = \sum_{a \geq 0} x_a \sum_{b \geq 0} y_b.$$

b. Soient $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathcal{D})$ et (D_n) épuisant $\mathcal{D}$. Chaque $\sigma(D_n)$ est fini car D_n l'est, la $(\sigma(D_n))$ croît par croissance de l'application "image directe" et sa réunion vaut

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \sigma(D_n) \underset{\text{l'image directe}}{\overset{\text{propriétés de}}{=}} \sigma\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \right) \underset{\text{épuisent } \mathcal{D}}{\overset{\text{les } D_n}{=}} \sigma(\mathcal{D}) \overset{\sigma \in \mathfrak{S}(\mathcal{D})}{=} \mathcal{D},$$

donc les $\sigma(D_n)$ épuisent $\mathcal{D}$. On en déduit les égalités

$$\sum_{\mathcal{D}} a \underset{\text{épuisent } \mathcal{D}}{\overset{\text{les } \sigma(D_n)}{=}} \lim_{n \to \infty} \sum_{\delta \in \sigma(D_n)} a_\delta \underset{d := \sigma^{-1}(\delta) \text{ à } n \text{ fixé}}{\overset{\text{reparamétrage}}{=}} \lim_{n \to \infty} \sum_{d \in D_n} a_{\sigma(d)} \underset{\text{épuisent } \mathcal{D}}{\overset{\text{les } D_n}{=}} \sum_{d \in \mathcal{D}} a_{\sigma(d)}.$$

c. Soient (D_n) épuisant $\mathcal{D}$ et $(\mathcal{D}_i)_{i \in I}$ une partition de $\mathcal{D}$. L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \twoheadrightarrow & I \\ d & \mapsto & \text{le } i \text{ tel que } d \in \mathcal{D}_i \end{array} \right.$ est alors surjective (les parts d'une partition étant non vides, on peut pour chaque $i \in I$ invoquer un d dans $\mathcal{D}_i$ qui alors clairement un antécédent de i), donc I est au plus dénombrable : soit (I_N) l'épuisant. On vérifie par ailleurs aisément que, pour chaque $i \in I$, la suite $(\mathcal{D}_i^n) := (\mathcal{D}_i \cap D_n)$ épuise $\mathcal{D}_i$.

Munis de ces suites exhaustives, nous pouvons réécrire[6]

$$\sum_{i \in I} \sum_{\mathcal{D}_i} a = \lim_{N \to \infty} \sum_{i \in I_N} \lim_{n \to \infty} \sum_{\mathcal{D}_i^n} a = \lim_{N \to \infty} \lim_{n \to \infty} \sum_{i \in I_N} \sum_{\mathcal{D}_i^n} a \underset{\text{par paquets}}{\overset{\text{sommation finie}}{=}} \lim_{N \to \infty} \lim_{n \to \infty} \sum_{\coprod_{i \in I_N} \mathcal{D}_i^n} a.$$

---

[3] En termes intuitifs, la somme d'une famille s'obtient en ajoutant ses termes petit à petit par paquets finis.

[4] *Rappel* : étant donnés un élément S et une partie A d'un ensemble *totalement* ordonné, on a l'équivalence

$$S = \sup A \iff \forall o < S,\ \exists a \in A,\ o < a \leq S.$$

[5] Bien sûr, on supposera pour cela l'au-plus-dénombrabilité de $\mathcal{D}$.

[6] Pour la dernière égalité, la disjonction des domaines $\mathcal{D}_i^n$ (à n fixé lorsque i varie) est essentielle et découle de celle des $\mathcal{D}_i$.

Or, d'une part à $N \in \mathbb{N}$ fixé chaque $\bigcup_{i \in I_N} \mathcal{D}_i^n$ est fini (réunion finie de parties finies) et leur réunion vaut

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \in I_N} \mathcal{D}_i^n = \bigcup_{i \in I_N} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_i^n \underset{\text{épuise } \mathcal{D}_i}{\overset{\text{à } i \text{ fixé, } (\mathcal{D}_i^n)}{=}} \bigcup_{i \in I_N} \mathcal{D}_i,$$

d'autre part chacun de ces derniers est fini (réunion finie de parties finies) et leur réunion vaut

$$\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \in I_N} \mathcal{D}_i = \bigcup_{i \in \bigcup_{N \in \mathbb{N}} I_N} \mathcal{D}_i \underset{\text{épuisent } \mathcal{I}}{\overset{\text{les } I_N}{=}} \bigcup_{i \in I} \mathcal{D}_i \underset{\text{épuisent } \mathcal{D}}{\overset{\text{les } \mathcal{D}_i}{=}} \mathcal{D}.$$

Grâce à ces deux suites exhaustives, le calcul entamé termine rapidement :

$$\lim_{N \to \infty} \lim_{n \to \infty} \sum_{\bigcup_{i \in I_N} \mathcal{D}_i^n} a = \lim_{N \to \infty} \sum_{\bigcup_{i \in I_N} \mathcal{D}_i} a = \sum_{\mathcal{D}} a.$$

1.2 Familles vectorielles

On suppose désormais $\mathcal{D}$ dénombrable et on en invoque une suite exaustive (D_n).
Fixons un evn E de dimension finie sur le corps $\mathbb{K}$. Les cas les plus courants seront $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et les espaces matriciels.

On invoque pour cette section une famille $(a_d)_{d \in \mathcal{D}}$ à valeurs dans E.
Sans notion d'ordre, on ne peut pas définir sa somme comme dans $\overline{\mathbb{R}_+}$ à l'aide d'un *supremum*. On va utiliser plutôt le critère en termes de suites exhaustives. Toutefois, comme le montre la famille $((-1)^n)$ pour laquelle plusieurs suites exhaustives donnent des sommes différentes (voire insensées), il va falloir rajouter une hypothèse pour garantir l'unicité.

DEF – PPO[7] (admise)

La famille $(a_d)_{d \in \mathcal{D}}$ est dite ***sommable*** *si la famille $(\|a_d\|)_{d \in \mathcal{D}}$ l'est.*
Dans ce cas, la suite $\sum_{D_n} a$ converge vers un vecteur indépendant de la suite exhaustive considérée. Cette limite commune est appelée la ***somme*** *de la famille $(a_d)_{d \in \mathcal{D}}$ et est notée*

$$\sum_{d \in \mathcal{D}} a_d := \lim_{n \to \infty} \sum_{D_n} a =: \sum_{\mathcal{D}} a.$$

L'ensemble des familles de $E^{\mathcal{D}}$ sommables est noté[8] $\ell^1(\mathcal{D}, E)$.

DEM : hors programme (le bon cadre serait les espaces de Banach désormais HP). De façon expéditive (à détailler pour les intéressé(e)s), l'opérateur $\sum_{\mathcal{D}}$ défini sur $E^{(\mathcal{D})}$ (muni de la norme 1) à valeurs dans E est uniformément continu (car 1-lipschitizien), donc admet un unique prolongement uniformémément continu sur l'adhérence $\operatorname{Adh} E^{(\mathcal{D})} = \ell^1(\mathcal{D}, E)$.

RQs

- Lorsque $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, la suite (a_n) est sommable ssi la série $\sum a_n$ est absolument convergente.
- Si la famille (a_d) est sommable, alors chacune de ses sous-familles est sommable.
- La famille (a_d) n'est pas sommable si elle contient une sous-famille non-sommable.
- La définition nous ramenant à des familles *positives*, on pourra vérifier une sommabilité grâce au calcul dans $\overline{\mathbb{R}_+}$.
- La sommabilité dépend *a priori* de la norme choisie sur E : puisque ces normes sont toutes équivalentes (E est de dimension finie), il n'en est finalement rien. On pourra donc choisir afin vérifier une sommabilité n'importe quelle norme facilitant le calcul, par exemple (si E est une algèbre matricielle) une norme d'algèbre.

[7] Sans la dénombrabilité de $\mathcal{D}$ imposée par le programme, la définition tient en remplaçant $\mathcal{D}$ par le support de la famille sommable considérée – support au plus dénombrable d'après l'exercice d'application (**??**) section **??**.

[8] Lorsque $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, on abrège $\ell^1(E) := \ell^1(\mathbb{N}, E)$.

EG : soit $d \in \mathbb{N}$. Pour chaque matrice $A \in M_d(\mathbb{K})$, la famille $\left(\frac{A^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable vu les comparaisons (on a invoqué une norme d'algèbre)

$$\sum_{n\geq 0}\left\|\frac{A^n}{n!}\right\| \leq \sum_{n\geq 0}\frac{\|A\|^n}{n!} = e^{\|A\|}.$$

La série $\sum \frac{A^n}{n!}$ converge donc vers une matrice, notée e^A (l'***exponentielle*** de A).

PPTs

On suppose la famille $(a_d)_{d\in\mathcal{D}}$ sommable.

1. **(invariance par permutation)** *Pour chaque permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathcal{D})$, la famille $\left(a_{\sigma(d)}\right)_{d\in\mathcal{D}}$ est sommable et on a l'égalité*[9]
$$\sum_{d\in\mathcal{D}} a_{\sigma(d)} = \sum_{d\in\mathcal{D}} a_d.$$
2. **(linéarité)** *L'ensemble $\ell^1(\mathcal{D}, E)$ est un sev de $E^{\mathcal{D}}$ et l'application $\sum_{\mathcal{D}}$ y est linéaire.*
3. **(croissance réelle)** *On suppose ici $\boxed{E = \mathbb{R}}$. Pour chaque famille $(b_d)_{d\in\mathcal{D}}$ réelle $\boxed{\text{sommable}}$, on a l'implication*[10]
$$a \leq b \Longrightarrow \sum_{\mathcal{D}} a \leq \sum_{\mathcal{D}} b.$$
4. **(associativité)** *Pour chaque partition $\mathcal{D} = \coprod_{i\in I}\mathcal{D}_i$, l'égalité suivante fait sens et est vérifiée*[11] *:*
$$\sum_{\mathcal{D}} a = \sum_{i\in I}\sum_{\mathcal{D}_i} a.$$

DEM[12]

Revenons au cas général. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Avec les mêmes notations qu'à la proposition précédente, on a les égalités

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathcal{D}}(\lambda a + b) & \underset{\text{de }\Sigma_{\mathcal{D}}}{\overset{\text{définition}}{=}} \sum_{\beta\in\mathcal{B}}\left(\sum_{\mathcal{D}}\beta^*(\lambda a + b)\right)\beta \underset{\text{à }\beta\in\mathcal{B}\text{ fixé}}{\overset{\text{linéarité de }\beta^*}{=}} \sum_{\beta\in\mathcal{B}}\left(\sum_{\mathcal{D}}\left[\lambda\beta^*(a) + \beta^*(b)\right]\right)\beta \\
& \underset{\text{les familles scalaires}}{\overset{\text{linéarité de }\Sigma_{\mathcal{D}}\text{ pour}}{=}} \sum_{\beta\in\mathcal{B}}\left(\lambda\sum_{\mathcal{D}}\beta^*(a) + \sum_{\mathcal{D}}\beta^*(b)\right)\beta \\
& \underset{(\mathcal{B}\text{ est fini})}{\overset{\text{calcul vectoriel}}{=}} \lambda\sum_{\beta\in\mathcal{B}}\sum_{\mathcal{D}}\beta^*(a)\,\beta + \sum_{\beta\in\mathcal{B}}\sum_{\mathcal{D}}\beta^*(b)\,\beta \\
& \underset{\Sigma_{\mathcal{D}}a\text{ et}\Sigma_{\mathcal{D}}b}{\overset{\text{définitions de}}{=}} \lambda\sum_{\mathcal{D}} a + \sum_{\mathcal{D}} b, \text{ d'où la } \mathbb{K}\text{-linéarité de } \sum_{\mathcal{D}} \text{ sur } \ell^1(\mathcal{D}, E).
\end{aligned}$$

1. *Cf.* exercice d'application précédent.
2. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $b \in \ell^1(\mathcal{D}, \mathbb{R})$. On a alors les comparaisons
$$\sum_{d\in\mathcal{D}}\|\lambda a_d + b_d\| \leq \sum_{d\in\mathcal{D}}\left(|\lambda|\,\|a_d\| + \|b_d\|\right) = |\lambda|\underbrace{\sum_{d\in\mathcal{D}}\|a_d\|}_{<\infty} + \underbrace{\sum_{d\in\mathcal{D}}\|b_d\|}_{<\infty} < \infty,$$
d'où la sommabilité de $\lambda a + b$. Ne pas oublier de dire que la famille nulle est sommable !

   La linéarité voulue découle d'un passage à la limite dans les égalités (valides pour chaque $n \in \mathbb{N}$ vu la finitude de D_n)
$$\sum_{d\in D_n}(\lambda a_d + b_d) = \lambda\sum_{d\in D_n} a_d + \sum_{d\in D_n} b_d.$$

[9] Lorsque $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, on retrouve l'invariance par permutation de la somme d'une série absolument convergente.

[10] Attention : la croissance en le domaine nécessite que fassent sens d'une part un ordre sur E (hypothèse « $E = \mathbb{R}$ ») d'autre part les sommes en jeu (hypothèses « a et b sommables »).

[11] Le deuxième résultat *clef* du chapitre !

[12] Seule la linéarité doit savoir être démontrée.

3. Même raisonnement : les comparaisons $\sum_{D_n} a \leq \sum_{D_n} b$ passent à la limite et donnent celle attendue.

4. Chaque famille $(a_d)_{d\in\mathcal{D}_i}$ est sommable comme sous-famille de la famille sommable a, ce qui donne sens à chaque vecteur $\sum_{\mathcal{D}_i} a$. La famille de ces derniers est alors sommable vu les comparaisons

$$\sum_{i\in I}\left\|\sum_{d\in\mathcal{D}_i} a_d\right\| \leq \sum_{i\in I}\sum_{d\in\mathcal{D}_i}\|a_d\| \underset{\text{par paquets}}{\overset{\text{sommation}}{=}} \sum_{d\in\mathcal{D}}\|a_d\| < \infty.$$

On conclut alors à l'aide de suites exhaustives comme dans l'exercice d'application précédent.

CEG : montrons que la famille $\binom{a}{b} \overset{f}{\mapsto} \begin{cases} -1 \text{ si } a=0 \\ \frac{1}{2^a} \text{ si } a>0 \end{cases}$ n'est pas sommable sur $\mathbb{N}^2$. La famille étant constante et non nulle sur chaque colonne, aucune sous-famille $(f_{a,b})_{a,b\in\{n\}\times\mathbb{N}}$ n'est sommable, ce qui suffit. Donnons à présent deux partitions réfutant l'associativité (la partition en droite verticales montrait son non-sens).

FIG 6 décrivant f

À $b\in\mathbb{N}$ fixé, la série $\sum f_{n,b}$ est (exception faite de son premier terme 1) géométrique de raison $\frac{1}{2}$, donc converge vers $-1+\sum_{n\geq1}\frac{1}{2^n}=0$. Évaluer la "somme" $\sum_{a,b\geq0} f_{a,b}$ suivant une partition en droites horizontales conduirait donc à une somme nulle.

Par ailleurs, suivant une partition en droites de pente -1, à $n\in\mathbb{N}$ fixé la somme $\sum_{a+b=n} f_{a,b}$ vaut $-1+\sum_{a=1}^{n}\frac{1}{2^a}=-\frac{1}{2^n}$, lesquelles sommes forment (quand n décrit $\mathbb{N}$) une famille sommable de somme $\sum_{n\geq0}-\frac{1}{2^n}=-2$.

L'hypothèse de sommabilité est par conséquent vitale, au risque d'écrire des égalités fausses voire insensées !

PPTS

1. *Si $E=\mathbb{R}$, la famille réelle a est sommable ssi les familles a^+ et a^- de ses parties positives et négatives*[13] *sont toutes deux sommables. Dans ce cas, sa somme vaut*
$$\sum_{\mathcal{D}} a = \sum_{\mathcal{D}} a^+ - \sum_{\mathcal{D}} a^-.$$
2. *Si $E=\mathbb{C}$, la famille complexe a est sommable ssi les familles* $\operatorname{Re} a$ *et* $\operatorname{Im} a$ *de ses parties réelles et imaginaires sont toutes deux sommables. Dans ce cas, sa somme vaut*
$$\sum_{\mathcal{D}} a = \sum_{\mathcal{D}} \operatorname{Re} a + i\sum_{\mathcal{D}} \operatorname{Im} a.$$
3. *Étant donnée une base de E, la famille a est sommable ssi chacune des familles de ses coordonnées dans la base donnée l'est. Dans ce cas, pour chaque vecteur β de la base donnée, la β-ième coordonnée de la somme de la famille a vaut*[14] *la somme de la famille des β-ièmes coordonnées de a. (HP)*

DEM (non exigibles)

1. Supposons $a\in\mathbb{R}^{\mathcal{D}}$. Les familles a^+ et a^- étant positives, on peut leur appliquer le résultats des familles à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}_+}$.

   (a) Si ces familles sont sommables, on a alors les comparaisons
$$\begin{aligned}\sum_{d\in\mathcal{D}}|a_d| &= \sum_{d\in\mathcal{D}}\left|a_d^+-a_d^-\right| \leq \sum_{d\in\mathcal{D}}\left(\left|a_d^+\right|+\left|a_d^-\right|\right) = \sum_{d\in\mathcal{D}}\left|a_d^+\right| + \sum_{d\in\mathcal{D}}\left|a_d^-\right| \\ &< \infty+\infty=\infty, \text{ d'où la sommabilité de } a.\end{aligned}$$

   Supposons réciproquement a sommable et notons $\mathcal{D}_+$ l'ensemble des $d\in\mathcal{D}$ tels que $a_d>0$, çed tels que $a_d^+\neq0$. On a alors les égalités et comparaisons
$$\sum_{d\in\mathcal{D}} a_d^+ \underset{\text{si } d\notin\mathcal{D}^+}{\overset{a_d^+ \text{ nul}}{=}} \sum_{d\in\mathcal{D}^+} a_d^+ = \sum_{d\in\mathcal{D}^+}|a_d| \leq \sum_{d\in\mathcal{D}}|a_d| < \infty,$$
   d'où la sommabilité de a^+. On procèderait de même pour a^-.

   (b) Soient (D_n^+) et (D_n^-) deux suites épuisant[15] resp. $\{d\in\mathcal{D}\ ;\ a_d\geq0\}$ et $\{d\in\mathcal{D}\ ;\ a_d<0\}$. Alors

[13] *Rappel* : chaque réel r s'écrit $r=r^+-r^-$ où les réels *positifs* $\begin{cases} r^+ := \max\{r,0\} \\ r^- := \max\{-r,0\}\end{cases}$ s'appellent ses ***parties*** resp. ***positive*** et ***négative***.

[14] En d'autres termes, on peut intervertir les symboles $\sum_{\mathcal{D}}$ et β^* (forme linéaire β-ième coordonnée dans la base donnée).

[15] On peut invoquer de telles $\left(D_n^\pm\right)$ car les parties épuisées sont incluses dans le dénombrable $\mathcal{D}$.

chaque réunion disjointe $D_n^+ \amalg D_n^-$ est finie (réunion de deux parties finies) et leur réunion vaut

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(D_n^+ \cup D_n^-\right) = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n^+\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n^-\right) = \{d \in \mathcal{D} \; ; \; a_d \geq 0 \text{ ou } a_d < 0\} = \mathcal{D},$$

donc la suite $(D_n^+ \cup D_n^-)$ épuise $\mathcal{D}$. On conclut en passant à la limite dans les égalités (valides pour chaque $n \in \mathbb{N}$)

$$\sum_{d\in D_n^+ \amalg D_n^-} a_d = \sum_{d\in D_n^+} \underbrace{a_d}_{=a_d^+} + \sum_{d\in D_n^-} \underbrace{a_d}_{=-a_d^-} = \sum_{d\in D_n^+} a_d^+ - \sum_{d\in D_n^+} a_d^- .$$

2. Découle du point suivant lorsque $E = \mathbb{C}$ avec pour base $(1, i)$.

3. Soit $\mathcal{B}$ une base de E que l'on confondera avec son ensemble indexant[16].

(a) Si pour chaque $\beta \in \mathcal{B}$ la famille $\left(a_d^\beta\right)_{d\in\mathcal{D}}$ est sommable, on a alors les égalités et comparaisons

$$\sum_{d\in\mathcal{D}} \|a_d\| = \sum_{d\in\mathcal{D}} \left\| \sum_{\beta\in\mathcal{B}} a_d^\beta \, \beta \right\| \leq \sum_{d\in\mathcal{D}} \sum_{\beta\in\mathcal{B}} \left|a_d^\beta\right| \|\beta\| = \sum_{\beta\in\mathcal{B}} \underbrace{\overbrace{\|\beta\|}^{>0} \overbrace{\sum_{d\in\mathcal{D}} \left|a_d^\beta\right|}^{<\infty}}_{<\infty}$$

$$\underset{\text{fini}}{\overset{\mathcal{B}\text{ est}}{<}} \infty, \text{ d'où la sommabilité de } a.$$

Supposons réciproquement a sommable. La norme d'ordre 1 associée à la base B étant équivalente à la norme de E, soit $C > 0$ tel que $\|\cdot\|_1 \leq C \|\cdot\|$. On a alors pour chaque $\beta \in \mathcal{B}$ les comparaisons

$$\sum_{d\in\mathcal{D}} \left|a_d^\beta\right| \leq \sum_{d\in\mathcal{D}} \sum_{b\in\mathcal{B}} \left|a_d^b\right| \leq \sum_{d\in\mathcal{D}} C \|a_d\| < \infty, \text{ d'où la sommabilité de } a^\beta.$$

(b) Inspirons-nous du cas réel. Pour chaque $\beta \in \mathcal{B}$, notons

$$D^\beta := \left\{d \in \mathcal{D} \; ; \; a_d^\beta \neq 0 \text{ et } \forall b \neq \beta, \; a_d^b = 0\right\},$$

lequel est épuisé par les $D_n^\beta := D^\beta \cap D_n$. De plus, chaque réunion disjointe $\coprod_{\beta\in\mathcal{B}} D_n^\beta$ est finie (union finie de parties finies) et leur réunion vaut

$$\begin{aligned}\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{\beta\in\mathcal{B}} D_n^\beta &= \bigcup_{\beta\in\mathcal{B}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(D^\beta \cap D_n\right) = \bigcup_{\beta\in\mathcal{B}} \left(D^\beta \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n\right) = \bigcup_{\beta\in\mathcal{B}} \left(D^\beta \cap \mathcal{D}\right) = \bigcup_{\beta\in\mathcal{B}} D^\beta \\ &= \left\{d \in \mathcal{D} \; ; \; \exists \beta \in \mathcal{B}, \; a_d^\beta \neq 0\right\} = \{d \in \mathcal{D} \; ; \; a_d \neq 0\} =: \mathcal{D}',\end{aligned}$$

On conclut en passant à la limite[17] dans les égalités (valides pour chaque $n \in \mathbb{N}$)

$$\sum_{d\in\coprod_{\beta\in\mathcal{B}} D_n^\beta} a_d = \sum_{\beta\in\mathcal{B}} \sum_{d\in D_n^\beta} \underbrace{a_d}_{=a_d^\beta \beta} = \sum_{\beta\in\mathcal{B}} \left(\sum_{d\in D_n^\beta} a_d^\beta\right) \beta.$$

1.3 Familles vectorielles en dim finie

Fixons un env E de dimension finie sur le corps $\mathbb{K}$. Les cas les plus courants seront $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et les espaces matriciels.

[16] Pour chaque vecteur $e \in E$, pour chaque vecteur de base $\beta \in \mathcal{B}$, on note e^β la β-ième coordonée de e dans la base B.

[17] La limite de gauche vaut bien $\sum_{\mathcal{D}} a$ vu la nullité des termes indexés hors du support $\mathcal{D}'$.

1. *(hors-programme) Étant donnée une base de E, la famille a est sommable ssi chacune des familles de ses coordonnées dans la base donnée l'est. Dans ce cas, sa* ***somme*** *est définie par*[18]

$$\sum_{\mathcal{D}} a := \sum_{\beta \text{ vecteur de base}} \left(\sum_{\mathcal{D}} \beta^* (a) \right) \beta.$$

Autrement dit, pour chaque vecteur β de la base donnée, la β-ième coordonnée de la somme de la famille a vaut[19] *la somme de la famille des β-ièmes coordonnées de a.*

DEM

1. Soit $\mathcal{B}$ une base de E que l'on confondra avec son ensemble indexant[20].
Si pour chaque $\beta \in \mathcal{B}$ la famille $\left(a_d^\beta\right)_{d \in \mathcal{D}}$ est sommable, on a alors les égalités et comparaisons

$$\sum_{d\in\mathcal{D}} \|a_d\| = \sum_{d\in\mathcal{D}} \left\| \sum_{\beta\in\mathcal{B}} a_d^\beta \, \beta \right\| \leq \sum_{d\in\mathcal{D}} \sum_{\beta\in\mathcal{B}} \left| a_d^\beta \right| \|\beta\| = \underbrace{\sum_{\beta\in\mathcal{B}} \overbrace{\|\beta\|}^{>0} \overbrace{\sum_{d\in\mathcal{D}} \left| a_d^\beta \right|}^{<\infty}}_{<\infty}$$

$$\underset{\text{fini}}{\overset{\mathcal{B}\text{ est}}{<}} \infty, \text{ d'où la sommabilité de } a.$$

Supposons réciproquement a sommable. Soit $\beta \in \mathcal{B}$. La norme d'ordre 1 associée à la base $\mathcal{B}$ étant équivalente à la norme de E, soit $C > 0$ tel que $\|\cdot\|_1 \leq C \|\cdot\|$. On a alors les comparaisons

$$\sum_{d\in\mathcal{D}} \left| a_d^\beta \right| \leq \sum_{d\in\mathcal{D}} \sum_{\beta'\in\mathcal{B}} \left| a_d^{\beta'} \right| = \sum_{d\in\mathcal{D}} \|a_d\|_1 \leq \sum_{d\in\mathcal{D}} C \|a_d\| < \infty, \text{ d'où la sommabilité de } a^\beta.$$

2 Exercices & exemples

1. Soient A, B deux matrices complexes qui commutent. Montrons l'égalité $e^A e^B = e^{A+B}$. Les séries $\sum \frac{A^n}{n!}$ et $\sum \frac{B^n}{n!}$ convergent absolument (*cf.* exemple section 1.2), donc la proposition précédente s'applique et délivre l'égalité

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{B^q}{q!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p+q=n}^{p,q\geq 0} \frac{A^p}{p!} \frac{B^q}{q!}.$$

Or, d'une part le terme de gauche vaut $e^A e^B$, d'autre part on retrouve le membre de droite en développant[21]

$$e^{A+B} = \sum_{n\geq 0} \frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{p+q=n}^{p,q\geq 0} \frac{n!}{p!q!} A^p B^q$$

2. *Soient A et B deux séries complexes convergente dont on note $C := A * B$ le produit de Cauchy. Montrer la convergence de la suite $\frac{C_0+C_1+C_2+\cdots+C_N}{N}$.*
? ? ?REDAC PAS NICKEL ? ?
RQ – Le produit de convolution de deux séries convergentes converge donc toujours *en moyenne* (au sens de Cesàro)
Notons α et β les sommes respectives des séries A et B. Si ces dernières convergeaient absolument, la série C convergerait vers $\alpha\beta$ (d'après le cours), donc sa moyenne de Cesàro aussi (*cf.* exercice classique

[18] On a noté β^* la forme linéaire β-ième coordonnée dans la base donnée).
[19] En d'autres termes, on peut intervertir les symboles $\sum_{\mathcal{D}}$ et β^*.
[20] Pour chaque vecteur $e \in E$, pour chaque vecteur de base $\beta \in \mathcal{B}$, on abrégera e^β la β-ième coordonnée de e dans la base B.
[21] Le développement du binôme est permis par la commutabilité de A et B. Bien noter les égalités $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!q!} = \binom{n}{q}$.

de première année). Cette micro-analyse suggère d'établir la tendance $\frac{C_0+C_1+\cdots+C_N}{N} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \alpha\beta$ (mettre N ou $N+1$ au dénominateur ne change rien).

Observons que chaque terme s'écrit comme un produit de Cauchy (de suites) : d'une part

$$\begin{aligned} C_n &= c_0+c_1+\cdots+c_n = \sum_{k=0}^{n}[a*b]_k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i+j=k}^{i,j\geq 0} a_i b_j \underset{\text{droites de pente } -1}{\overset{\text{partition en}}{=}} \sum_{i+j\leq n}^{i,j\geq 0} a_i b_j \underset{\text{droites verticales}}{\overset{\text{partition en}}{=}} \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{n-i} b_j \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i B_{n-i} = \sum_{i+j=n}^{i,j\geq 0} a_i B_j = [a*B]_n \text{ (partitionner en droites horizontales aurait donné } \sum_{i+j=n}^{i,j\geq 0} A_i b_j = [A*b]_n \text{)}, \end{aligned}$$

d'autre part

$$C_0+C_1+\cdots+C_N = \sum_{n=0}^{N}[a*B]_n \underset{\text{droites horizontales}}{\overset{\text{partition en}}{=}} [A*B]_n = \sum_{i+j=N}^{i,j\geq 0} A_i B_j.$$

Il suffit donc de montrer la tendance $\frac{1}{N}[u*v]_N \longrightarrow 0$ pour toutes suites $u, v \longrightarrow 0$. (Appliquer à $\binom{u}{v} := \binom{A-\alpha}{B-\beta}$ donnera la tendance vers 0 de

$$u*v = (A-\alpha)*(B-\beta) = A*B - \underbrace{A\beta}_{\longrightarrow \alpha\beta} - \underbrace{\alpha(B-\beta)}_{=O(1)o(1)\longrightarrow 0}, \text{ çed } A*B \longrightarrow \alpha\beta).$$

Soit $\varepsilon > 0$, soit N tel que $n > N \Longrightarrow |u_n|, |v_n| < \varepsilon$ et notons Θ un majorant de $|u|$ et $|v|$. Pour chaque $n > 2N$, l'égalité $i+j=n$ implique $i > N$ (alors $|u_i v_j| \leq \varepsilon\Theta$) ou $j > N$ (alors $|u_i v_j| \leq \Theta\varepsilon$), d'où la majoration $|[u*v]_n| \leq n\varepsilon\Theta$, ce qui conclut.

3. ★★★

   (a) *Les permutations de* $\mathbb{N}$ *forment-elles un ensemble dénombrable ?*

   (b) *Même question avec les bons ordres sur* $\mathbb{N}$*, çed les relations d'ordre pour lesquelles chaque partie non vide admet un minimum.*

SOL

(a) Injectons l'infini non-dénombrable $\mathfrak{P}^\infty(\mathbb{N})$ dans $\mathfrak{S}(\mathbb{N})$, ce qui empêchera la dénombrabilité de $\mathfrak{S}(\mathbb{N})$.

Soit A une partie infinie de $\mathbb{N}$, notons $(a_0 < a_1 < a_2 < \cdots)$ son énumération strictement croissante donnée par le cours. On définit alors une permutation de $\mathbb{N}$ en fixant chaque élément de $\mathbb{N}\setminus A$ et en échangeant pour chaque naturel n les éléments a_{2n} et a_{2n+1}. Cette permutation a pour support la réunion des $\{a_{2n}, a_{2n+1}\}$ pour n décrivant $\mathbb{N}$, laquelle vaut A, ce qui montre que deux parties distinctes auront des permutations associées distinctes (les supports associés étant distincts).

Finalement, en appelant ε l'application (définie dans le cours) qui associe à chaque partie infinie de $\mathbb{N}$ une énumération (strictement) croissante de cette partie, on a une injection

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathfrak{P}^\infty(\mathbb{N}) & \hookrightarrow & \mathfrak{S}(\mathbb{N}) \\ A & \longmapsto & \forall n\in\mathbb{N},\ \varepsilon(A)_{2n} \leftrightarrow \varepsilon(A)_{2n+1} \end{array}\right., \text{ ce qui conclut.}$$

(b) Dans un ensemble E fini, définir un bon ordre sur E reviendrait à définir un *premier* élément dans E (pourvu que E soit non vide), puis un *deuxième* parmi les restants (pourvu que E ne soit pas un singleton), etc., ce qui reviendrait à définir une *permutation* de E. Voyons ce qu'il reste de cette intuition lorsque E est infini.

Montrons que chaque permutation de $\mathbb{N}$ induit un bon ordre sur $\mathbb{N}$. Plus précisément, en notant $\mathcal{BO}_{\mathbb{N}}$ l'ensemble des bons ordres sur $\mathbb{N}$, montrons qu'est bien définie et injective l'application

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}(\mathbb{N}) & \overset{?}{\hookrightarrow} & \mathcal{BO}_{\mathbb{N}} \\ \sigma & \mapsto & \preccurlyeq_\sigma := \{(\sigma(a), \sigma(b))\}_{a\leq b} \end{array}\right..$$

Cela conclura à la non-dénombrabilité de $\mathcal{BO}_{\mathbb{N}}$ par le point précédent.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$ par laquelle on notera les images avec des "primes" et abrégeons $\preccurlyeq := \preccurlyeq_\sigma$. On a ainsi par définition de $\preccurlyeq_\sigma$ les équivalences

$$\forall m, n\in\mathbb{N},\ m\leq n \Longleftrightarrow m' \preccurlyeq n'.$$

On en déduit que la réflexivité de $\preccurlyeq$, qui s'écrit $\forall n \in \mathbb{N},\ n \preccurlyeq n$, çed (par surjectivité de σ) $\forall a \in \mathbb{N},\ a' \preccurlyeq a'$, équivaut à $\forall a \in \mathbb{N},\ a \leq a$, çed à la réflexivité de l'ordre usuel $\leq$. De même, l'anti-réflexivité de $\preccurlyeq$, qui s'écrit $\forall a, b \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{l} a' \preccurlyeq b' \\ b' \preccurlyeq a' \end{array} \right. \Longrightarrow a' = b'$, équivaut à $\forall a, b \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{l} a \leq b \\ b \leq a \end{array} \right. \Longrightarrow a = b$ (l'injectivité de σ rend équivalentes les égalités $a' = b'$ et $a = b$), çed à l'anti-réflexivité de $\leq$. Enfin, la transitivité de $\preccurlyeq$, qui s'écrit $\forall a, b, c \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{l} a' \preccurlyeq b' \\ b' \preccurlyeq c' \end{array} \right. \Longrightarrow a' \preccurlyeq c'$ équivaut à $\forall a, b, c \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{l} a \leq b \\ b \leq c \end{array} \right. \Longrightarrow a \leq c$, çed à la transitivité de $\leq$.

Montrons enfin que $\preccurlyeq$ est un bon ordre. Soit B une partie non vide de $\mathbb{N}$, notons $A := \sigma^{-1}(B)$ (qui est aussi non vide), posons $m := \min_{\leq} A$ et montrons que $m' = \min_{\preccurlyeq} B$. D'une part on a l'appartenance $m' = \sigma(m) \in \sigma(A) = B$, d'autre part pour chaque $a \in A$ la majoration $m \leq a$ (que l'on a) équivaut à $m' \preccurlyeq a'$, d'où la minoration voulue $m' \preccurlyeq A' = B$.

Pour retrouver σ à partir du bon ordre $\preccurlyeq$, il suffit d'utiliser pour chaque $n \in \mathbb{N}$ l'équivalence

$$n \not< 0 < 1 < 2 < 3 < \cdots \Longleftrightarrow n' \not\prec 0' \prec 1' < 2' \prec 3' \prec \cdots,$$

laquelle montre que $\sigma(n) = n'$ est le "n-ième élément" de $\mathbb{N}$ pour l'ordre $\preccurlyeq$ (par "n-ième élément", on entend le *minimum* du n-ième terme de la suite définie en itérant la fonction $P \mapsto P \setminus \{\min_{\preccurlyeq} P\}$). On obtient ainsi l'injectivité désirée.

RQ – Un bon ordre étant total (pour tous éléments a, b, la paire $\{a, b\}$ admet un *minimum*), la même question concernant les ordres totaux sur $\mathbb{N}$ reçoit une réponse d'autant plus négative.