Familles sommables

Marc Sage (collab. Michel Wigneron)

19 septembre 2017

Table des matières

Étant donnée une famille *finie* $(a_i)_{i\in I}$ de réels, complexes ou matrices, on sait facilement définir la somme $\sum_{i\in I} a_i$ de cette famille, conformément à notre intuition, en ajoutant les a_i un par un dans n'importe quel ordre.

Qu'en est-il des familles *infinies* ? Les séries nous montrent les problèmes liés non seulement à la convergence mais aussi à l'ordre de sommation (cas des séries semi-convergentes, à l'instar de $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$).

Les familles sommables proposent un cadre agréable pour s'affranchir de ces contraintes, lequel servira dans l'étude des probabilités où apparaissent de nombreuses séries doubles.

1 Ensembles dénombrables

On formalise ici l'acte intuitif d'*énumérer* un par un les éléments d'un ensemble : a_1, a_2, a_3... Cette énumération peut :

1. s'arrêter (cas des ensembles finis),
2. ne jamais s'arrêter (cas des ensembles "énumérables" infinis),
3. échouer en ratant toujours un élément de l'ensemble à énumérer (ensemble infinis non énumérables).

Les conventions des classes préparatoires regardent le cas fini à part et ne considèrent que l'énumérabilité *infinie*. Voici par exemple une énumération des entiers relatifs et une énumération des couples de naturels :

$$\text{FIG 0}\quad \begin{array}{ccccccccc} & & -1 & & -2 & & -3 & & \\ & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \cdots \\ 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & \end{array}$$

$$\text{FIG 1}\quad \begin{array}{lllll} 0 & & & & \\ \to 1 & \to 2 & & & \\ \to 3 & \to 4 & \to 5 & & \\ \to 6 & \to 7 & \to 8 & \to 9 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{array}$$

1.1 Généralités, premiers exemples, critères

On fixe pour toute cette section un ensemble E.

Définition (ensemble dénombrable)

*L'ensemble E est qualifié de **dénombrable** s'il y a une bijection*[1] $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} E$.

Remarques

[1] Une telle suite s'appelle une ***énumération*** de(s éléments de) E.

• Puisque la composée de deux bijections est bijective, chaque ensemble en bijection avec un ensemble dénombrable est en bijection avec $\mathbb{N}$, donc est dénombrable.

• *Culture semantique* : CANTOR appelait *puissance* d'un ensemble (même infini) ce qui correspond intuitivement à son cardinal. Le principe de HUME (valide en classe préparatoire) affirme que deux ensembles sont ***équipotents***[2] ssi il existe une bijection de l'un dans l'autre. La "relation" d'***équipotence*** (= avoir même puissance) est d'équivalence et compatible avec le produit cartésien.

Y a-t-il d'autres puissances entre le fini et le dénombrable ? La proposition suivante répond par la négative : la dénombrabilité est la plus "petite" cardinalité infinie[3].

Proposition

Chaque partie infinie de $\mathbb{N}$ *est dénombrable.*

Démonstration

L'idée est de partir de E et de retirer petit à petit le plus petit élément : les *minima* ainsi obtenus formeront alors une énumération (croissante) de E.

Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}$ et imposons $E \in \mathcal{P}$. Puisqu'une partie infinie est toujours non vide et le reste quand on lui retire un élément, l'application

$$f := \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ P & \longmapsto & P \setminus \{\min P\} \end{array} \right.$$

fait sens et définit par itération de terme initial E une suite (E_n) strictement décroissante. Vérifions alors que la suite $\varepsilon := n \mapsto \min E_n$ est une énumération de E. Au passage, les égalités $E_{n+1} = E_n \setminus \{\varepsilon_n\}$ livrent par une récurrence immédiate

$$\forall n \in \mathbb{N},\ E_n = E \setminus \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1}\} .$$

Toute d'abord, la suite (E_n) décroissant, chaque E_n est inclus dans $E_0 = E$, donc la suite (ε_n) est bien à valeurs dans E.

Montrons ensuite que (ε_n) croît strictement, ce qui impliquera son injectivité. Soit $n \in \mathbb{N}$: vu les minorations $\forall P \in \mathcal{P},\ \min f(P) > \min P$, remplacer P par E_n donne $\min E_{n+1} > \min E_n$, *c. q. f. d.*

Montrons enfin la surjectivité. Soit $e \in E$. On a alors $e \geq \min E = \varepsilon_0$ et la stricte croissance de (ε_n) permet d'évoquer[4] un naturel N (unique) tel que $\varepsilon_N \leq e < \varepsilon_{N+1}$. On a alors $e \geq \varepsilon_N > \varepsilon_i$ pour chaque naturel $i < N$, d'où $e \in E \setminus \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{N-1}\} = E_N = E_{N+1} \amalg \{\varepsilon_N\}$; or la majoration $e < \min E_{N+1}$ empêche l'appartenance $e \in E_{N+1}$, d'où $e \in \{\varepsilon_N\}$ et l'égalité $e = \varepsilon_N$.

Exemples : les naturels, les naturels non nuls, les naturels pairs, les naturels impairs, les multiples de 18, les puissances de 42, les nombres premiers.

Corollaire (dénombrabilité & injections dans $\mathbb{N}$)

[2] *équi* = même, *potent* = puissance

[3] D'où la terminologie ***au plus dénombrable*** (hors-programme) souvent utilisée pour signifer « fini ou dénombrable ».

[4] On utilise la décomposition $[|\varepsilon_0, \infty[= \coprod_{n\in\mathbb{N}} [|\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}[$.

E est dénombrable ssi il est infini et s'il y a une injection de E dans $\mathbb{N}$.
E est fini ou dénombrable ssi il y a une injection de E dans $\mathbb{N}$.

Démonstration

Supposons E dénombrable et soit $E \overset{\varphi}{\widetilde{\longrightarrow}} \mathbb{N}$ une bijection. Alors φ est une injection de E dans $\mathbb{N}$. Si E était fini, il serait équipotent à un segment de $\mathbb{N}$, donc[5] $\mathbb{N}$ aussi, ce qui est absurde ($\mathbb{N}$ est infini) ; donc E est infini.

Supposons E fini, soient $n \in \mathbb{N}$ et φ une bijection $E \simeq [1, n|]$. Cette dernière induit, en composant à droite par l'injection canonique $[1, n|] \hookrightarrow \mathbb{N}$, une injection $E \hookrightarrow \mathbb{N}$.

Soit $i : E \hookrightarrow \mathbb{N}$ une injection. Elle induit une bijection $E \widetilde{\longrightarrow} \operatorname{Im} i$: si E n'est pas fini, alors $\operatorname{Im} i$ non plus, donc est une partie infinie de $\mathbb{N}$, donc est dénombrable (*cf.* proposition précédente), donc E aussi.

Remarques

- Le corollaire reste valable en remplaçant $\mathbb{N}$ par n'importe quel ensemble dénombrable (en effet, la composée d'une injection $E \hookrightarrow D$ et d'une bijection $D \overset{\varphi}{\widetilde{\longrightarrow}} \mathbb{N}$ est une injection $E \hookrightarrow \mathbb{N}$).
- L'existence d'une injection $E \hookrightarrow \mathbb{N}$ équivaut (si $E \neq \emptyset$) à l'existence d'une surjection $\mathbb{N} \twoheadrightarrow E$, ce qui pourra alléger certaines démonstrations. En effet, d'une part une surjection $\mathbb{N} \overset{s}{\twoheadrightarrow} E$ induit une injection[6]

$$\left\{ \begin{array}{ccc} E & \hookrightarrow & \mathbb{N} \\ e & \mapsto & \min \{n \in \mathbb{N} \; ; \; s(e) = n\} \end{array} \right. ,$$

d'autre part une injection $E \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{N}$ et un élément $e \in E$ (que l'on peut évoquer puisque E est non vide) induisent une surjection $\mathbb{N} \twoheadrightarrow E$ valant i^{-1} sur $\operatorname{Im} i$ et e ailleurs.

1.2 D'autres critères et exemples ($\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, pas $\mathbb{R}$)

Propriétés

1. *La dénombrabilité est préservée par produit cartésien fini*[7] *(non vide).*
2. *Chaque réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables reste finie ou dénombrable.*
3. *La dénombrabilité est préservée par union dénombrable.*

Démonstrations (non exigibles)

[5] On utilise ici la transitivité de la "relation" d'équipotence.
[6] À $e \in E$ fixé la partie $\{n \in \mathbb{N} \; ; \; s(e) = n\}$ est bien non vide par surjectivité de s.
[7] En particulier, *les puissances* $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{N}^3$, $\mathbb{N}^4$*... sont dénombrables.*

1. Une récurrence immédiate permet de réduire le nombre de facteurs à deux (pour un, la proposition est tautologique). L'équipotence étant compatible avec le produit cartésien, il suffit de montrer que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable, ce qui découle de[8] l'injectivité de $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \hookrightarrow & \mathbb{N} \\ (a,b) & \mapsto & 2^a 3^b \end{array} \right.$ (on utilise l'unicité de la décomposition en facteurs premiers).

2. Soit D un ensemble fini ou dénombrable, soit $(A_d)_{d\in D}$ une famille d'ensembles finis ou dénombrables indexée par D dont on note la réunion

$$A := \bigcup_{d\in D} A_d.$$

Supposons tout d'abord chaque partie A_d non vide, donc admettant une surjection $\mathbb{N} \twoheadrightarrow A_d$. On dispose alors (grâce à l'axiome du choix[9]) d'une famille (s_d) où s_d est une surjection de $\mathbb{N}$ sur A_d pour chaque $d \in D$.

Montrons alors la surjectivité de l'application

$$s := \left\{ \begin{array}{ccc} D \times \mathbb{N} & \overset{?}{\twoheadrightarrow} & A \\ (d,n) & \mapsto & s_d(n) \end{array} \right. .$$

Soit $a \in A$, soit $d \in D$ tel que $a \in A_d$ (permis par définition de A), soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $s_d(n) = a$ (permis par surjectivité de s_d), on a alors $a = s(d,n)$.

Il suffit pour conclure de montrer que la source de s est finie ou dénombrable : son image $\operatorname{Im} s = A$ sera alors finie ou dénombrable. Pour cela, on évoque une surjection $\mathbb{N} \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} D$ (permis si D est non vide[10]), laquelle induit une surjection $\binom{a}{b} \mapsto \binom{\sigma(a)}{b}$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sur $D \times \mathbb{N}$. Le point précédent montrant la dénombrabilité de $\mathbb{N}^2$, on en déduit celle de $D \times \mathbb{N}$, *c. q. f. d.*

Revenons maintenant au cas général. La partie[11]

$$S := \{d \in D \ ; \ A_d \neq \emptyset\}$$

étant finie ou dénombrable (en tant que partie d'un ensemble fini ou dénombrable), ce qui précède montre que la réunion de la famille $(A_s)_{s\in S}$ est finie ou dénombrable. Or, la partie $\emptyset$ étant neutre pour $\cup$, on a les égalités

$$A = \bigcup_{d\in D} A_d = \bigcup_{d\in S \amalg (D\setminus S)} A_d = \bigcup_{s\in S} A_s \cup \underbrace{\bigcup_{d\in D\setminus S} \underbrace{A_d}_{=\emptyset}}_{=\emptyset} = \bigcup_{s\in S} A_s, \text{ ce qui conclut.}$$

3. L'union considérée est finie ou dénombrable par le point précédent. Incluant chacun de ses réunis, elle inclut le premier – lequel est dénombrable –, donc n'est pas finie.

---

[8] On a même une bijection explicite $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{N}^* \\ (a,b) & \longmapsto & 2^a(2b+1) \end{array} \right.$. Si l'on n'aime pas l'exponentiation, on vérifiera l'injectivité de $(a,b) \mapsto a + (a+b)^2$ (dont on dessinera le graphe).

[9] L'axiome du choix légitime l'interversion des quantificateurs de $\left(\forall d \in D,\ \exists s \in A^{\mathbb{N}},\ \operatorname{Im} s = A_d\right)$ à $\left(\exists s \in \left(A^{\mathbb{N}}\right)^D,\ \forall d \in D,\ \operatorname{Im} s_d = A_d\right)$.

[10] Si D est vide, alors la réunion $A = \emptyset$ est finie ou dénombrable.

[11] La partie S est appelée le ***support*** de la famille $(A_d)_{d\in D}$.

Corollaire (dénombrabilité des relatifs, des rationnels)

Les ensembles $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

Démonstration

On a deux surjections $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z} \\ (a,b) & \mapsto & a-b \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}\times\mathbb{N}^* & \twoheadrightarrow & \mathbb{Q} \\ (a,b) & \mapsto & \frac{a}{b} \end{array} \right.$ depuis deux ensembles dénombrables.

Remarque – **Énumérabilité effective (hors-programme)**. La dénombrabilité est une formalisation du concept intuitif d'*énumérabilité* de l'infini potentiel[12]. À cet égard, une "bonne" preuve de dénombrabilité devrait formaliser une énumération *naturelle* et *effective* : les démonstrations qui précédent montrent que c'est rarement le cas. Les deux énumérations exposées en introduction pourraient pourtant se formaliser grâce aux bijections[13]

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \widetilde{\longrightarrow} & \mathbb{N} \\ z & \longmapsto & 2\,|z| + \mathbf{1}_{\mathbb{Z}^*_-}(z) \\ (-1)^n \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil & \longleftarrow\!| & n \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{ccc} \left\{(a,b)\in\mathbb{N}^2\right\}_{a\geq b} & \widetilde{\longrightarrow} & \mathbb{N} \\ (a,b) & \longmapsto & T_a + b \\ (s, n-T_s) & \longleftarrow\!| & n \in [|T_s, T_{s++1}[\end{array} \right. .$$

De même[14], itérer l'application $x \mapsto \frac{1}{2\lfloor x\rfloor + 1 - x}$ à partir de 1 énumère $\mathbb{Q}_+^*$ suivant un parcours en largeur de l'arbre binaire de racine $\frac{1}{1}$ et tel que les fils de $\frac{a}{b}$ sont $\frac{a}{a+b}$ et $\frac{a+b}{b}$:

$$\begin{array}{cccccccc} & & & 1 & & & & \\ & & & \frac{1}{2} & 2 & & & \\ & & \frac{1}{3} & \frac{3}{2} & \frac{2}{3} & 3 & & \\ \frac{1}{4} & \frac{4}{3} & \frac{3}{5} & \frac{5}{2} & \frac{2}{5} & \frac{5}{3} & \frac{3}{4} & 4 \\ & & & \cdots & & & & \end{array}$$

Le coût est d'ordre technique (trouver les expressions exactes des bijections, vérifier leur bijectivité), le gain est esthétique – et la priorité est la réussite au concours.

Exemple : montrons que les racines (complexes) des polynômes non nuls à coefficients rationnels[15] forment un ensemble dénombrable.

Pour chaque polynôme P, notons $Z(P)$ l'ensemble de ses racines. L'ensemble étudié s'écrit alors

$$\bigcup_{P\in\mathbb{Q}[X]}^{P\neq 0} Z(P) \quad ;$$

[12] Laissons de côté les querelles métaphysiques concernant l'existence ou la nature de l'infini actuel.

[13] On a noté $T_n := \sum_{i=1}^{n} i = \binom{n+1}{2}$ le n-ième nombre triangulaire dont la suite commence par $0, 1, 3, 6, 10 ...$.

[14] On renvoie au magnifique *Proofs from THE BOOK* édité chez Springer (et disponible en français).

[15] Un tel complexe est dit ***algébrique*** car il annule un calcul polynomial, *i. e.* effectué avec les lois de l'*algèbre*.

chaque $Z(P)$ étant fini (pour $P \neq 0$), il suffit d'établir la dénombrabilité de l'ensemble d'indexation

$$\mathbb{Q}[X] \setminus \{0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_n [X] \setminus \{0\} .$$

L'ensemble $\mathbb{N}$ indexant étant dénombrable, il suffit de prouver la dénombrabilité de chaque $\mathbb{Q}_n [X]$. Or, à $n \in \mathbb{N}$ fixé, $\mathbb{Q}_n [X]$ est équipotent à $\mathbb{Q}^{n+1}$, lequel est dénombrable comme puissance finie du dénombrable $\mathbb{Q}$.

Remarque – **Nombres transcendants (culture hors-programme)**. Existe-t-il des nombres non algébriques ? Joseph Liouville fut le premier (dans un article de 1844) à expliciter de tels nombres, dits ***transcendants***[16], par exemple $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n!}}$. *Cf.* également le théorème de Lindemann-Weierstrass (1882, 1885) livrant la transcendance de e et de π (entre autres) ainsi que le théorème de Gelfond-Schneider (1934) pour la transcendance de $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, e^{π}, i^i...

Nous allons maintenant voir que l'ensemble $\mathbb{R}$ est (infini) indénombrable[17]. Les réels algébriques en formant une partie dénombrable, l'ensemble $\mathbb{R}$ contient des nombres transcendants – et même beaucoup plus que d'algébriques ! Cette démonstration d'"existence" demeure toutefois non-explicite (elle n'exhibe aucun nombre transcendant) et à ce titre insatisfaisante. (Ceci étant dit, l'insatisfaction ne serait-elle pas une qualité indispensable pour pratiquer la mathématique ? Ne posséderait-elle pas un rôle moteur dans la recherche[18] ?)

Proposition

Les ensembles $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *et* $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ *ne sont pas dénombrables.*

Démonstration (non exigible)

Preuve 1. Soit $\mathbb{N} \overset{s}{\twoheadrightarrow} \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ une surjection, notons $b \mapsto \overline{b}$ la transposition $(0\ 1)$ et soit N un antécédent par s de la suite $\delta := \left(n \mapsto \overline{s(n)_n}\right)$. On a alors les égalités

$$s(N)_N \overset{s(N)=\delta}{=} \delta_N \overset{\text{déf. de } \delta}{=} \overline{s(N)_N},$$

ce qui est impossible vu que la transposition $(0\ 1)$ n'a pas de point fixe[19].

Preuve 2. Soit $\mathbb{N} \overset{s}{\twoheadrightarrow} \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ une surjection, soit N un antécédent par s de la partie $\Delta := \{n \in \mathbb{N} \ ; \ n \notin s(n)\}$. On a alors les équivalences[20]

$$N \in \Delta \overset{\text{déf. de } \Delta}{\iff} N \notin s(N) \overset{s(N)=\Delta}{\iff} N \notin \Delta, \text{ ce qui est absurde.}$$

[16] Dire qu'un nombre transcendant n'est annulé par aucun polynôme (non nul) pourrait se dire : le degré d'un éventuel polynôme l'annulant doit dépasser chaque degré naturel, *transcende* chaque degré imaginable, d'où la terminologie *transcendant.*

[17] *indénombrable* signifie *non dénombrable* (tout comme *infini* signifie *non fini*)

[18] On pourra à ce propos consulter en ligne le billet intitulé *Impression : Claire Voisin ou la force de l'insatisfaction* posté à l'occasion du Congrès International des Mathématiciens d'Hyderâbâd (août 2010).

[19] La suite $n \mapsto s(n)_n$ décrit la diagonale du tableau $(a, n) \mapsto \left(s(a)_n\right)$. L'***argument diagonal*** consiste, outre une *auto-référence* (ici égaliser $a = n$), à rajouter de l'*anti-réflexivité* (ici les inégalités $\overline{b} \neq b$).

[20] La lectrice pourra vérifier l'identité de ces preuves à travers le prisme de l'équipotence $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \cong$ P $(\mathbb{N})$, la suite "diagonale" δ correspondant à la partie "diagonale" Δ.

Remarque – **Non-énumérabilité effective (culture hors-programme)**. À moins de croire en l'existence de cardinaux infinis (comme la *totalité* des entiers naturels ou la *totalité* des nombres réels[21]), l'argument diagonal ci-dessus ne dit rien de plus que :

Chaque "procédé" engendrant une liste des suites binaires
induit un "procédé" décrivant une suite qui n'est pas dans la liste.

FIG 2 la suite $\overline{a_1}\overline{b_2}\overline{c_3}\overline{d_4}$... n'apparaît pas dans la liste

On rapprochera cette remarque avec la démonstration euclidienne de l'infinitude des nombres premiers, laquelle indique seulement comment *chaque ensemble fini de premiers engendre un premier hors de cet ensemble.*

Corollaire[22]

L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Démonstration (non exigible)

Montrons l'injectivité[23] de l'application $i := \left\{ \begin{array}{ccc} \{0,1\}^{\mathbb{N}} & \overset{?}{\hookrightarrow} & \mathbb{R} \\ (a_n) & \mapsto & \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{3^n} \end{array} \right.$. Soient $a \neq b$ dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et notons $N := \min \{n \in \mathbb{N} \ ; \ a_n \neq b_n\}$. On a alors $\{a_N, b_N\} = \{0,1\}$ et l'on supposera par symétrie $\binom{a_N}{b_N} = \binom{1}{0}$. On a alors les comparaisons d'une part $i(a) = \frac{1}{3^N} + \sum_{n>N} \frac{a_n}{3^n} \geq \frac{1}{3^N}$, d'autre part $i(b) = \sum_{n>N} \frac{b_n}{3^n} \leq \sum_{n>N} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^N}\frac{2}{3} < \frac{1}{3^N}$, d'où l'inégalité $i(a) > i(b)$.

Par conséquent, si $\mathbb{R}$ était dénombrable, il y aurait une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{N}$, donc de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{N}$ (en composant à gauche par i), donc $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ serait dénombrable, ce qui n'est pas le cas d'après la proposition précédente.

Remarque – **Puissance du continu (culture hors-programme)**. Les développements dyadiques *infinis* (donc au besoin impropres) fournissent une bijection explicite des réels de $]0,2]$ avec les parties infinies de $\mathbb{N}$. Un (tout petit) peu de travail permettrait de lever les restrictions « de $]0,2]$ » et « infinies », d'où des équipotences $\mathbb{R} \simeq \{0,1\}^{\mathbb{N}} \cong \mathfrak{P}(\mathbb{N})$.

Application : montrons qu'*aucun intervalle réel n'est dénombrable*[24]. Soit I un intervalle réel. S'il est fini, il n'est alors pas dénombrable ; supposons donc I infini. Il

[21] Pour un commentaire plus "relevé", consulter les *Remarques sur les fondements des mathématiques* de Ludwig Wittgenstein, en particulier le §22 de la deuxième partie (1938).

[22] On doit à Georg Cantor la première preuve de ce résultat, paru en 1874 dans le journal de Crelle. Sans doute pour ne pas trop heurter ses contemporains, Cantor ne fit figurer la non-dénombrabilité de $\mathbb{R}$ qu'en arrière-plan de son article, dont le titre se référait à la dénombrabilité des nombres algébriques (résultat certes important mais bien moins révolutionnaire).

[23] On redémontre ici l'unicité d'un développement tryadique sans "tryales" valant 2.

[24] On pourrait montrer plus précisément que *chaque intervalle infini est équipotent à chaque autre.* Indication pour les intervalles de formes différentes : l'incrémentation $n \mapsto n+1$ induit une bijection

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \{..., \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\} & \xrightarrow{\sim} & \{..., \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\} \\ \frac{1}{n} & \longmapsto & \frac{1}{n+1} \end{array} \right.$$

qui, prolongée ailleurs par l'identité, induit une bijection $[0,1] \xrightarrow{\sim} [0,1[$.

contient alors deux élément distincts, mettons $m < M$, donc inclut (par convexité) l'intervalle $]m, M[$. Or d'une part chaque tel intervalle est équipotent à $]-1, 1[$ *via* la bijection affine

$$\alpha := \left\{ \begin{array}{ccc}]-1,1[& \stackrel{\sim}{\longrightarrow} &]m,M[\\ t & \longmapsto & \frac{M-m}{2}(1+t)+m \end{array} \right. ,$$

d'autre part l'intervalle $]-1, 1[$ est équipotent à l'ensemble $\mathbb{R}$ *via* l'application th ; en composant ces deux bijections avec l'injection canonique $]m, M[\stackrel{i}{\hookrightarrow} I$, on obtient une injection $\mathbb{R} \stackrel{i \circ \alpha \circ \mathrm{th}}{\hookrightarrow} I$. Si l'ensemble I était dénombrable, la source de cette injection serait finie ou dénombrable, ce qui n'est pas le cas puisque $\mathbb{R}$ est infini non dénombrable.

Remarque – **Hypothèse du continu (culture hors-programme)**. Y-a-t-il d'autres puissances entre le dénombrable et le continu ? En d'autres termes, chaque partie infinie de $\mathbb{R}$ est-elle ou bien dénombrable ou bien équipotente à $\mathbb{R}$? L'hypothèse du continu répond par l'affirmative. Cette hypothèse demeure toutefois indécidable par la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel-Choix (un cadre *possible* pour formaliser une grande partie de la mathématique actuelle), au sens où elle est indépendante[25] des axiomes cette théorie (sauf cas trivial où cette dernière prouve une contradiction), un résultat dû à Kurt Gödel (1938) et à Paul Cohen (1963). Loin d'arrêter la question, cette indécidabilité motive plutôt la recherche de nouveaux axiomes ensemblistes pertinents[26], comme nous en parle si bien Gödel dans son article *What is Cantor's Continuum Problem ?* (1947) :

There might exist axioms so abundant in their verifiable consequences, shedding so much light upon a whole discipline, and furnishing such powerful methods for solving given problems (and even solving them, as far as possible, in a constructivistic way) that quite irrespective of their intrinsic necessity they would have to be assumed at least in the same sense as any established physical theory.

Exercices d'application

1. *Déterminer les applications* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *continues telles que* $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.
2. *Soit* $(a_i)_{i \in I}$ *une famille de réels strictement positifs dont les sommes sur les parties finies de* I *forment une partie bornée. Montrer que l'ensemble indexant* I *est fini ou dénombrable.*
3. *Soit* E *un espace vectoriel normé non nul et soit* $A \subset E$ *une partie finie ou dénombrable.*
   (a) *Montrer que* A *est d'intérieur vide*
   (b) *(plus difficile) On impose que* E *ne soit pas une droite. Montrer alors que* $E \setminus A$ *est connexe par arcs. (On pourra considérer une infinité indénombrable de chemins entre deux points donnés.)*

[25] Un énoncé est ***indépendant*** d'un système d'axiomes si ce dernier ne prouve ni cet énoncé ni sa négation. Par exemple, l'énoncé d'abélianité est indécidable par la théorie des groupes car il y a des groupes non abéliens (l'énoncé n'est donc pas prouvable) et il y a des groupes abéliens (l'énoncé n'est donc pas réfutable).

[26] Pour un bagage culturel abordable sur l'étude ensembliste de l'infini, on consultera avec profit les exposés de Patrick Dehornoy sur le sujet (disponibles sur sa page web).

4. *Soit $(I_d)_{d\in D}$ une famille d'intervalles infinis deux à deux disjoints. Montrer que D est fini ou dénombrable.*

---

1. Soit une telle application. D'une part, $\mathbb{Q}$ étant fini ou dénombrable, son image directe par chaque application de source $\mathbb{R}$ (*a fortiori* f) est toujours finie ou dénombrable. D'autre part, l'inclusion donnée en hypothèse permet d'affirmer que $f(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ est aussi fini ou dénombrable (car inclus dans un dénombrable). L'image de f est donc finie ou dénombrable, donc ne saurait inclure aucun intervalle infini. Puisque f est continue, elle doit (par le théorème des valeurs intermédiaires) être constante (et rationnelle puisque $f\left(\sqrt{2}\right)\in\mathbb{Q}$).

   Réciproquement, pour chaque rationnel r, l'application partout égale à r convient.

2. Soit M un majorant des sommes considérées. Pour chaque naturel $n>0$, l'ensemble
$$I_n := \left\{ i\in I\ ;\ a_i > \frac{1}{n} \right\}$$
ne peut contenir strictement plus de Mn éléments (sinon de tels éléments formeraient une partie F finie qui induirait les minorations $M \geq \sum_{f\in F} a_f \geq \frac{1}{n}\operatorname{Card} F > M$), donc est fini. La réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$ est donc finie ou dénombrable ; or elle vaut[27] tout I, ce qui conclut.

   Remarque. En imposant la famille seulement *positive*, on montrerait alors que son ***support*** défini par $\{i\in I\ ;\ a_i\neq 0\}$ est au plus dénombrable.

3.
   (a) Soit par l'absurde $a\in\mathring{A}$, soit $r>0$ un réel tel que $\mathring{\mathcal{B}}(a,r)\subset A$ et soit $u\in E$ un vecteur unitaire (permis car $E\neq\{0\}$). L'application $t\mapsto a+r(\operatorname{th} t)\,u$ injecte alors $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $]a-ru,a+ru[\ \subset \mathring{\mathcal{B}}(a,r)\subset A$, ce qui est absurde car $\mathbb{R}$ est infini non dénombrable et A est finie ou dénombrable. (*Sanity check* : lorsque $\binom{E}{A}=\binom{\mathbb{R}}{\mathbb{Q}}$, on retrouve la vacuité de l'intérieur $\mathring{\mathbb{Q}}$.)

   (b) Soient $p\neq q$ deux points dans $E\setminus A$, soit $D\subset E$ une droite ne contenant ni p ni q (permis car E n'est pas inclus dans une droite) et pour chaque $d\in D$ notons $c_d:[0,1]\longrightarrow E$ le chemin obtenu en concaténant la ligne droite de p à d et celle de d à q. Bien observer que les images $C_d := c_d\,(]0,1[)$ sont deux à deux disjointes lorsque d décrit D.

   FIG les chemins c_d

   Si aucun de ces chemins continus ne reste à valeurs dans $E\setminus A$, l'image C_d rencontre alors A pour chaque $d\in D$, d'où (*via* l'axiome du choix) une famille $a\in A^D$ telle que $\forall d\in D,\ a_d\in C_d$. L'application a est alors injective (par disjonction des C_d), de source D infinie indénombrable (car D est équipotent à $\mathbb{R}$) et de but A finie ou dénombrable (par hypothèse), ce qui est absurde.

[27] On a pour chaque réel ρ l'équivalence $\rho>0\iff\exists n\in\mathbb{N}^*,\ \rho>\frac{1}{n}$

Sanity check : lorsque $\binom{E}{A} = \binom{\mathbb{R}^2}{\mathbb{Q}^2}$, on retrouve la connexité par arcs de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$.(*cf.* ChapEvn2page ? ? ?).

4. Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération des rationnels. Soit $d \in D$: puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il rencontre chacun de ses ouverts non vides, en particulier[28] l'intérieur de I_d, donc l'intervalle I_d contient r_n pour un certain $n \in \mathbb{N}$, ce qui donne sens au plus petit $N \in \mathbb{N}$ tel que $r_N \in I_d$. L'application

$$i := \left\{ \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ d & \longmapsto & \min \{n \in \mathbb{N} \ ; \ r_n \in I_d\} \end{array} \right.$$

fait par conséquent sens et il suffit pour conclure de montrer son injectivité.

Soient d et δ dans D tels que $i(d) = i(\delta)$. Le rationnel $r_{i(d)} = r_{i(\delta)}$ tombe alors dans I_d (par définition de $i(d)$) et dans I_δ (par définition de $i(\delta)$), donc l'intersection $I_d \cap I_\delta$ est non vide, ce qui force (par l'hypothèse de disjonction) l'égalité $d = \delta$.

Remarque. L'injection i pourrait avoir l'air de tomber du ciel : motivons son introduction. Elle cache en fait une façon de "choisir" un rationnel dans chaque I_d. À ce titre, le seul intérêt de l'application min est d'être une application[29]

$$c : \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow \mathbb{N} \text{ telle que } \forall P \in \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\} \ , \ c(P) \in P.$$

Un tel c est appelé une ***application de choix*** sur $\mathbb{N}$ car elle nous permet de "choisir" un élément dans chaque partie (non vide) de $\mathbb{N}$: il suffit pour cela d'appliquer l'application de choix c sur une telle partie.

Il est alors aisé de vérifier que chaque bijection φ de source $\mathbb{N}$ (à l'instar de $n \mapsto r_n$) fournit par conjugaison une application de choix $\varphi \circ c \circ \varphi^{-1}$ sur $\varphi(\mathbb{N})$. L'ensemble $\mathbb{Q}$ admet donc (comme chaque ensemble dénombrable) une application de choix.

Une démarche claire se dessine alors pour résoudre notre exercice : choisir (à l'aide d'une application de choix[30]) un rationnnel dans chaque I_d (permis par densité de $\mathbb{Q}$ dans chaque I_d) et montrer l'injectivité de cette application "de choix"

$$\mathcal{C} := \left\{ \begin{array}{ccc} D & \overset{?}{\hookrightarrow} & \mathbb{Q} \\ d & \longmapsto & C(I_d \cap \mathbb{Q}) \end{array} \right. \quad \text{(où } C \text{ dénote une application de choix sur } \mathbb{Q}\text{)}$$

en utilisant les appartenances $\mathcal{C}(d) \in I_d$ et la disjonction des I_d deux à deux. Lorsque $\left\{ \begin{array}{l} \varphi = [n \mapsto r_n] \\ C = \varphi \circ \min \circ \varphi^{-1} \end{array} \right.$, la lectrice pourra vérifier l'égalité $\mathcal{C} = \varphi \circ i$ et retrouvera ainsi (*modulo* la bijection φ) la solution ci-dessus.

---

[28] Chaque intervalle infini inclut un segment $[m, M]$ pour certains réels $m < M$, donc l'intérieur d'un tel intervalle inclut l'ouvert $]m, M[$ non vide.

[29] L'appartenance $c(P) \in P$ signifie « P contient comme élément son image par c ».

[30] La lectrice pourra également vérifier que l'application qui à un intervalle de bornes $m < M$ associe le rationnel $\frac{\left\lceil m \left\lceil \frac{1}{M-m} \right\rceil \right\rceil}{\left\lceil \frac{1}{M-m} \right\rceil}$ permet explicitement de "choisir" un rationnel dans chaque intervalle borné.

2 Familles sommables

On se placera dans l'ensemble $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ muni de l'addition et de l'ordre réels prolongés par l'absorbance et la maximalité de ∞ :

$$\forall a \in \overline{\mathbb{R}}_+, \ (a + \infty = \infty \text{ et } a \leq \infty).$$

On peut également prolonger la multiplication réelle tout en conservant sa distributivité sur l'addition à condition d'imposer $0\infty = 0$.

On évoque pour toute cette section un ensemble $\mathcal{D}$ dénombrable sur lequel nous allons sommer, appelé ***domaine***[31] ***de sommation***.

2.1 Familles positives

On fixe une famille $(a_d)_{d\in\mathcal{D}}$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Définition

La famille (a_d) est dite ***sommable*** *si l'ensemble suivant est une partie de $\mathbb{R}$ majorée :*

$$\left\{\sum_{d\in D} a_d \ ; \ D \subset \mathcal{D} \text{ et } D \text{ fini}\right\}.$$

Dans ce cas, la borne supérieure de cet ensemble est appelé la ***somme*** *de la famille a. Dans le cas contraire, ∞ est appelé la* ***somme*** *de la famille a.*

Dans tous les cas, la somme de la famille a est notée[32]

$$\sum_{d\in\mathcal{D}} a_d \quad \text{ou} \quad \sum_{\mathcal{D}} a.$$

Exemple : si a est la famille nulle, l'ensemble des sommes sur les parties finies de $\mathcal{D}$ est réduit au singleton $\{0\}$, lequel est majoré et a pour borne supérieure 0. On en déduit que *la famille nulle est sommable de somme nulle* :

$$\sum_{\mathcal{D}} 0 = 0.$$

Vocabulaire : dans une somme $\sum_{\mathcal{D}} a = \sum_{d\in\mathcal{D}} a_d$, ce que l'on somme est appelé la ***sommande***[33] (ici la famille des a_d).

REMARQUES

[31] "$\mathcal{D}$" comme "**d**omaine **d**énombrable"

[32] La notation $\sum_{\mathcal{D}} a$ (moins courant, plus concis) est à rapprocher de celle $\int_S f = \int_{s\in S} f(s)\, ds$.

[33] *Rappel* : dans une intégrale $\int_S f = \int_{s\in S} f(s)\, ds$, ce que l'on intègre est appelé l'***intégrande*** (ici la fonction f).

• Si la famille a n'est pas sommable, la borne supérieure de la définition est infinie. On aura donc toujours (que a soit sommable ou non) l'égalité[34]

$$\sum_{d\in\mathcal{D}} a_d = \sup_{D\subset\mathcal{D}}^{D \text{ fini}} \sum_{d\in D} a_d.$$

• *La famille a est sommable ssi sa somme est finie* :

$$\sum_{d\in\mathcal{D}} a_d \begin{cases} < \infty \text{ si } a \text{ est sommable} \\ = \infty \text{ si } a \text{ n'est pas sommable} \end{cases}.$$

• Quand $\mathcal{D}$ est fini, la borne supérieure ci-dessus est un *maximum*, ce qui montre la cohérence de la notation $\sum_{\mathcal{D}}$. Les propriétés du *supremum* vont ainsi permettre de propager les propriétés des sommes sur des domaines finis (*cf.* propriétés suivantes).

• Quand $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable ssi la série $\sum a_n$ converge et l'on a dans tous les cas l'égalité[35]

$$\begin{array}{c}\text{somme de la série} \\ \text{(une limite)}\end{array} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \quad \begin{array}{c}\text{somme de la famille} \\ \text{(une borne supérieure)}\end{array}.$$

Propriétés (hors-programme)

Soient $b \in \overline{\mathbb{R}}_+^{\mathcal{D}}$ une famille et $\mathfrak{d}$ un ensemble.

1. **(invariance par permutation)** *Pour chaque permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathcal{D})$, on a l'égalité*
$$\sum_{d\in\mathcal{D}} a_{\sigma(d)} = \sum_{d\in\mathcal{D}} a_d.$$

2. **($\mathbb{R}_+$-linéarité)** *Pour chaques réels λ, μ positifs*[36]*, on a l'égalité*
$$\sum_{\mathcal{D}} (\lambda a + \mu b) = \lambda \sum_{\mathcal{D}} a + \mu \sum_{\mathcal{D}} b.$$

3. **(croissances)** *On a les implications*[37]
$$a \leq b \Longrightarrow \sum_{\mathcal{D}} a \leq \sum_{\mathcal{D}} b \quad \text{et} \quad \mathfrak{d} \subset \mathcal{D} \Longrightarrow \sum_{\mathfrak{d}} a \leq \sum_{\mathcal{D}} a.$$

4. **(associativité)** *Pour chaque partition $\mathcal{D} = \coprod_{i\in I} D_i$, on a l'égalité*[38]
$$\boxed{\textstyle\sum_{\mathcal{D}} a = \sum_{i\in I} \sum_{\mathcal{D}_i} a}.$$

[34] L'intérêt du cadre $\overline{\mathbb{R}}_+$ est de donner sens à la borne supérieure de chaque partie grâce à la maximalité de ∞. Une partie de $\mathbb{R}$ non majorée aura ainsi pour borne supérieure ∞. (Pour les pointilleux, la partie vide a pour borne supérieure $\min \overline{\mathbb{R}}_+ = 0$.)

[35] Proposition démontrée plus tard.

[36] Il n'y a pas de négatifs (stricts) dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

[37] En d'autres termes, l'"opérateur" $\sum$ est une application croissante de la sommande (*ce qu'*on somme) mais également du domaine de sommation (*où* l'on somme).

[38] Résultat *essentiel*, le plus utilisé du chapitre sur les familles sommables !

Démonstration : hors-programme. (Tout se démontre sans difficulté à l'aide d'arguments de sup – de "bornes **sup**érieures" comme de "mathématique **sup**érieure".)

Remarques

• D'après le point (3), *si la famille* (a_d) *contient*[39] *un terme infini, alors sa somme est infinie.* Plus généralement, *la famille* (a_d) *n'est pas sommable si elle contient une sous-famille non-sommable.*

• Toujours d'après le point (3), *si la famille* (a_d) *est sommable, alors chacune de ses sous-familles est sommable.*

• *Rajouter des termes nuls ne change pas la somme.* Autrement dit, on a l'égalité[40]

$$\sum_{\mathcal{D}} a = \sum_{\mathcal{D}'} a \qquad \begin{array}{c} \text{où } \mathcal{D}' := \{d \in \mathcal{D} \; ; \; a_d \neq 0\} \\ \text{(appelé le } \textbf{\textit{support}} \text{ de la famille } a) \end{array}$$

(appliquer l'associativité aux deux parts $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D} \backslash \mathcal{D}'$).

• En termes intuitifs, le point (4) affirme que, pour additionner des réels positifs, on peut les regrouper par "paquets", additionner les réels de chaque "paquet" puis additionner les sommes des "paquets" obtenues[41]. Dans le cas d'une partition dénombrable (où $I = \mathbb{N}$), on obtient avec un peu de "détricotage" le théorème de sommation par paquets (énoncé après les exemples). En pratique, ce sont la croissance et l'associativité qui servent pour étudier des sommabilités et calculer des sommes.

*Exemple*s

1. La famille $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sommable ssi $\alpha > 1$ (Riemann), sa somme est alors notée[42]

   $$\zeta(\alpha) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \qquad \text{(l'application } \zeta \text{ s'appelle la } \textbf{\textit{fonction (d)zêta de Riemann}}\text{)}.$$

2. La famille $(q)_{q \in \mathbb{Q}_+}$ n'est pas sommable car elle contient la sous-famille $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ non sommable (cas $\alpha = -1$).

3. La famille $(q)_{q \in \mathbb{Q}_+}^{q<1}$ n'est pas sommable car les inverses des naturels (non nuls) en forment une sous-famille non sommable (cas $\alpha = 1$). *Idem* en remplaçant $[0, 1]$ par n'importe quel voisinage positif de 0 (valeur d'adhérence de la suite $n \mapsto \frac{1}{n}$).

4. La famille $\left(\frac{1}{q^2}\right)_{q \in \mathbb{Q}}^{q>1}$ n'est pas sommable vu les minorations[43]

$$\sum_{q \in \mathbb{Q}}^{q>1} \frac{1}{q^2} \geq \sum_{q \in \mathbb{Q}}^{1<q<\sqrt{42}} \frac{1}{q^2} \geq \sum_{q \in \mathbb{Q}}^{1<q<\sqrt{42}} \frac{1}{42} = \frac{1}{42} \operatorname{Card}\left(\mathbb{Q} \cap \left]1, \sqrt{42}\right[\right) = \infty.$$

[39] Le lecteur doit être familier des abus de langage confondant *familles* et *ensembles* : en toute rigueur, il est insensé qu'une famille *contienne* une valeur (un *ensemble* le pourrait), ce que l'on veut alors exprimer est qu'elle *atteint* une valeur.

[40] L'exercice d'application (b) section 1.2 montre que le support $\mathcal{D}'$ est fini ou dénombrable quand a est sommable, ce qui éclairera la dénombrabilité de $\mathcal{D}$ imposée par le programme.

[41] C'est pourquoi l'associativité est parfois qualifiée de propriété de *sommation par paquets*.

[42] *Culture* : on a les égalités $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ et pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ l'image $\zeta(2n)$ est un multiple rationnel de π^n.

[43] On utilise ici la croissance en le domaine puis en la sommande.

5. *(plus difficile)* Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une énumération des rationnels. Pour chaque réel t, la famille $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{r_n<t}$ est sommable comme sous-famille de la famille sommable $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, ce qui donne sens à l'application $t \mapsto \sum_{r_n<t}\frac{1}{n^2}$. Cette dernière croît sur $\mathbb{R}$ (par croissance en le domaine de sommation) et est même *strictement* croissante : étant donnés deux réels $a<b$, il y a par densité un rationnel entre les deux, mettons $a<r_N<b$ pour un certain naturel N, d'où

$$f(b)=\sum_{r_n<b}\frac{1}{n^2}\underset{\text{le domaine}}{\overset{\text{croissance en}}{\geq}}\sum_{r_n\leq r_N}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{N^2}+\sum_{r_n<r_N}\frac{1}{n^2}\overset{N^{-2}>0}{>}f(r_N)\overset{f\text{ croît}}{\geq}f(a).$$

Ce qui précède montre d'ailleurs pour chaque naturel n l'implication $\forall t>r_n,\ f(t)\geq f(r_n)+\frac{1}{n^2}$, empêchant la continuité de f en r_n. Finalement, le graphe de f fait un "bond" en chaque rationnel alors que ces derniers sont denses dans $\mathbb{R}$, ce qui est très contre-intuitif[44] !

Théorème de sommation par paquets[45]

*Soit $(\mathcal{D}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition dénombrable de $\mathcal{D}$. On impose chaque a_d fini (*i. e. $a\in\mathbb{R}_+^{\mathcal{D}}$*). La famille $(a_d)_{d\in\mathcal{D}}$ est alors sommable ssi, pour chaque naturel n, la famille $(a_d)_{d\in\mathcal{D}_n}$ est sommable et si la série $\sum\left(\sum_{d\in\mathcal{D}_n}a_d\right)$ converge. Dans ce cas, sa somme vaut*

$$\boxed{\sum_{d\in\mathcal{D}}a_d=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{d\in\mathcal{D}_n}a_d}.$$

Démonstration : hors programme (découle de l'associativité de la sommation des familles à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$).

Remarque – **Domaine de sommation**. Pourquoi avons-nous appelé *domaine* l'ensemble sur lequel on somme ? Il est important de *voir* ce dernier et de le *faire voir*, afin de *visualiser* et de *faire visualiser* d'éventuelles partitions. Il est ainsi beaucoup plus clair de dire

« *On partitionne $\mathbb{N}^2$ selon ses droites de pentes -1, d'où* $\displaystyle\sum_{x,y\geq 0}a_{x,y}=\sum_{n\geq 0}\sum_{x+y=n}a_{x,y}$ »

accompagné du dessin ci-bas[46] plutôt que de passer par des méandres formels comme

« *Avec la partition finie ou dénombrable* $\mathbb{N}=\coprod_{n\in\mathbb{N}}\left\{(u,v)\in\mathbb{N}^2\ /\ u+v=n\right\}$, *le théorème précédent donne* $\sum_{(x,y)\in\mathbb{N}^2}a_{x,y}=\sum_{n\in\mathbb{N}}\ \sum_{(x,y)\in\coprod_{n\in\mathbb{N}}\{(u,v)\in\mathbb{N}^2\ /\ u+v=n\}}a_{x,y}$ ».

[44] Ce "paradoxe" doit simplement nous avertir de ne pas confondre les propriétés *topologiques* des parties de $\mathbb{R}$ (comme la densité des rationnels) avec les propriétés concernant leur *mesure* (par exemple le fait que $\mathbb{Q}$ – comme chaque partie dénombrable – est de mesure nulle). Dans le même genre, on pourra établir que la réunion des segments $\left[r_n-\frac{1}{n^2},r_n+\frac{1}{n^2}\right]$ ne vaut pas tout $\mathbb{R}$. Encore plus étonnant (pour les curieuses du hors-programme) : les paradoxes de Banach–Tarski (1924) et de Dougherty–Foreman (1992).

[45] C'est en énonçant et en essayant de démontrer ce théorème qu'apparaît le caractère idoine du cadre $\overline{\mathbb{R}}_+$.

[46] FIG 3 : partition de $\mathbb{N}^2$ en droites de pentes -1

C'est pour faire implicitement appel à notre *visualisation* de l'ensemble concerné que nous parlons du *domaine* de sommation.

Exemples

1. La famille $\left(\frac{1}{a^2b^2}\right)_{a,b\in\mathbb{N}^*}$ est-elle sommable ? Partitionner $\mathbb{N}^{*2}$ en droites verticales[47] permet de calculer la somme

$$\sum_{a,b\geq 1}\frac{1}{a^2b^2}\underset{\substack{\text{abscisse}\\\text{fixée } n}}{\overset{\text{sommer à}}{=}}\sum_{n\geq 1}\sum_{\substack{a=n\\b\geq 1}}\frac{1}{a^2b^2}=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{a=n\\b\geq 1}}\frac{1}{b^2}=\left(\zeta\left(2\right)\right)^2=\frac{\pi^4}{36}.$$

La famille étudiée est donc sommable (sinon sa somme, qu'on vient de calculer, vaudrait ∞) de somme $\frac{\pi^4}{36}$.

Plus généralement, on retiendra *pour chaques suites* (x_n) *et* (y_n) *de* $\overline{\mathbb{R}}_+^{\mathbb{N}}$ *l'égalité*

$$\boxed{\sum_{a,b\in\mathbb{N}^2}x_ay_b=\sum_{a\in\mathbb{N}}x_a\sum_{b\in\mathbb{N}}y_b}.$$

2. La famille $\left(\frac{1}{a^2+b^2}\right)_{a,b\in\mathbb{N}^*}$ est-elle sommable ? Les minorations $\frac{1}{a^2+b^2}\geq\frac{1}{(a+b)^2}$ suggèrent[48] de partitionner $\mathbb{N}^{*2}$ en droites de pente -1, d'où les minorations[49]

$$\begin{aligned}\sum_{a,b\geq 1}\frac{1}{a^2+b^2} &\geq \sum_{a,b\geq 1}\frac{1}{\left(a+b\right)^2}=\sum_{n\geq 2}\sum_{a+b=n}^{a,b\geq 1}\frac{1}{\left(a+b\right)^2}=\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2}\sum_{a+b=n}^{a,b\geq 1}1\\ &= \sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2}\left(n-1\right)\geq\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2}\frac{n}{2}\geq\frac{1}{2}\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n}=\infty.\end{aligned}$$

S'il restait un doute pour évaluer $\sum_{a+b=n}^{a,b\geq 1}1$ (somme-t-on sur des *paires* ou des *couples* ?), lever les abus de notations le dissipera (la famille de départ est bien indexée par des *couples*).

3. Soit $\rho\in\mathbb{R}$: à quelle condition simple la famille $\left(\frac{1}{a^\rho+b^\rho}\right)_{a,b\in\mathbb{N}^*}$ est-elle sommable ? Vu le point précédent et la croissance en la sommande, on doit avoir $\rho>2$. Réciproquement, si $\rho>2$, on a les majorations[50]

$$2\sum_{a,b\geq 1}\frac{1}{a^\rho+b^\rho}\leq\sum_{a,b\geq 1}\frac{1}{\sqrt{a^\rho b^\rho}}=\sum_{a,b\geq 1}\frac{1}{a^{\frac{\rho}{2}}b^{\frac{\rho}{2}}}=\zeta\left(\frac{\rho}{2}\right)^2\underset{\text{car }\frac{\rho}{2}>1}{\overset{\text{Riemann}}{<}}\infty.$$

[47] FIG 4 partition de $\mathbb{N}^2$ en droites verticales

[48] C'est la présence de $a+b$ dans la sommande qui incite à partitionner à $a+b$ fixé.

[49] La minoration $n-1\geq\frac{n}{2}$ équivaut à $\frac{n}{2}\geq 1$, *i. e.* à $n\geq 2$, ce qu'on a.

[50] On a utilisé la ***comparaison arithmético-géométrique*** $u+v\geq 2\sqrt{uv}$, valide (car équivalente à $\left(\sqrt{u}-\sqrt{v}\right)^2\geq 0$) pour chaques réels $u,v\geq 0$. On a plus généralement

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

valide (par concavité de ln) pour chaque famille $a\in\mathbb{R}_+^n$.

4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$: à quelle condition simple la famille $\left(\frac{1}{(a+b)^\lambda}\right)_{a,b\in\mathbb{N}^*}$ est-elle sommable ? On a vu plus haut que ce n'est pas le cas quand $\lambda = 2$: vu la croissance en la sommande, on doit avoir $\lambda > 2$. Réciproquement, si $\lambda > 2$, les comparaisons arithmético-géométriques donnent (avec la décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t^\lambda}$vu que $\lambda > 0$) les majorations $\frac{1}{(a+b)^\lambda} \leq \frac{1}{\left(2\sqrt{ab}\right)^\lambda}$ et on finit comme dans l'exemple précédent en majorant la somme par $\frac{1}{2^\lambda}\zeta\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2$.

5. La famille $\left(\frac{1}{ab(a+b)}\right)_{a,b\in\mathbb{N}^*}$ est-elle sommable ? Partitionner $\mathbb{N}^{*2}$ en droites de pente -1 donne[51]

$$\begin{aligned} \sum_{a,b\geq 1}\frac{1}{ab(a+b)} &= \sum_{n\geq 2}\sum_{a+b=n}\frac{1}{ab(a+b)} = \sum_{n\geq 2}\sum_{0<a<n}\frac{1}{a(n-a)n} \\ &= \sum_{n\geq 2}\frac{1}{n}\sum_{0<a<n}\left(\frac{1}{n-a}+\frac{1}{a}\right)\frac{1}{n} = \sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2}\left(\sum_{0<b<n}\frac{1}{n-b}+\sum_{0<a<n}\frac{1}{a}\right) \\ &= \sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2}2\sum_{0<c<n}\frac{1}{c} = 2\sum_{n\geq 2}\frac{H_{n-1}}{n^2} \end{aligned}$$

où (H_n) désigne la série harmonique. Or $H_{n-1} = H_n - \frac{1}{n} = O(\ln n) + o(1) = O\left(\sqrt{n}\right)$, donc $\frac{H_{n-1}}{n^2} = O(\frac{1}{n^{3/2}})$ et la somme trouvée converge par RIEMANN.

6. Montrons que la famille $\left(\frac{1}{a^2+b^2}\right)_{a,b\in\mathbb{N}^*}^{(a,b)\neq(0,0)}$ n'est pas sommable à l'aide d'une minoration par une intégrale double. La forme du dénominateur x^2+y^2 suggère un reparamétrage en polaires[52] : pour chaque naturel $N \geq 1$, on a les minorations et tendance

$$\begin{aligned} \sum_{0\leq a,b<N}^{(a,b)\neq(0,0)}\frac{1}{a^2+b^2} &\geq \sum_{0\leq a,b<N}^{(a,b)\neq(0,0)}\iint_{[a,a+1]\times[b,b+1]}\frac{dx\ dy}{x^2+y^2} = \iint_{[0,N]^2\setminus[0,1]^2}\frac{dx\ dy}{x^2+y^2} \\ &\geq \iint_{\mathcal{B}_N}\frac{dx\ dy}{x^2+y^2} = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=\sqrt{2}}^{\sqrt{N}}\frac{r\ dr\ d\theta}{r^2} = \frac{\pi}{4}\ln\frac{N}{2} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \infty. \end{aligned}$$

On retrouve l'exemple (2) car la sous-famille indexée par le bord $\{0\}\times\mathbb{N}^* \cup \mathbb{N}^*\times\{0\}$ a pour somme $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \zeta(2)$ qui est finie.

7. *(plus difficile)* Soit $\rho \in \mathbb{R}$: à quelle condition simple la famille $\left(\frac{1}{(a+b^2+c^3)^\rho}\right)_{a,b,c\in\mathbb{N}^*}$

[51] L'égalité $\sum_{0<b<n}\frac{1}{n-b} = \sum_{0<c<n}\frac{1}{c}$ (à $n \geq 2$ fixé) vient du reparamétrage $c := n-b$.

[52] FIG 5 la bande circulaire $\mathcal{B}_N$ de $[0,N]^2$

est-elle sommable ? Regroupons les termes à $a+b^2+c^3 =: n$ fixé puis à b, c fixés :

$$\begin{aligned}
\sum_{a,b,c\geq 1} \frac{1}{(a+b^2+c^3)^\rho} &= \sum_{n\geq 3} \frac{1}{n^\rho} \sum_{b,c\geq 1} \sum_{a\geq 1} \begin{cases} 1 \text{ si } b^2+c^3 = n-a \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \\
&= \sum_{n\geq 3} \frac{1}{n^\rho} \sum_{b,c\geq 1} \begin{cases} 1 \text{ si } b^2+c^3 \leq n-1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \\
&\underset{N:=n-1}{\overset{\text{reparamétrage}}{=}} \sum_{N\geq 2} \frac{\operatorname{Card}\left\{(b,c)\in\mathbb{N}^{*2} \ ; \ b^2+c^3\leq N\right\}}{(N+1)^\rho} \\
&= \sum_{N\geq 2} \frac{C_N}{(N+1)^\rho} \text{ où } C_N \text{ dénote le cardinal au numérateur.}
\end{aligned}$$

On approche alors le cardinal C_N, lequel compte le nombre de points à coordonnées entières dans le domaine du premier quadrant d'équation $X^2+Y^3\leq N$, par l'*intégrale* du dit-domaine[53]. L'équation suggère fortement – afin de passer en polaires – le reparamétrage[54] $(x,y) := \left(X, Y^{\frac{2}{3}}\right)$:

$$\begin{aligned}
I_N :=\ & \iint_{X^2+Y^3\leq N}^{X,Y\geq 0} dX\ dY \underset{(x,y):=\left(X,Y^{\frac{2}{3}}\right)}{\overset{\text{reparamétrage}}{=}} \iint_{x^2+y^2\leq N} \frac{2\ dx\ dy}{3\sqrt[3]{y}} \underset{\text{en polaires}}{\overset{\text{reparamétrage}}{=}} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{\sqrt{N}} \frac{2r\ dr\ d\theta}{3\sqrt[3]{r\sin\theta}} \\
=\ & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{-\frac{1}{3}} \int_0^{\sqrt{N}} r^{\frac{2}{3}} dr = C\sqrt{N}^{\frac{2}{3}+1} \\
=\ & CN^{\frac{5}{6}} \qquad \text{pour un certain réel } C>0 \text{ indépendant de } N.
\end{aligned}$$

Or, en faisant "tomber" une ligne de $\left\lceil\sqrt{N}\right\rceil$ carrés unité sur la frontière du domaine d'intégration[55] puis en y "projetant" une colonne de $\left\lceil\sqrt[3]{N}\right\rceil$ carrés unité, on obtient l'encadrement

$$I_N < C_N < I_N + \underbrace{\left\lceil\sqrt{N}\right\rceil + \left\lceil\sqrt[3]{N}\right\rceil}_{=o\left(\sqrt{N}\right)=o\left(N^{\frac{5}{6}}\right)=o(I_N)} \text{, d 'où l'équivalence } C_N \overset{N\to\infty}{\sim} I_N.$$

La série étudiée a donc un terme général (positif) équivalent à $C\frac{N^{\frac{5}{6}}}{N^\rho}$, donc converge ssi $\rho-\frac{5}{6}>1$ (par Riemann), *i. e.* ssi $\rho>\frac{11}{6}$.

Proposition (suites sommables & séries convergentes)

Quand $\mathcal{D}=\mathbb{N}$, la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable ssi la série $\sum a_n$ converge et l'on a dans ce cas l'égalité

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

[53] FIG 6 Le domaine $X^2+Y^3\leq N$ et la majoration $C_N\leq I_N$

[54] Le paramétrage étant bijectif, on peut écrire $dY = d\left(y^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{y}dy$.

[55] FIG 7 la majoration $I_N < C_N + \left\lceil\sqrt{N}\right\rceil + \left\lceil\sqrt[3]{N}\right\rceil$

Démonstration

Pour chaque $N \in \mathbb{N}$, abrégeons

$$A_N := \sum_{n=0}^{N} a_n \qquad \text{et} \qquad S := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

Les a_n étant positifs, la divergence de la série $\sum a_n$ équivaut à la tendance $A_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ et même à l'égalité $\lim_{n\to\infty} A_n = \infty$. Si l'égalité à montrer était vérifiée dans tous les cas (que a soit sommable ou non), on conclurait *via* les équivalences[56]

$$a \text{ sommable} \iff S < \infty \iff \lim_{n\to\infty} A_n < \infty \iff \sum a_n \text{ converge.}$$

Il suffit par conséquent d'établir cette égalité.

Tout d'abord, pour chaque $N \in \mathbb{N}$, la somme S majore A_N vu l'inclusion $[0, N|] \subset \mathcal{D}$ et la croissance de $\sum$ en le domaine de sommation.

Soit par ailleurs $s < S$. Par caractérisation[57] du *supremum* S, soit $D \subset \mathcal{D}$ fini tel que $s < \sum_D a$. Le naturel $\max D$ fait sens car D est fini. L'inclusion $D \subset [0, \max D|]$ et la croissance de $\sum$ en le domaine de sommation permettent alors de majorer

$$s < \sum_{d\in D} a_d \leq \sum_{d=0}^{\max D} a = A_{\max D}.$$

De la conjonction « S majore $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\forall s < S,\ \exists n \in \mathbb{N},\ s < A_n \leq S$ », il résulte que S vaut la borne supérieure des A_n lorsque n décrit $\mathbb{N}$; or cette borne supérieure n'est autre que limite de la suite croissante (A_n), ce qui conclut.

Exercices d'application

1. *Montrer que la série* $\sum (\zeta(n) - 1)$ *définie à partir du rang* 2 *converge et calculer sa somme.*
2. *Soient* $a, b > 0$ *deux réels. Étudier la sommabilité de la famille* $\left(\frac{1}{a^k + b^\ell}\right)_{k,\ell\in\mathbb{N}^*}$.
3. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Étudier la sommabilité de la famille* $\left(\frac{1}{(k+\ell^2)^\alpha}\right)_{k,\ell\in\mathbb{N}^*}$.
4. *Soit* (D_n) *une suite croissante de parties finies de* $\mathcal{D}$ *dont la réunion vaut*[58] $\mathcal{D}$. *Montrer que chaque partie finie de* $\mathcal{D}$ *est incluse à partir d'un certain rang dans chaque* D_n *puis en déduire la tendance*

$$\sum_{D_n} a \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{\mathcal{D}} a.$$

[56] *Rappel* : la somme d'une série *positive* divergente est par définition ∞.

[57] *Rappel* : étant donnés un élément S et une partie A d'un ensemble *totalement* ordonné, on a l'équivalence

$$S = \sup A \iff \begin{cases} S \text{ majore } A \\ \forall o < S,\ \exists a \in A,\ o < a \leq S \end{cases}$$

(pour ne pas se mélanger les pinceaux entre comparaisons larges ou strictes, tester lorsque $A = \{S\}$).

[58] Une telle suite est dite ***exhaustive*** car elle "épuise" le domaine $\mathcal{D}$ en recouvrant chaque sous-domaine fini à partir d'un certain rang. L'énoncé reste valide sans la finitude des D_n (démonstration inchangée).

1. Comme tout est positif, on peut écrire sans justification

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 2}(\zeta(k)-1) &= \sum_{k\geq 2}\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^k}=\sum_{n\geq 2}\sum_{k\geq 2}\left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= \sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2}\frac{1}{1-\frac{1}{n}}=\sum_{n\geq 2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\overset{\text{télescopage}}{=}1.\end{aligned}$$

Le résultat trouvé est fini, donc la famille $\left(\frac{1}{n^k}\right)_{n,k\geq 2}$ est sommable : partitionnant en droites horizontales (*i. e.* à k fixé), on en déduit la convergence de la série $\sum(\zeta(k)-1)$ et sa somme vaut 1.

2. À $k\geq 1$ fixé, le terme général équivaut à $\frac{1}{b^\ell}$ dont la série converge ssi $b>1$. Ainsi, si la famille est sommable, partitionner selon des droites verticales donne $b>1$ et de même une partition en droites horizontales donne $a>1$.

Réciproquement, si $a,b>1$, une comparaison arithmético-géométrique permet de majorer

$$\begin{aligned}\sum_{k,\ell\geq 1}\frac{1}{a^k+b^\ell} &\leq \sum_{k,\ell\geq 1}\frac{1}{2\sqrt{a^k b^\ell}}=\frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^k\sum_{\ell\geq 1}\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^\ell \\ &\underset{\text{géométriques}}{\overset{\text{séries}}{=}} \frac{1}{2}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-1}<\infty.\end{aligned}$$

3. La famille étant à termes positifs, on peut écrire sans conditions[59]

$$\begin{aligned}\sum_{k,\ell\geq 1}\frac{1}{(k+\ell^2)^\alpha} &= \sum_{n\geq 2}\sum_{k+\ell^2=n}^{k,\ell\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}=\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^\alpha}\sum_{0<k<n}\sum_{n-k=\ell^2}^{\ell\geq 1}1 \\ &\underset{k':=n-k \text{ à } n \text{ fixé}}{\overset{\text{reparamétrage}}{=}} \sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^\alpha}\sum_{0<k'<n}\sum_{k'=\ell^2}^{\ell\geq 1}1=\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^\alpha}\sum_{0<k'<n}\begin{cases}1 \text{ si } k' \text{ est un carré}\\ 0 \text{ sinon}\end{cases} \\ &= \sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^\alpha}\operatorname{Card}\left\{c\in[1,n-1|]\ ;\ \sqrt{c}\in\mathbb{N}\right\}=\sum_{n\geq 2}\frac{\lfloor\sqrt{n-1}\rfloor}{n^\alpha}.\end{aligned}$$

Or on a l'équivalence $\frac{\lfloor\sqrt{n-1}\rfloor}{n^\alpha}\overset{n\to\infty}{\sim}\frac{\sqrt{n}}{n^\alpha}=\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$ et le critère de Riemann permet de conclure : la famille étudiée est sommable ssi $\alpha-\frac{1}{2}>1$, *i. e.* ssi $\alpha>\frac{3}{2}$.

4. Soit $D\subset\mathcal{D}$ fini. Puisque $\mathcal{D}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}D_n$, l'application

$$\mu:=\begin{cases}\mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{N}\\ d & \longmapsto & \min\{n\in\mathbb{N}\ ;\ d\in D_n\}\end{cases}$$

fait sens. En notant $N:=\max_D\mu$ (qui fait sens car D est fini), la croissance de (D_n) montre alors que chaque $d\in D$ appartient à $D_{\mu(d)}\subset D_N$, d'où l'inclusion voulue à partir du rang N.

[59] Pour chaque réel $x>1$, le nombre de carrés parfait tombant dans le segment $[1,x]$ vaut $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$.

On reprend la preuve de la proposition précédente. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, notons

$$A_n := \sum_{d e D_n} a_d \text{ et abrégeons } S := \sum_{d \in \mathcal{D}} a_d.$$

D'une part, S majore $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (même argument qu'à la proposition précédente), d'autre part, à $s < S$ fixé, évoquer un $D \subset \mathcal{D}$ fini telle que $s < \sum_D a$ puis un $N \in \mathbb{N}$ tel que $D \subset D_N$ (légitime d'après le paragraphe précédent) permet de majorer

$$s < \sum_D a \leq \sum_{D_N} a = A_N.$$

Comme dans la proposition précédente, on conclut aux égalités.

$$S = \sup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{d e D_n} a_d.$$

Remarque – Lorsque $D_n = [0, n|]$ pour chaque naturel n, on retrouve l'égalité de la proposition précédente.

2.2 Familles complexes

Dans cette section, la lettre E désignera le $\mathbb{K}$-espace vectoriel formé par[60] :

1. ou bien les complexes ;
2. ou bien les réels (dans ce cas, on imposera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

On évoque pour une famille $(a_d)_{d \in \mathcal{D}}$ à valeurs dans E.

Sans notion d'ordre, on ne peut pas définir la somme $\sum_{\mathcal{D}} a$ comme dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ à l'aide d'un *supremum*. Une approche possible serait de prendre l'égalité en termes de suites exhaustives montrée au dernier exercice d'application comme *définition* de la somme (ce qui nécessiterait de montrer l'invariance de la limite en fonction de la suite exhaustive donnée). Cette approche permettrait de propager aisément les propriétés valides sur les sommes *finies* et de retrouver comme propriétés les définitions du programme – lequel procède donc différemment.

Quelle que soit l'approche, comme le montre la famille $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour laquelle plusieurs suites exhaustives donnent des sommes différentes (voire insensées), il va falloir rajouter une hypothèse pour garantir l'unicité et, partant, les "bonnes" propriétés.

Définition

*La famille $(a_d)_{d \in \mathcal{D}}$ est dite **sommable** si la famille $(|a_d|)_{d \in \mathcal{D}}$ l'est.*

[60] Bien garder à l'esprit la distinction entre les *vecteurs* (de E) et les *scalaires* (de $\mathbb{K}$), même si E et $\mathbb{K}$ peuvent être ensemblistement égaux.

L'ensemble des familles de $E^{\mathcal{D}}$ sommables est noté[61] $\ell^1(\mathcal{D}, E)$.

Remarques

• Lorsque $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, la suite (a_n) est sommable ssi la série $\sum a_n$ est absolument convergente[62].

• Si la famille (a_d) est sommable, alors chacune de ses sous-familles est sommable.

• La famille (a_d) n'est pas sommable si elle contient une sous-famille non-sommable[63].

• La définition nous ramenant à des familles *positives*, on pourra vérifier une sommabilité grâce au calcul dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Ce point est simple et essentiel !

Propriétés – Définition

1. *Si $E = \mathbb{R}$, la famille réelle a est sommable ssi les familles a^+ et a^- de ses parties positives et négatives*[64] *sont toutes deux sommables. Dans ce cas, sa* ***somme*** *est définie par*

$$\sum_{\mathcal{D}} a := \sum_{\mathcal{D}} a^+ - \sum_{\mathcal{D}} a^-.$$

2. *Si $E = \mathbb{C}$, la famille complexe a est sommable ssi les familles* $\operatorname{Re} a$ *et* $\operatorname{Im} a$ *de ses parties réelles et imaginaires sont toutes deux sommables. Dans ce cas, sa* ***somme*** *est définie par*

$$\sum_{\mathcal{D}} a := \sum_{\mathcal{D}} \operatorname{Re} a + i \sum_{\mathcal{D}} \operatorname{Im} a.$$

Démonstrations (non exigibles)

1. Supposons $a \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$. Les familles a^+ et a^- étant positives, on peut leur appliquer le résultat des familles à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

   Si ces familles sont sommables, on a alors les majorations[65]

$$\begin{aligned}\sum_{d\in\mathcal{D}} |a_d| &= \sum_{d\in\mathcal{D}} \left|a_d^+ - a_d^-\right| \leq \sum_{d\in\mathcal{D}} \left(\left|a_d^+\right| + \left|a_d^-\right|\right) = \sum_{d\in\mathcal{D}} \left|a_d^+\right| + \sum_{d\in\mathcal{D}} \left|a_d^-\right| \\ &< \infty + \infty = \infty, \text{ d'où la sommabilité de } a.\end{aligned}$$

   Supposons réciproquement a sommable et notons $\mathcal{D}_+$ l'ensemble des $d \in \mathcal{D}$ tels que $a_d > 0$, *i. e.* tels que $a_d^+ \neq 0$. On a alors les majorations[66]

$$\sum_{d\in\mathcal{D}} a_d^+ \underset{\text{si } d\notin\mathcal{D}^+}{\overset{a_d^+ \text{ nul}}{=}} \sum_{d\in\mathcal{D}^+} a_d^+ = \sum_{d\in\mathcal{D}^+} |a_d| \overset{\mathcal{D}^+\subset\mathcal{D}}{\leq} \sum_{d\in\mathcal{D}} |a_d| < \infty,$$

   d'où la sommabilité de a^+. On procéderait de même pour a^-.

[61] Lorsque $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, on abrège $\ell^1(E) := \ell^1(\mathbb{N}, E)$.

[62] *Cf.* proposition analogue sur les familles positives.

[63] *Cf.* remarques analogues sur les familles positives.

[64] *Rappel* : chaque réel r s'écrit $r = r^+ - r^-$ où les réels *positifs* $\begin{cases} r^+ := \max\{r, 0\} \\ r^- := \max\{-r, 0\} \end{cases}$ s'appellent ses ***parties*** resp. ***positive*** et ***négative***.

[65] On a utilisé l'additivité de $\sum_{\mathcal{D}}$ pour les familles positives.

[66] On a utilisé la croissance en le domaine de sommation pour les familles positives.

2. Vu à $d \in \mathcal{D}$ fixé les majorations $\begin{cases} |\mathrm{Re}\, a_d| \leq |a_d| \\ |\mathrm{Im}\, a_d| \leq |a_d| \end{cases}$, les sommabilités de $\mathrm{Re}\, a$ et de $\mathrm{Im}\, a$ découlent de celle de a.

Réciproquement, si les familles $\mathrm{Re}\, a$ et $\mathrm{Im}\, a$ sont sommables, on a alors les majorations

$$\begin{aligned} \sum_{d\in\mathcal{D}} |a_d| &\leq \sum_{d\in\mathcal{D}} (|\mathrm{Re}\, a_d| + |\mathrm{Im}\, a_d|) = \overbrace{\sum_{d\in\mathcal{D}} |\mathrm{Re}\, a_d|}^{<\infty} + \overbrace{\sum_{d\in\mathcal{D}} |\mathrm{Im}\, a_d|}^{<\infty} \\ &< \infty, \text{ d'où la sommabilité de } a. \end{aligned}$$

Proposition

L'ensemble $\ell^1(\mathcal{D}, E)$ est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathcal{D}}$ et l'application $\sum_{\mathcal{D}}$ y est linéaire.

Démonstration

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $b \in \ell^1(\mathcal{D}, E)$. On a alors les majorations

$$\sum_{d\in\mathcal{D}} |\lambda a_d + b_d| \leq \sum_{d\in\mathcal{D}} (|\lambda|\, |a_d| + |b_d|) = |\lambda| \underbrace{\sum_{d\in\mathcal{D}} |a_d|}_{<\infty} + \underbrace{\sum_{d\in\mathcal{D}} |b_d|}_{<\infty} < \infty,$$

d'où la sommabilité de $\lambda a + b$. Vu par ailleurs la sommabilité de la famille nulle, l'ensemble $\ell^1(\mathcal{D}, E)$ est bien un sous-espace vectoriel de $E^{\mathcal{D}}$.

La linéarité se démontrerait agréablement avec les suites exhaustives (hors programme). Montrons-la avec les moyens du programme. Prévenons : ce sera élémentaire et fastidieux.

1. Montrons tout d'abord l'additivité de $\sum_{\mathcal{D}}$ sur $\ell^1(\mathcal{D}, E)$.

Supposons $E = \mathbb{R}$. On peut alors retravailler la somme[67]

$$\begin{aligned} \sum_{\mathcal{D}} (a+b) &= \sum_{\mathcal{D}} (a+b)^+ - \sum_{\mathcal{D}} (a+b)^- = \sum_{\mathcal{D}} \left(a^+ + b^+\right) - \sum_{\mathcal{D}} \left(a^- + b^-\right) \\ &= \left(\sum_{\mathcal{D}} a^+ + \sum_{\mathcal{D}} b^+\right) - \left(\sum_{\mathcal{D}} a^- + \sum_{\mathcal{D}} b^-\right) \\ &= \left(\sum_{\mathcal{D}} a^+ - \sum_{\mathcal{D}} a^-\right) + \left(\sum_{\mathcal{D}} b^+ - \sum_{\mathcal{D}} b^-\right) \\ &= \sum_{\mathcal{D}} a + \sum_{\mathcal{D}} b, \text{ d'où l'additivité de } \sum_{\mathcal{D}} \text{ sur } \ell^1(\mathcal{D}, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Lorsque $E = \mathbb{C}$, le même calcul tiendrait en remplaçant *partie positive* (resp. *négative*) par *partie réelle* (resp. *imaginaire*) et en remplaçant toutes les soustractions par des additions, d'où l'additivité de $\sum_{\mathcal{D}}$ sur $\ell^1(\mathcal{D}, \mathbb{C})$.

[67] On a utilisé successivement : la définition de $\sum_{\mathcal{D}}$ pour les familles réelles, l'additivité des parties positives et négatives, l'additivité de $\sum_{\mathcal{D}}$ pour les familles positives, le calcul additif réel et à nouveau la définition de $\sum_{\mathcal{D}}$ pour les familles réelles.

2. Montrons ensuite le caractère homogène de $\sum_{\mathcal{D}}$ sur $\ell^1(\mathcal{D},\mathbb{R})$ puis de $\sum_{\mathcal{D}}$ sur $\ell^1(\mathcal{D},\mathbb{C})$.

Quand $E=\mathbb{R}$, travaillons la somme $\sum_{\mathcal{D}} \lambda a$ en discutant selon le signe[68] de λ :

$$\sum_{\mathcal{D}} \lambda a = \sum_{\mathcal{D}} (\lambda a)^+ - \sum_{\mathcal{D}} (\lambda a)^- = \left\{ \begin{array}{ll} (\text{si } \lambda \geq 0) & \sum_{\mathcal{D}} (\lambda a^+) - \sum_{\mathcal{D}} (\lambda a^-) \\ (\text{si } \lambda \leq 0) & \sum_{\mathcal{D}} (-\lambda a^-) - \sum_{\mathcal{D}} (-\lambda a^+) \end{array} \right.$$
$$\stackrel{?}{=} \left\{ \begin{array}{ll} (\text{si } \lambda \geq 0) & \lambda \sum_{\mathcal{D}} a^+ - \lambda \sum_{\mathcal{D}} a^- \\ (\text{si } \lambda \leq 0) & -\lambda \sum_{\mathcal{D}} a^- - (-\lambda) \sum_{\mathcal{D}} a^+ \end{array} \right. = \lambda \left(\sum_{\mathcal{D}} a^+ - \sum_{\mathcal{D}} a^- \right) = \lambda \sum_{\mathcal{D}} a,$$

d'où la linéarité de $\sum_{\mathcal{D}}$ sur $\ell^1(\mathcal{D},\mathbb{R})$.

Revenons au cas $E=\mathbb{C}$. Notons $\begin{pmatrix} \rho \\ \sigma \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \lambda \\ \operatorname{Im} \lambda \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \operatorname{Re} a \\ \operatorname{Im} a \end{pmatrix}$. On a alors les égalités

$$\sum_{\mathcal{D}} i \underset{\text{de } r \text{ et } s}{\stackrel{\text{défintion}}{=}} \sum_{\mathcal{D}} i(r+is) \stackrel{i^2=-1}{=} \sum_{\mathcal{D}} (ir-s) \stackrel{\mathbb{R}\text{-linéarité}}{=} \left(\sum_{\mathcal{D}} ir \right) - \sum_{\mathcal{D}} s$$
$$\underset{\text{sur } \ell^1(\mathcal{D},\mathbb{C})}{\stackrel{\text{déf. de } \Sigma_{\mathcal{D}}}{=}} \left(\sum_{\mathcal{D}} 0 + i \sum_{\mathcal{D}} r \right) - \sum_{\mathcal{D}} s \stackrel{i^2=-1}{=} i \left(\sum_{\mathcal{D}} r + i \sum_{\mathcal{D}} s \right)$$
$$\underset{\text{sur } \ell^1(\mathcal{D},\mathbb{C})}{\stackrel{\text{déf. de } \Sigma_{\mathcal{D}}}{=}} i \sum_{\mathcal{D}} (r+is) \underset{\text{de } r \text{ et } s}{\stackrel{\text{défintion}}{=}} i \sum_{\mathcal{D}} a, \text{ d'où les égalités}$$
$$\sum_{\mathcal{D}} \lambda a \underset{\text{de } \rho \text{ et } \sigma}{\stackrel{\text{défintion}}{=}} \sum_{\mathcal{D}} (\rho + i\sigma) a = \sum_{\mathcal{D}} (\rho a + i \sigma a) \stackrel{\mathbb{R}\text{-linéarité}}{=} \rho \sum_{\mathcal{D}} a + \sigma \sum_{\mathcal{D}} ia$$
$$\stackrel{\text{"}i\text{-linéarité"}}{=} \rho \sum_{\mathcal{D}} a + \sigma \left(i \sum_{\mathcal{D}} a \right) = (\rho + \sigma i) \sum_{\mathcal{D}} a \underset{\text{de } \rho \text{ et } \sigma}{\stackrel{\text{défintion}}{=}} \lambda \sum_{\mathcal{D}} a, \text{ ce qui conclut.}$$

Propriétés

On impose la famille $(a_d)_{d\in\mathcal{D}}$ *sommable.*

1. **(invariance par permutation)** *Pour chaque permutation* $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathcal{D})$*, la famille* $\left(a_{\sigma(d)}\right)_{d\in\mathcal{D}}$ *est sommable et on a l'égalité*[69]

$$\sum_{d\in\mathcal{D}} a_{\sigma(d)} = \sum_{d\in\mathcal{D}} a_d.$$

2. **(comparaison triangulaire)** *On a la majoration*[70]

$$\left| \sum_{\mathcal{D}} a \right| \leq \sum_{\mathcal{D}} |a| .$$

[68] Les deux égalités $\stackrel{?}{=}$ découlent de la $\mathbb{R}_+$-linéarité de $\sum_{\mathcal{D}}$ pour les familles positives.

[69] Lorsque $\mathcal{D}=\mathbb{N}$, on retrouve l'invariance par permutation de la somme d'une série absolument convergente.

[70] Lors de calculs explicites de sommes, vérifier cette majoration est un bon *sanity check.*

3. **(croissance réelle**[71]**)** *On impose ici $E = \mathbb{R}$. Pour chaque famille $(b_d)_{d\in\mathcal{D}}$ réelle sommable, on a l'implication*

$$a \leq b \Longrightarrow \sum_{\mathcal{D}} a \leq \sum_{\mathcal{D}} b.$$

4. **(associativité**[72]**)** *Pour chaque partition $\mathcal{D} = \coprod_{i\in I} \mathcal{D}_i$, l'égalité suivante fait sens et est vérifiée :*

$$\boxed{\sum_{\mathcal{D}} a = \sum_{i\in I} \sum_{\mathcal{D}_i} a}.$$

Démonstration : hors programme (une "bonne" façon de procéder serait d'utiliser des suites exhaustives pour propager ces propriétés valides sur des domaines finis).

C*ontre-exemple* : montrons que la famille $\binom{a}{b} \overset{f}{\mapsto} \begin{cases} -1 \text{ si } a = 0 \\ \frac{1}{2^a} \text{ si } a > 0 \end{cases}$ n'est pas sommable[73] sur $\mathbb{N}^2$. La famille étant constante et non nulle sur chaque colonne, aucune sous-famille $(f_{a,b})_{a,b\in\{n\}\times\mathbb{N}}$ n'est sommable, ce qui suffit. Donnons à présent deux partitions réfutant l'associativité (la partition en droites verticales montrait son non-sens).

À $b \in \mathbb{N}$ fixé, la série $\sum f_{n,b}$ est (exception faite de son premier terme -1) géométrique de raison $\frac{1}{2}$, donc converge vers $-1+\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} = 0$. Évaluer la "somme" $\sum_{a,b\geq 0} f_{a,b}$ suivant une partition en droites horizontales conduirait donc à une somme nulle.

Par ailleurs, suivant une partition en droites de pente -1, à $n \in \mathbb{N}$ fixé la somme $\sum_{a+b=n} f_{a,b}$ vaut

$$-1 + \sum_{a=1}^{n} \frac{1}{2^a} = -\frac{1}{2^n},$$

lesquelles sommes forment (quand n décrit $\mathbb{N}$) une famille sommable de somme $\sum_{n\geq 0} -\frac{1}{2^n} = -2$.

L'hypothèse de sommabilité est par conséquent vitale,
au risque d'écrire des égalités fausses voire insensées !

Remarque – Dans les questions de sommabilité, les cadres $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+$ ne jouent absolument pas du tout le même rôle. Les réels sont à traiter (dans ces questions) comme des vecteurs. *A contrario*, les réels positifs sont à penser comme partie du cadre $\overline{\mathbb{R}}_+$ où sont permises toutes les envies relatives à la sommation et au repartitionnement – et c'est justement dans ce cadre "paradisiaque" que seront vérifiées d'éventuelles sommabilités légitimant les mêmes envies[74].

[71] *Attention* : la croissance en le domaine nécessite que fassent sens d'une part un ordre sur E (hypothèse « $E = \mathbb{R}$ ») d'autre part les sommes en jeu (hypothèses « a et b sommables »).

[72] Le deuxième résultat *clef* du chapitre !

[73] FIG 8 décrivant f

[74] En termes hors-programmes, le cadre "paradisiaque" où tout est permis est le *monoïde additif ordonné* $\overline{\mathbb{R}}_+$, les cadres moins permissifs (où suffit simplement une clause de sommabilité) sont les *espaces vectoriels normés complets* (dits ***de Banach***).

2.3 Applications aux familles doubles

2.3.1 Théorèmes de Tonelli & Fubini

Proposition[75]

1. *Soit* $(r_{a,b}) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}^2}$. *Cette famille est sommable ssi, pour chaque* $a \in \mathbb{N}$, *la série* $\sum r_{a,b}$ *converge et si la série* $\sum\left(\sum_{b=0}^{\infty} r_{a,b}\right)$ *converge. Dans ce cas, on peut intervertir les signes* $\sum$ *au sens où l'on a l'égalité*
$$\sum_{a=0}^{\infty}\left(\sum_{b=0}^{\infty} r_{a,b}\right) = \sum_{b=0}^{\infty}\left(\sum_{a=0}^{\infty} r_{a,b}\right).$$
2. *Soit* $(c_{a,b}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$ *une famille sommable. On a alors l'égalité*
$$\sum_{a=0}^{\infty}\left(\sum_{b=0}^{\infty} c_{a,b}\right) = \sum_{b=0}^{\infty}\left(\sum_{a=0}^{\infty} c_{a,b}\right).$$

Démonstration

1. L'égalité affirmée est toujours valide dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (les deux sommes valant $\sum_{\mathbb{N}^2} r$) et correspond aux deux partitions en droites horizontales et verticales. On a par ailleurs les équivalences[76]
$$r \text{ sommable} \iff \sum_{\mathbb{N}^2} r < \infty \iff \sum_{a\in\mathbb{N}}\left(\sum_{b\in\mathbb{N}} r_{a,b}\right) < \infty \overset{?}{\iff} \begin{cases} \forall a \in \mathbb{N},\ \sum_{b\in\mathbb{N}} r_{a,b} < \infty \\ \sum_{a\in\mathbb{N}}\left(\sum_{b\in\mathbb{N}} r_{a,b}\right) < \infty \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \forall a \in \mathbb{N},\ \sum r_{a,n} \text{ converge} \\ \sum\left(\sum_{b=0}^{\infty} r_{n,b}\right) \text{ converge} \end{cases}, \text{ ce qui conclut.}$$
2. Découle de l'associativité pour les deux partitions en droites horizontales et verticales.

Remarque – **Résumé essentiel !** Une seule chose est finalement à retenir de ce chapitre :

> *On calcule avec des sommes doubles (ou plus compliquées)*
> *en regroupant au besoin par paquets* sans se poser de questions,
> *on justifie* a posteriori *l'associativité en montrant la sommabilité,*
> *laquelle s'établit (souvent) en adaptant* le même calcul *dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Exemples

[75] Les noms de Guido Fubini et Leonida Tonelli sont souvent associé à ces interversions des ordres de sommation : Fubini pour les familles sommables (1907), Tonelli pour les familles positives (1909). Insistons : *ce n'est qu'un cas particulier de l'associativité* où l'on partitionne en droites resp. verticales et horizontales.

[76] L'équivalence $\overset{?}{\iff}$ est de la forme $A \iff (B \text{ et } A)$ sachant $A \implies B$, la dernière implication découlant de ce qu'aucun terme d'une famille sommable n'est infini.

1. Donnons sens à et calculons $\sum_{a\geq 2}(-1)^a(\zeta(a)-1)$. Allons-y sans nous poser de questions :

$$\begin{aligned}\sum_{a\geq 2}(-1)^a(\zeta(a)-1) &= \sum_{a\geq 2}(-1)^a\sum_{b\geq 2}\frac{1}{b^a}=\sum_{a\geq 2}\sum_{b\geq 2}\left(-\frac{1}{b}\right)^a \overset{?}{=} \sum_{b\geq 2}\sum_{a\geq 2}\left(-\frac{1}{b}\right)^a \\ &= \sum_{b\geq 2}\left(-\frac{1}{b}\right)^2\frac{1}{1+\frac{1}{b}}=\sum_{b\geq 2}\frac{1}{b^2+b}=\sum_{b\geq 2}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{b+1}\right)=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Pour justifier l'associativité utilisée (égalité $\overset{?}{=}$), il suffit de montrer que la famille $\left(\left(-\frac{1}{b}\right)^a\right)_{a,b\geq 0}$ est alors sommable, ce qui découle du même calcul en prenant les modules (calcul déjà effectué[77]) :

$$\sum_{a,b\geq 2}\left|\left(-\frac{1}{b}\right)^a\right| \underset{\text{paquets dans } \overline{\mathbb{R}}_+}{\overset{\text{sommation par}}{=}} \sum_{b\geq 2}\sum_{a\geq 2}\left(\frac{1}{b}\right)^a=\sum_{b\geq 2}\left(\frac{1}{b}\right)^2\frac{1}{1-\frac{1}{b}}=1.$$

Sanity check : la somme $\frac{1}{2}$ de la famille est bien inférieure à la somme 1 de la famille de ses modules.

2. Soient (u_n) et (v_n) deux suites complexes sommables. On veut donner sens à et montrer l'égalité

$$\sum_{a,b\geq 0}u_a v_b=\sum_{a\in\mathbb{N}}u_a\sum_{b\in\mathbb{N}}v_a.$$

Sans se poser de questions, cette égalité découle d'un partitionnement en droites verticales vu les égalités[78]

$$\sum_{a,b\geq 0}u_a v_b \overset{?}{=} \sum_{a\geq 0}\left(\sum_{b\geq 0}u_a v_b\right)=\sum_{a\geq 0}\left(u_a\left(\sum_{b\geq 0}v_b\right)\right)=\sum_{a\geq 0}u_a\sum_{b\geq 0}v_b.$$

Pour justifier l'associativité utilisée (égalité $\overset{?}{=}$), il suffit de montrer que la famille $(u_a v_b)_{a,b\geq 0}$ est sommable, ce qui découle du même calcul en prenant les modules :

$$\sum_{a,b\geq 0}|u_a v_b| \underset{\text{paquets dans } \overline{\mathbb{R}}_+}{\overset{\text{sommation par}}{=}} \sum_{a\geq 0}\left(\sum_{b\geq 0}|u_a v_b|\right) \underset{\text{calcul}}{\overset{\text{même}}{=}} \sum_{a\geq 0}|u_a|\sum_{b\geq 0}|v_b|<\infty.$$

3. Soit z un complexe de module <1. Montrons l'égalité $\sum_{a\geq 1}\frac{z^a}{1-z^a}=\sum_{n\geq 1}\tau(n)z^n$ où τ dénote l'application "nombre de diviseurs". Travaillons pour cela la somme[79]

$$\sum_{a\geq 1}\frac{z^a}{1-z^a}=\sum_{a\geq 1}\sum_{b\geq 1}(z^a)^b \overset{?}{=} \sum_{a,b\geq 1}z^{ab}=\sum_{n\geq 1}\sum_{ab=n}^{a,b\geq 1}z^{ab}=\sum_{n\geq 1}z^n\sum_{ab=n}^{a,b\geq 1}1=\sum_{n\geq 1}z^n\tau(n).$$

[77] *Cf.* exercice d'application (a) section 2.1.
[78] *Cf.* exemple 1 du théorème de sommation par paquets (section 2.1).
[79] La sommande incite à partitionner en branches hyperboliques (*i. e.* à ab fixé).

Il reste à justifier l'égalité $\stackrel{?}{=}$, ce qui découlerait de la sommabilité de la famille $\left(z^{ab}\right)_{a,b\geq 1}$. On reprend pour cela le même calcul avec des modules :

$$\sum_{a,b\geq 1}\left|z^{ab}\right| \underset{\text{paquets dans } \overline{\mathbb{R}}_+}{\overset{\text{sommation par}}{=}} \sum_{a\geq 1}\sum_{b\geq 1}\left(|z|^a\right)^b \underset{\text{calcul}}{\overset{\text{même}}{=}} \sum_{a\geq 1}\frac{|z|^a}{1-|z|^a}.$$

Or la série $\sum \frac{|z|^n}{1-|z|^n}$ a un terme général positif et équivalent à $|z|^n$, dont la série converge puisque $|z|<1$, ce qui montre que la somme ci-dessus est finie, *c. q. f. d.*

Sanity check : il serait aisé de montrer les majorations $\tau(n) \leq 2\sqrt{n}$, d'où $\tau(n)\, z^n = O(nz^n)$ dont la série converge, ce qui donne sens à la somme $\sum_{n\geq 1}\tau(n)\, z^n$.

2.3.2 Produit de Cauchy

Définition – Proposition

Soient $A := \sum a_n$ et $B := \sum b_n$ deux séries complexes.
On appelle ***produit de Cauchy***[80] *de A et B la série*

$$A * B := \sum\left(\sum_{i+j=n}^{i,j\in\mathbb{N}} a_i b_j\right).$$

Si A et B convergent absolument, alors il en est de même pour la série $A*B$ et l'on a l'égalité[81]

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n \qquad \text{où l'on a défini } \sum c_n := A * B.$$

Démonstration

Calculons sans nous poser de questions en partitionnant d'abord selon des droites verticales puis suivant des droites de pente -1 :

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \sum_{j=0}^{\infty} b_j \stackrel{?}{=} \sum_{i,j\geq 0} a_i b_j \stackrel{?}{=} \sum_{n\geq 0}\sum_{i+j=n}^{i,j\geq 0} a_i b_j = \sum_{n\geq 0} c_n.$$

Les égalités $\stackrel{?}{=}$ découleront de la sommabilité de la famille $(a_i b_j)_{i,j\geq 0}$, donc (*cf.* exemple 2 ci-dessus) de celles des familles a et b. Or ces sommabilités équivalent aux convergences absolues des séries A et B : notre hypothèse.

Pour montrer que $A*B$ converge absolument, on reprend le même calcul avec des modules :

$$\sum_{n\geq 0}|c_n| = \sum_{n\geq 0}\left|\sum_{i+j=n}^{i,j\geq 0} a_i b_j\right| \leq \sum_{n\geq 0}\sum_{i+j=n}^{i,j\geq 0}|a_i|\,|b_j| \underset{\text{calcul}}{\overset{\text{même}}{=}} \sum_{\mathbb{N}}|a|\sum_{\mathbb{N}}|b| < \infty.$$

[80] Le produit de Cauchy est également appelé ***produit de convolution*** car les deux indices i et j *co-évoluent*, *évoluent ensemble* en sens contraire (comme les contenus de deux vases communicants).

[81] En d'autres termes, l'opérateur $\sum_{\mathbb{N}}$ défini sur les séries absolument convergentes est un morphisme pour le produit de convolution au départ et la multiplication complexe à l'arrivée.

Remarque – Signalons que le produit de convolution de deux suites a et b (hors-programme) est défini par[82] $n \mapsto \sum_{i+j=n}^{i,j\in\mathbb{N}} a_i b_j$. Par conséquent, *le terme général du produit de convolution de deux séries données est le produit de convolution des termes généraux des séries données.*

Exemples

1. Soient γ un complexe et P et Q deux polynômes complexes identifiés aux suites (p_n) et (q_n) de leurs coefficients. Les séries $\sum p_n\gamma^n$ et $\sum q_n\gamma^n$ sont stationnaires, donc absolument convergentes, d'où l'égalité

$$\sum_{n\geq 0} p_n\gamma^n \sum_{n\geq 0} q_n\gamma^n = \sum_{n\geq 0}\sum_{a+b=n} p_a\gamma^a q_b\gamma^b, \ i.\ e.\ P(\gamma)\,Q(\gamma) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{a+b=n} p_a q_b\right)\gamma^n.$$

On retrouve ainsi la multiplication polynomiale[83].

2. Évaluer la somme $\sum_{n\geq 1}\frac{n+1}{18^n}$. On fait apparaître un produit de convolution en écrivant (pour chaque naturel n)

$$\frac{n+1}{18^n} = \sum_{a+b=n}^{a,b\geq 0}\frac{1}{18^n} = \sum_{a+b=n}\frac{1}{18^a}\frac{1}{18^b},$$

d'où les égalités (la série géométrique $\sum\frac{1}{18^n}$ convergeant absolument)

$$\sum_{m\geq 0}\frac{m+1}{18^m} = \sum_{m\geq 0}\sum_{a+b=m}\frac{1}{18^a}\frac{1}{18^b} = \left(\sum_{n\geq 0}\frac{1}{18^n}\right)\left(\sum_{n\geq 0}\frac{1}{18^n}\right) = \left(\frac{18}{17}\right)^2 = \frac{324}{289}.$$

Contre-exemple : sans l'hypothèse de sommabilité, le produit de Cauchy peut diverger. Montrons que c'est le cas du carré de Cauchy[84] de la série $R := \sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (convergente). Le terme général c_n du carré $R * R$ (défini à partir[85] du rang 2) est minoré en module par

$$|c_n| = \left|\sum_{a+b=n}\frac{(-1)^a}{\sqrt{a}}\frac{(-1)^b}{\sqrt{b}}\right| = |(-1)^n|\sum_{a+b=n}\frac{1}{\sqrt{ab}} \geq \sum_{a+b=n}^{a,b\geq 1}\frac{1}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2(n-1)}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2,$$

d'où la divergence grossière de la série $\sum c_n$.

Remarque – **Culture (hors-programme)**. Le produit de convolution de deux séries convergentes peut converger, même sans absolue convergence. D'une part, il

[82] Par exemple, la multiplication dans $\mathbb{K}[X]$ est une restriction du produit de Cauchy sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

[83] On peut remplacer P et Q par deux séries entières pourvu que γ tombe dans l'intersection de leurs disques ouverts de convergence.

[84] Le carré de Cauchy d'une série est le produit de Cauchy de cette série par elle-même.

[85] La définition du produit de convolution $S * T$ s'adapte aisément lorsque les séries S et T sont définies (plutôt que sur $\mathbb{N}$) sur des parties infinies de $\mathbb{Z}$.

converge toujours *en moyenne* au sens de CESÀRO[86], d'autre part un théorème de Franz MERTENS affirme que ce produit convergera si l'*une au moins* des deux séries converge absolument (*cf.* exercice d'entraînement 7).

Exercices d'application

1. *Soient a et b deux suites complexes de carré sommable. Montrer que la suite* $(a_n b_n)$ *est sommable et vérifie la majoration*
$$\left|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n\right|^2 \leq \sum_{\mathbb{N}} |a|^2 \sum_{\mathbb{N}} |b|^2 .$$

2. *Étudier le produit de* CAUCHY *des suites* $\left(2, 2, 2^2, 2^3, \cdots\right)$ *et* $(-1, 1, 1, 1, ...)$. *Commenter.*

---

1. Soit $n \in \mathbb{N}$: le carré de chaque réel étant positif, on a $(|a_n| + |b_n|)^2 \geq 0$, ce qui se réécrit
$$|a_n b_n| \leq \frac{|a_n|^2 + |b_n|^2}{2}.$$
Les familles $\left(a_n^2\right)$ et $\left(b_n^2\right)$ étant sommables, il en est de même de la famille $\left(\frac{|a_n|^2+|b_n|^2}{2}\right)$, donc de la famille $(a_n b_n)$. Les termes de la majoration suivante font alors sens[87] :
$$\begin{aligned}\left|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n\right|^2 &\underset{\text{triangulaire}}{\overset{\text{comparaison}}{\leq}} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n b_n|\right)^2 = \left(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} |a_n b_n|\right)^2 = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} |a_n b_n|\right)^2 \\ &\underset{\substack{\text{Schwarz} \\ (\text{à } N \text{ fixé})}}{\overset{\text{Cauchy-}}{\leq}} \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 \sum_{n=0}^{N} |b_n|^2\right) = \left(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} |a_n|^2\right) \left(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} |b_n|^2\right) \\ &= \sum_{\mathbb{N}} |a|^2 \sum_{\mathbb{N}} |b|^2 .\end{aligned}$$

2. Notons a et b les suites considérées et A et B les séries associées. À $n \in \mathbb{N}$ fixé, le terme général de $A * B$ vaut
$$\sum_{p+q=n} a_p a_q = 2 + 2 + 2^2 + 2^4 + \cdots + 2^{n-1} - 2^n = 2\left(1 + \frac{1 - 2^{n-1}}{1-2}\right) - 2^n = 0,$$
d'où la convergence triviale de $A * B$ (tandis que divergent grossièrement A et B).

La convergence d'un produit de CAUCHY n'assure donc en rien celle de ses facteurs.

[86] Deux indications pour les curieuses : les égalités $\sum_{n=0}^{N} C_n = \sum_{i+j=N} A_i B_j$ (où C_n désigne la n-ième somme partielle de la série $C := A * B$) et la tendance $\frac{1}{N} \sum_{i+j=N} u_i v_j \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ pour chaques suites $u, v \longrightarrow 0$.

[87] On rappelle pour chaque suite complexe c sommable l'égalité $\sum_{\mathbb{N}} c = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} c_n$.

3 Le point des compétences

Formulaire

1. Ensembles dénombrables

- Un ensemble donné est dit ***dénombrable*** s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$:

$$D \text{ dénombrable} \overset{\text{définition}}{\iff} \exists \varphi : D \longrightarrow \mathbb{N} \text{ bijective.}$$

- Exemples : chaque partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable :

$$\forall I \subset \mathbb{N},\ I \text{ infini} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} I = \{\min I_0 < \min I_1 < \min I_2 < \min I_3 < \cdots\} \text{ où } (I_n) \text{ est} \\ \text{la suite des itérés de } I \text{ par l'application } X \mapsto X \setminus \{\min X\}\,. \end{array} \right.$$

- Chaque ensemble est fini ou dénombrable ssi il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$:

$$\forall E,\ [E \text{ fini ou dénombrable}] \iff [\exists P \subset \mathbb{N},\ \exists \varphi : E \longrightarrow P \text{ bijective}]\,.$$

- Chaque produit cartésien fini non vide d'ensembles dénombrables est dénombrable (démonstration non exigible) :

$$\forall F,\ \forall \mathcal{D},\ \forall D \in \mathcal{D}^F,\ \left\{ \begin{array}{c} F \text{ fini} \\ \forall f \in F,\ D_f \text{ dénombrable} \end{array} \right. \Longrightarrow \left[\prod_{f \in F} D_f \text{ dénombrable} \right].$$

- Chaque réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable (démonstration non exigible) :

$$\forall I,\ \forall \mathcal{D},\ \forall D \in \mathcal{D}^I,\ \left\{ \begin{array}{c} I \text{ fini ou dénombrable} \\ \forall i \in I,\ (D_i \text{ fini ou dénombrable}) \end{array} \right. \Longrightarrow \left[\bigcup_{i \in I} D_i \text{ fini ou dénombrable} \right].$$

- Application : les ensemble $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

- Contre-exemple : l'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (démonstration non exigible).

2. Familles positives sommables

Soit $\mathcal{D}$ un ensemble dénombrable. Soit $(r_d)_{d \in \mathcal{D}}$ une famille de *réels positifs* indexée par $\mathcal{D}$.

- La ***somme*** de la famille $(r_d)_{d \in \mathcal{D}}$ est définie par

$$\sum_{d \in \mathcal{D}} r_d := \sup_{\substack{F \text{ finie} \\ F \subset \mathcal{D}}} \sum_{f \in F} r_f \qquad (\text{élément de } \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}\,).$$

- La famille $(r_d)_{d \in \mathcal{D}}$ est dite ***sommable*** si sa somme est finie :

$$(r_d)_{d \in \mathcal{D}} \text{ sommable} \iff \sum_{d \in \mathcal{D}} r_d < \infty.$$

• **Théorème de sommation par paquets** (démonstration hors programme) : soit $(\mathcal{D}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition dénombrable de $\mathcal{D}$. La famille $(r_d)_{d\in\mathcal{D}}$ est alors sommable ssi, pour chaque naturel n, la famille $(r_d)_{d\in\mathcal{D}_n}$ est sommable et si la série $\sum\left(\sum_{d\in\mathcal{D}_n} r_d\right)$ converge. Dans ce cas, sa somme vaut

$$\boxed{\sum_{d\in\mathcal{D}} r_d = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{d\in\mathcal{D}_n} r_d}.$$

3. Familles complexes sommables

Soit $\mathcal{D}$ un ensemble dénombrable. Soit $(c_d)_{d\in\mathcal{D}}$ une famille de *complexes* indexée par $\mathcal{D}$

• La famille $(c_d)_{d\in\mathcal{D}}$ est dite ***sommable*** si la famille de réels positifs $(|c_d|)_{d\in\mathcal{D}}$ est sommable :

$$(c_d)_{d\in\mathcal{D}} \text{ sommable} \iff \sum_{d\in\mathcal{D}} |c_d| < \infty.$$

• Si la famille $(c_d)_{d\in\mathcal{D}}$ est *réelle*, alors elle est sommable ssi les familles $\left(c_d^+\right)_{d\in\mathcal{D}}$ et $\left(c_d^-\right)_{d\in\mathcal{D}}$ de ses parties positives et négatives sont toutes deux sommables. Dans ce cas, sa ***somme*** est définie par

$$\sum_{d\in\mathcal{D}} c_d := \sum_{d\in\mathcal{D}} c_d^+ - \sum_{d\in\mathcal{D}} c_d^-.$$

• La famille complexe $(c_d)_{d\in\mathcal{D}}$ est sommable ssi les familles $(\operatorname{Re} c_d)_{d\in\mathcal{D}}$ et $(\operatorname{Im} c_d)_{d\in\mathcal{D}}$ de ses parties réelles et imaginaires sont toutes deux sommables. Dans ce cas, sa ***somme*** est définie par

$$\sum_{d\in\mathcal{D}} c_d := \sum_{d\in\mathcal{D}} \operatorname{Re} c_d + i\sum_{d\in\mathcal{D}} \operatorname{Im} c_d.$$

• Si $\mathcal{D}=\mathbb{N}$, la famille $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable ssi la série $\sum c_n$ est absolument convergente :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n| < \infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty.$$

• La sommabilité de la famille $(c_d)_{d\in\mathcal{D}}$ ainsi que la valeur de sa somme (lorsqu'elle fait sens) est invariante par permutation de $\mathcal{D}$:

$$(c_d)_{d\in\mathcal{D}} \text{ sommable} \Longrightarrow \forall\sigma\in\mathfrak{S}(\mathcal{D}),\ \left\{\begin{array}{l}\left(c_{\sigma(d)}\right)_{d\in\mathcal{D}} \text{ sommable et}\\ \sum_{d\in\mathcal{D}} c_{\sigma(d)} = \sum_{d\in\mathcal{D}} c_d\end{array}\right..$$

• Les familles de $\mathbb{C}^{\mathcal{D}}$ sommables forment un sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathcal{D}}$ sur lequel l'application $(s_d)_{d\in\mathcal{D}} \mapsto \sum_{d\in\mathcal{D}} s_d$ est une forme linéaire :

$$\begin{array}{cc}\forall a,b\in\mathbb{C}^{\mathcal{D}}, & (a_d)_{d\in\mathcal{D}} \text{ et } (b_d)_{d\in\mathcal{D}}\\ \forall\lambda,\mu\in\mathbb{K}, & \text{sont sommables}\end{array} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}(\lambda a_d+\mu b_d)_{d\in\mathcal{D}} \text{ sommable et}\\ \sum_{d\in\mathcal{D}}(\lambda a_d+\mu b_d) = \lambda\sum_{d\in\mathcal{D}} a_d + \mu\sum_{d\in\mathcal{D}} b_d\end{array}\right..$$

• **Théorème de sommation par paquets** (démonstration hors programme) : soit $(\mathcal{D}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition dénombrable de $\mathcal{D}$. On impose que la famille $(c_d)_{d\in\mathcal{D}}$

soit sommable. Alors, pour chaque naturel n, la famille $(c_d)_{d\in\mathcal{D}_n}$ est sommable, la série $\sum\left(\sum_{d\in\mathcal{D}_n} c_d\right)$ converge et l'on l'égalité

$$\boxed{\sum_{d\in\mathcal{D}} c_d = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{d\in\mathcal{D}_n} c_d.}$$

3. Applications

• Soit $(r_{a,b})_{(a,b)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de *réels positifs*. Cette famille est sommable ssi, pour chaque $a\in\mathbb{N}$, la série $\sum r_{a,b}$ converge et si la série $\sum\left(\sum_{b=0}^{\infty} r_{a,b}\right)$ converge. Dans ce cas, on peut intervertir les signes $\sum_a$ et $\sum_b$ lors d'un calcul mettant en jeu les $r_{a,b}$:

$$\forall r\in\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}^2},\ \left[(r_{a,b})_{(a,b)\in\mathbb{N}^2} \text{ sommable}\right] \iff \begin{cases} \forall a\in\mathbb{N},\ \sum r_{a,n} \text{ converge} \\ \sum\left(\sum_{b=0}^{\infty} r_{n,b}\right) \text{ converge}\end{cases}$$

$$\text{et } \forall r\in\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}^2},\ \left[(r_{a,b})_{(a,b)\in\mathbb{N}^2} \text{ sommable}\right] \implies \sum_{a=0}^{\infty}\left(\sum_{b=0}^{\infty} r_{a,b}\right) = \sum_{b=0}^{\infty}\left(\sum_{a=0}^{\infty} r_{a,b}\right)$$

• On peut intervertir les signes $\sum_a$ et $\sum_b$ lors d'un calcul mettant en jeu des complexes $c_{a,b}$ *sommables* :

$$\forall c\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}^2},\ \left[(c_{a,b})_{(a,b)\in\mathbb{N}^2} \text{ sommable}\right] \implies \sum_{a=0}^{\infty}\left(\sum_{b=0}^{\infty} c_{a,b}\right) = \sum_{b=0}^{\infty}\left(\sum_{a=0}^{\infty} c_{a,b}\right).$$

• Soient $A := \sum a_n$ et $B := \sum b_n$ deux séries complexes. Le ***produit de Cauchy*** *de A et B est la série*

$$A * B := \sum\left(\sum_{i+j=n}^{i,j\in\mathbb{N}} a_i b_j\right).$$

• Le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes converge absolument et a pour somme le produit des sommes :

$$\forall a,b\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}},\ \begin{cases} \sum a_n \text{ et } \sum b_n \text{ sont} \\ \text{absolument convergentes}\end{cases} \implies \begin{cases} \sum\left(\sum_{i+j=n}^{i,j\in\mathbb{N}} a_i b_j\right) \text{ converge absolument et} \\ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i+j=n}^{i,j\in\mathbb{N}} a_i b_j = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n \end{cases}.$$

Exercices d'entraînement

1. ★*Soit* D *un ensemble dénombrable. Étudier resp. la dénombrabilité de l'ensemble*
   (a) *des parties de* D *;*
   (b) *des parties finies de* D *;*
   (c) *des parties infinies de* D *;*
   (d) *des suites de* $D^{\mathbb{N}}$ *périodiques ;*
   (e) *des suites de* $D^{\mathbb{N}}$ *périodiques à partir d'un certain rang ;*
   (f) *des suites de* $D^{\mathbb{N}}$ *stationnaires.*

2. ★
   (a) *Soit* a *une suite complexe sommable. Montrer la sommabilité de la suite* $n \mapsto \frac{1}{42^n} \sum_{i=0}^{n} 42^i a_i$ *et déterminer sa somme.*
   (b) *Étudier la sommabilité de la famille* $\left(\frac{1}{a^2-b^2}\right)$ *indexée par* $\mathbb{N}^2$ *privé de sa diagonale.*
   (c) *Soit* $\sum a_n$ *une série absolument convergente définie à partir du rang* 1*. Montrer qu'est également absolument convergente la série* $\sum \frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)}$ *(définie à partir du rang* 1*) et établir l'égalité des deux sommes.*
   (d) *Soient* r *et* θ *deux réels. Expliciter une condition simple donnant sens à la somme* $\sum_{z\in\mathbb{Z}} r^{|z|} e^{iz\theta}$ *que l'on calculera alors.*

3. ★★
   (a) *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue. Notons* A *l'ensemble des points où* f *admet un* extremum *local. Montrer que la partie* $B := f(A)$ *est finie ou dénombrable.*
   (b) *Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *croissante. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de* f *est fini ou dénombrable.*

4. ★★ *Étudier la structure obtenue en munissant* $\ell^1(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ *de la loi*
$$(f,g) \longmapsto \left(z \mapsto \sum_{a+b=z}^{a,b\in\mathbb{Z}} f_a g_b\right) :$$
   sens ? commutativité ? associativité ? bilinéarité ? neutre ? S'agit-il d'un groupe ?

5. ★★
   (a) *Soient* $R, S, T > 0$ *trois réels et* c *un complexe dans le disque unité ouvert. Montrer que le complexe* $\sum_{n\geq 0} \frac{c^{Rn}}{1-c^{Sn+T}}$ *fait sens et est inchangé par permutation de* R *et* T*.*
   (b) *Calculer* $\sum_{d|m}^{d,m\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{d^2m^2}$ *puis* $\sum_{a\wedge b=1}^{a,b\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{a^2b^2}$*. (On donne au besoin les valeurs* $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ *et* $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$*.)*

6. ★★*Soit* $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$. *On note* $D:=\left\{a\in\mathbb{R}\ ;\ \exists\lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{l} f\overset{a^-}{\longrightarrow}\lambda \\ f\overset{a^+}{\longrightarrow}\mu\end{array}\right.\ \text{et } \lambda\neq\mu\right\}$ *l'ensemble des points de discontinuité de* f *dits* ***de première espèce****. On note* $\mathcal{C}$ *l'ensemble des couples de segments réels disjoints à bornes rationnelles.*

   (a) *Montrer que* $\mathcal{C}$ *est dénombrable.*

   (b) *Montrer que* D *est inclus dans la réunion (lorsque* (n,S,T) *décrit* $\mathbb{N}^*\times\mathcal{C}$*) des ensembles*

   $$D^n_{S,T}:=\left\{d\in D\ ;\quad \begin{array}{l} f(d-V)\subset S \\ f(d+V)\subset T\end{array}\right\}\ \text{où } V:=\left]0,\frac{1}{n}\right[.$$

   (c) *En déduire que* D *est fini ou dénombrable en étudiant à* $(n,S,T)\in\mathbb{N}^*\times\mathcal{C}$ *fixé la famille* $(d+V)_{d\in D^n_{S,T}}$.

7. ★★**Théorème de** Mertens**.** *Soient* A *et* B *deux séries complexes resp. absolument convergente et convergente. On veut montrer que le produit de Cauchy* $C:=A*B$ *converge.*

   (a) *Soit* $\mathcal{D}$ *une partie finie du plan partitionnée en droites verticales, mettons* $\mathcal{D}=\coprod_{i\in I}D_i$. *Montrer alors la majoration*

   $$\left|\sum_{(i,j)\in\mathcal{D}}a_ib_j\right|\leq\sum_{i\in I}|a_i|\left|\sum_{j\in D_i}b_j\right|.$$

   (b) *En déduire les tendances* $C_{2n}-A_nB_n\overset{n\rightarrow\infty}{\longrightarrow}0$ *et* $C_{2n-1}-A_nB_n\overset{n\rightarrow\infty}{\longrightarrow}0$.

   (c) *Conclure et préciser la somme de la série* $A*B$.

   (d) *Retrouver le résultat en établissant directement la tendance* $C_n-A_n\left(\sum_{\mathbb{N}}b\right)\overset{n\rightarrow\infty}{\longrightarrow}0$.

8. ★★

   (a) *Soit* a *une famille complexe de carré sommable. Déterminer les bornes inférieures et supérieures de l'ensemble des sommes* $\sum_{n\in\mathbb{N}}\left|a_na_{\sigma(n)}\right|$ *lorsque* σ *décrit* $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$.

   (b) *Une partie de* $\mathbb{R}$ *est dite* ***négligeable*** *si elle peut être recouverte, pour chaque* $\varepsilon>0$, *par la réunion d'une suite de segments dont la somme des longueurs est majorée par* ε. *Montrer qu'une réunion dénombrable de parties négligeables reste négligeable.*

9. ★★★**Une comparaison de Hardy.**

   (a) *Soient* $n\in\mathbb{N}$ *et* $a_0,...,a_n\in\mathbb{R}$. *Montrer la positivité*

   $$\sum_{i,j=0}^{n}\frac{a_ia_j}{i+j+1}\geq 0.$$

   (b) *Soit* $f\in\mathbb{C}[X]$. *Montrer l'égalité*

   $$\int_{-1}^{1}f=-i\int_0^{\pi}f\left(e^{i\theta}\right)e^{i\theta}d\theta.$$

(c) *Soit $z \in \mathbb{Z}$. Montrer l'égalité*

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\theta} \frac{d\theta}{2\pi} = \delta_z^0.$$

(d) *Soit (r_n) une suite réelle de carré sommable. Donner sens à et établir la majoration*

$$\sum_{a,b \geq 0} \frac{r_a r_b}{a+b+1} \leq \pi \sum_{n \geq 0} r_n^2.$$

10. ★★★*Soient a, b, ρ trois réels. Étudier la sommabilité de la famille* $\left(\frac{1}{(k^a+\ell^b)^\rho}\right)_{k,\ell \in \mathbb{N}^*}$.

Solutions des exercices d'entraînement

1.

(a) Chaque bijection $A \xrightarrow{\varphi} B$ induisant par images directes une bijection $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{P}(A) & \xrightarrow{\sim} & \mathfrak{P}(B) \\ P & \longmapsto & \varphi(P) \end{array} \right.$, les ensembles $\mathfrak{P}(D)$ et $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ sont équipotents. La non-dénombrabilité de $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ implique donc celle de $\mathfrak{P}(D)$.

(b) Les parties finies de D forment la réunion des $\mathfrak{P}^c(D) := \{A \subset D \ ; \ \operatorname{Card} A \leq c\}$ pour c décrivant $\mathbb{N}^*$. Or, pour chaque tel c, est surjective l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} D^c & \twoheadrightarrow & \mathfrak{P}^c(D) \\ (d_i) & \mapsto & \{d_i\} \end{array} \right.$ dont la source D^c est dénombrable (produit cartésien fini non nul de dénombrables). Finalement, $\bigcup_{c \in \mathbb{N}^*} \mathfrak{P}^c(D)$ est dénombrable comme union dénombrable de dénombrables.

(c) Notons $\mathfrak{P}^\infty(D)$ l'ensemble des parties infinies de D. Si $\mathfrak{P}^\infty(D)$ était dénombrable, sa réunion avec l'ensemble dénombrable des parties finies de D serait dénombrable ; or cette réunion vaut le non dénombrable $\mathfrak{P}(D)$, ce qui serait absurde.

(d) Soit $T \in \mathbb{N}^*$ et notons $D_T^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites de $D^{\mathbb{N}}$ qui sont T-périodiques. Puisqu'une suite T-périodique est entièrement déterminée par T valeurs d'indices consécutifs, l'application $d \mapsto (d_1, d_2, ..., d_T)$ est une injection de $D_T^{\mathbb{N}}$ dans le dénombrable D^T, d'où la dénombrabilité de $D_T^{\mathbb{N}}$ et, partant, celle de l'ensemble $\bigcup_{T \in \mathbb{N}^*} D_T^{\mathbb{N}}$ étudié.

(e) Pour chaque $(N, T) \in \mathbb{N}^2$, la concaténation (toujours injective) depuis le dénombrable $D^N \times D_T^{\mathbb{N}}$ atteint chaque suite T-périodique à partir du rang N. L'ensemble étudié est donc équipotent à la dénombrable réunion $\bigcup_{(N,T) \in \mathbb{N}^2} D^N \times D_T^{\mathbb{N}}$.

(f) Une suite stationnaire est une suite 1-périodique à partir d'un certain rang. Leur ensemble est donc inclus dans le dénombrable du point précédent ; étant de plus infini (il contient chaque suite constante à valeurs dans l'infini D), il est dénombrable.

2.

(a) Le terme général se réécrit sous forme d'un produit de Cauchy $\sum_{i=0}^n \frac{a_i}{42^{n-i}} = [a * g]_n$ où g dénote la suite $\left(\frac{1}{42^n}\right)$. Les deux séries $\sum a_n$ et $\sum g_n$ convergeant absolument, leur produit de Cauchy converge absolument vers le produit des sommes de $\sum a_n$ et $\sum g_n$, à savoir $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ multiplié par $\frac{1}{1 - \frac{1}{42}} = \frac{42}{41}$.

(b) La somme des modules restreinte à la "sur-diagonale" d'équation $y = x + 1$ vaut

$$\sum_{b=a+1}^{a,b \in \mathbb{N}^*} \left| \frac{1}{a^2 - b^2} \right| = \sum_{a \geq 1} \frac{1}{(a+1)^2 - a^2} = \sum_{a \geq 1} \frac{1}{2a - 1} > \sum_{a \geq 1} \frac{1}{2a} = \infty,$$

donc la famille étudiée n'est pas sommable (elle contient une sous-famille non sommable).

Remarque – Le terme $\frac{1}{a^2-b^2}$ est "grand" quand le dénominateur est "petit", *i. e.* quand a et b sont "proches", d'où l'idée d'évaluer la somme là où $|a-b|=1$ (plus petite différence possible).

(c) Calculons directement (en passant d'une partition en droites verticales à une partition en droites horizontales)

FIG 9 triangle $1 \leq n \leq N$

$$\sum_{N\geq 1}\sum_{n=1}^{N}\frac{na_n}{N(N+1)} \overset{?}{=} \sum_{n\geq 1}\sum_{N\geq n}\frac{na_n}{N(N+1)} = \sum_{n\geq 1} na_n \underbrace{\sum_{N\geq n}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}\right)}_{=\frac{1}{n}\text{ (télescopage)}} = \sum_{n\geq 1} a_n\,;$$

remplacer les a_n par leurs modules montre l'égalité

$$\sum_{n\geq 1}\sum_{N\geq n}\frac{n|a_n|}{N(N+1)} \underset{\text{calcul}}{\overset{\text{même}}{=}} \sum_{n\geq 1}|a_n| < \infty, \text{ d'où la sommabilité justifiant l'égalité } \overset{?}{=}.$$

On a enfin les majorations

$$\sum_{N\geq 1}\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{na_n}{N(N+1)}\right| \leq \sum_{N\geq 1}\sum_{n=1}^{N}\frac{n|a_n|}{N(N+1)} \underset{\text{calcul}}{\overset{\text{même}}{<}} \infty, \text{ d'où l'absolue convergence attendue.}$$

(d) Calculons tout de go sans justifier, selon la partition $\mathbb{Z}=\{0\}\amalg\mathbb{N}^*\amalg -\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\sum_{z\in\mathbb{Z}} r^{|z|}e^{iz\theta} &\overset{?}{=} r^0e^{i0\theta}+\sum_{n\in\mathbb{N}^*} r^ne^{in\theta}+\sum_{n\in\mathbb{N}^*} r^ne^{-in\theta} = 1+\sum_{n\in\mathbb{N}^*} r^ne^{in\theta}+\overline{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} r^ne^{in\theta}} \\
&= 1+2\operatorname{Re}\sum_{n\geq 1}\left(re^{i\theta}\right)^n \overset{?}{=} \operatorname{Re}\left(1+2\frac{re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right) = \operatorname{Re}\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} \\
&= \operatorname{Re}\frac{\left(1+re^{i\theta}\right)\left(1-re^{-i\theta}\right)}{\left|1-re^{i\theta}\right|^2} = \frac{1-r^2}{1-2\cos\theta+r^2}.
\end{aligned}$$

La première égalité sera justifiée si l'on montre la sommabilité de la famille dont on cherche le sens et la valeur de la somme. Reprenons le même calcul :

$$\sum_{z\in\mathbb{Z}}\left|r^{|z|}e^{iz\theta}\right| = \sum_{z\in\mathbb{Z}} r^{|z|} = 1+2\sum_{n\in\mathbb{N}^*} r^n.$$

Si $|r|<1$, alors la somme géométrique converge et la somme ci-dessus vaut $1+\frac{2r}{1-r}=\frac{1+r}{1-r}$. Réciproquement, si la famille $\left(r^{|z|}e^{iz\theta}\right)_{z\in\mathbb{Z}}$ est sommable, alors la sous-famille $\left(r^ne^{in\theta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, *i. e.* $\left(|r|^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, *i. e.* $|r|<1$.

Finalement, la somme étudiée fait sens ssi $|r|<1$ et, dans ce cas, les deux égalités $\overset{?}{=}$ sont valides : la première par sommabilité de la famille $\left(r^{|z|}e^{iz\theta}\right)_{z\in\mathbb{Z}}$, la deuxième par résultat sur les séries géométriques.

Sanity check : le module de la somme $\frac{1-r^2}{1-2\cos\theta+r^2}$ est bien inférieur à la somme des modules $\frac{1+r}{1-r}=\frac{1-r^2}{1-2r+r^2}$ vu la minoration $-2\cos\theta\geq -2$.

3.

(a) En partitionnant $A =: A_{\max} \cup A_{\min}$ selon que l'*extremum* est un *maximum* ou un *minimum*, ce qui permet d'écrire $B = f(A_{\max}) \cup f(A_{\min})$, on voit qu'il suffit de montrer que $B_{\max}$ et $B_{\min}$ sont chacun finis ou dénombrables (avec les notations évidentes). On supposera donc $A = A_{\max}$.

De même, en notant $A_n := A \cap [-n, n]$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$ de sorte à avoir $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, on voit qu'il suffit de montrer que chaque $f(A_n)$ est fini ou dénombrable. On supposera donc A borné.

Ensuite, en se souvenant que dire $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ |?| < \varepsilon$ revient à dire $\exists n \in \mathbb{N}^*,\ |?| < \frac{1}{n}$, on peut écrire A comme la réunion dénombrable (lorsque n parcourt $\mathbb{N}^*$) des

$$A_n := \left\{ a \in A\ ;\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - a| < \frac{1}{n} \Longrightarrow f(x) \leq f(a) \right\}.$$

Il suffit donc de montrer que chaque $f(A_n)$ est fini ou dénombrable. On supposera donc $A = A_N$ pour un certain naturel N.

Montrons enfin que $f(A)$ est fini, *i. e.* ne contient aucune suite injective. Soit $b \in f(A)^{\mathbb{N}}$. On a alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists a \in A,\ b_n = f(a)$, *i. e.* (par l'axiome du choix) $\exists a \in A^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ b_n = f(a_n)$: évoquons une telle suite a. Puisque A est borné, la suite a admet une valeur d'adhérence, donc on peut évoquer deux indices $i \neq j$ tels que $|a_i - a_j| < \frac{1}{N}$, d'où (par définition de A_N) un encadrement $b_i \leq b_j \leq b_i$: les indices (distincts) i et j ont donc même image par b, ce qui empêche l'injectivité de cette dernière.

(b) Appelons D l'ensemble considéré. En notant $D_n := D \cap [-n, n]$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$ de sorte à avoir $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$, on voit qu'il suffit de montrer que chaque D_n est fini ou dénombrable. Soit donc $n \in \mathbb{N}$ et notons $S := [-n, n]$.

Pour chaque réel a, la différence $\delta_a := \lim_{a^+} f - \lim_{a^-} f$ fait sens (par monotonie de f), est positive (par croissance de f) et est non nulle ssi $a \in D$. Si l'on montre la sommabilité de la famille $(\delta_s)_{s \in S}$, l'exercice d'application (b) section 1.2 permettra de conclure que son support $D \cap S = D$ est fini ou dénombrable. Montrons par un télescopage la majoration

$$\sum_{s \in S} \delta_s \leq \Delta := f(\max S) - f(\min S).$$

FIG 10 la majoration $\sum_{s \in S} \delta_s \leq \Delta$

En guise de lemme, observer pour chaques réels $s < a < t$ les majorations $f(s) \leq \lim_{a^-} f \leq \lim_{a^+} f \leq f(t)$, d'où il ressort $\delta_a \leq f(t) - f(s)$. Soit maintenant $A \subset S$ finie, mettons $A = \{a_1 < a_2 < \cdots < a_n\}$ où $n := |A|$. Soit $s \in S^{[|0,n]}$ tel que $s_{i-1} < a_i < s_i$ pour chaque $i \in [|1, n]$. On peut alors majorer

$$\begin{aligned} \sum_A \delta_a &= \sum_{i=1}^n \delta_{a_i} \overset{\text{lemme}}{\leq} \sum_{i=1}^n \left(f(s_i) - f(s_{i-1}) \right) \overset{\text{télescopage}}{=} f(s_n) - f(s_0) \\ &\overset{f \text{ croît}}{\leq} f(\max S) - f(\min S) = \Delta,\ c.\ q.\ f.\ d. \end{aligned}$$

Remarque – La chose à ne pas rater est qu'un point de discontinuité correspond à un "saut" de notre application f. La solution qui précède revient à dire que les sauts de hauteur $> \frac{1}{n}$ sont en nombre fini pour chaque naturel $n > 0$ et utilise donc la *mesure* de ces sauts. Une autre solution, de nature *topologique*, consisterait à caser "dans" chacun de ces sauts un intervalle infini (au sens d'implications $x < d < y \Longrightarrow f(x) < I_d < f(y)$), *a fortiori* un rationnel (par densité de $\mathbb{Q}$ dans chaque I_d), d'où une injection de $\mathbb{Q}$ dans D (*cf.* exercice d'application (c) section 1.2). Une troisième solution (brutale) utiliserait une variante de l'exercice 6 en remarquant que l'ensemble D est formé des points *anguleux* de chaque primitive de f (une telle primitive faisant sens par monotonie de f).

4. Notons $*$ la "loi" de l'énoncé. Soient $z \in \mathbb{Z}$ et f, g, h dans $\ell^1(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$.

(a) En reprenant telle quelle la démonstration du cours montrant la sommabilité du produit de Cauchy de deux suites sommables en indexant cette fois par $\mathbb{Z}$ au lieu de $\mathbb{N}$, on obtient la sommabilité de la famille $f * g$. Ainsi $*$ est-il une l. c. i. sur $\ell^1(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ et pourrons-nous repartitionner les domaines de sommation comme bon nous semblera.

(b) La commutativité de $*$ découle de celle de la multiplication complexe vu les égalités

$$[f * g]_z = \sum_{a+b=z}^{a,b\in\mathbb{Z}} f_a g_b = \sum_{a+b=z}^{a,b\in\mathbb{Z}} g_b f_a \underset{(A,B):=(b,a)}{\overset{\text{reparamétrage}}{=}} \sum_{A+B=z}^{A,B\in\mathbb{Z}} g_A f_B = [g * f]_z .$$

(c) On a par ailleurs les égalités

$$\begin{aligned} [f * (g * h)]_z &= \sum_{a+B=z}^{a,B\in\mathbb{Z}} f_a \ [g * h]_B = \sum_{a+B=z}^{a,B\in\mathbb{Z}} f_a \sum_{b+c=B}^{b,c\in\mathbb{Z}} g_b h_c = \sum_{\substack{a+B=z \\ b+c=B}}^{a,b,c,B\in\mathbb{Z}} f_a g_b h_c \\ &= \sum_{\substack{a+(b+c)=z \\ B=b+c}}^{a,b,c,B\in\mathbb{Z}} f_a g_b h_c = \sum_{a+b+c=z}^{a,b,c\in\mathbb{Z}} f_a g_b h_c \underbrace{\sum_{B=b+c}^{B\in\mathbb{Z}} 1}_{=1} = \sum_{a+b+c=z}^{a,b,c\in\mathbb{Z}} f_a g_b h_c \end{aligned}$$

et le même calcul en changeant de lettres donne

$$[(f * g) * h]_z \underset{\text{commutatif}}{\overset{*\text{ est}}{=}} [h * (f * g)]_z \underset{\text{calcul}}{\overset{\text{même}}{=}} \sum_{a+b+c=z}^{a,b,c\in\mathbb{Z}} h_a f_b g_c$$

$$\underset{(A,B,C):=(b,c,a)}{\overset{\text{reparamétrage}}{=}} \sum_{A+B+C=z}^{A,B,C\in\mathbb{Z}} f_A g_B h_C = [f * (g * h)]_z \text{, d'où l'associativité de } * .$$

(d) Notons D la droite entière d'équation $a + b = z$. On a pour chaque scalaire λ les égalités

$$[(\lambda f + g) * h]_z = \sum_{a+b=z}^{a,b\in\mathbb{Z}} [\lambda f + g]_a h_b = \sum_{a+b=z}^{a,b\in\mathbb{Z}} (\lambda f_a + g_a) h_b = \sum_{a+b=z}^{a,b\in\mathbb{Z}} (\lambda f_a h_b + g_a h_b)$$

$$\underset{\text{de } \Sigma_D}{\overset{\text{linéarité}}{=}} \lambda \sum_{a+b=z}^{a,b\in\mathbb{Z}} f_a h_b + \sum_{a+b=z}^{a,b\in\mathbb{Z}} g_a h_b = \lambda [f * h]_z + [g * h]_z = [\lambda (f * h) + g * h]_z ,$$

ce qui conclut d'après la commutativité de $*$.

(e) Cherchons un neutre pour $*$ par analyse-synthèse. Soit ε un neutre : on a alors $\varepsilon * f = f$. Le calcul de la somme $[\varepsilon * f]_z$ sera facilité si elle contient plein de zéros, par exemple si f est le Dirac $\delta := z \mapsto \delta_z^0$. On a ainsi les égalités

$$\delta_z^0 = \delta(z) = [\delta * \varepsilon](z) = \sum_{a+b=z} \delta_a^0 \varepsilon_b = 1\varepsilon_z, \text{ ce qui impose } \varepsilon = \delta.$$

[Fin de l'analyse, début de la synthèse.] Or δ est effectivement neutre au vu des égalités

$$[f * \delta]_z = \sum_{a+b=z}^{a,b\in\mathbb{Z}} f_a \delta_b = \sum_{a+0=z}^{a\in\mathbb{Z}} f_a 1 = f_z$$

(pas de besoin de vérifier l'autre côté puisque $*$ est commutatif).

(f) Cherchons à inverser les familles de $f \in \ell^1(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$. Comme pour la recherche d'un neutre, le calcul est plus exploitable pour les familles possédant plein de zéros, par exemple les Dirac $\delta^a := z \mapsto \delta_z^a$ où a parcourt $\mathbb{Z}$. De fait, on pourrait aisément établir les égalités $\delta^a * \delta^b = \delta^{a+b}$, d'où l'inversibilité de chaque δ^a (d'inverse δ^{-a}).

Montrons en revanche que $\delta^1 - \delta$ (qui possède *deux* valeurs non nulles) n'est pas inversible : ceci établira que $\ell^1(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ n'est pas un groupe pour $*$.

Soit par l'absurde f un inverse de $\delta^1 - \delta$. On a alors les égalités

$$\delta_z^0 = \left[f * \left(\delta^1 - \delta\right)\right]_z = \sum_{a+b=z}^{a,b\in\mathbb{Z}} f_a \left(\delta_b^1 - \delta_b^0\right) = f_z - f_{z-1},$$

ce qui montre d'une part que f est constante sur $\mathbb{N}$ (imposer $z > 0$) et sur $-\mathbb{N}^*$ (imposer $z < 0$), d'autre part l'égalité $f(0) - f(-1) = 1$ (imposer $z = 0$), d'où l'on déduit $f_{|\mathbb{N}} - f_{|-\mathbb{N}^*} = 1$. Or $f_{|\mathbb{N}}$ est sommable (comme sous-famille de f), donc la série $\sum f(n)$ converge (absolument), donc son terme général tend vers 0, ce qui s'écrit $f \overset{\infty}{\longrightarrow} 0$. On montrerait de même la tendance $f \overset{-\infty}{\longrightarrow} 0$ avec la sous-famille $f_{|-\mathbb{N}^*}$. On peut donc appliquer $\lim_\infty$ dans la dernière égalité, ce qui donne $0 - 0 = 1$, d'où la contradiction.

5.

(a) Le terme général de la série de l'énoncé équivaut à $\frac{c^{Rn}}{-c^{Sn+T}} = -\frac{1}{c^T}\left(c^{\frac{R}{S}}\right)^n$ qui est le terme général d'une série géométrique de raison de module $\left|c^{\frac{R}{S}}\right| = |c|^{\frac{R}{S}} \overset{|c|<1}{<} 1$, d'où la convergence de la série. La somme de l'énoncé fait donc sens.

À $n \in \mathbb{N}$ fixé, la majoration $\left|c^{Sn+T}\right| < 1$ permet de développer le $\frac{1}{1-c^{Sn+T}}$, d'où les égalités

$$\sum_{n\geq 0} \frac{c^{Rn}}{1 - c^{Sn+T}} = \sum_{n\geq 0} c^{Rn} \sum_{m\geq 0} \left(c^{Sn+T}\right)^m \overset{?}{=} \sum_{m,n\geq 0} c^{Tm+Rn+Smn};$$

suivant le même calcul, échanger R et T dans la première sommande redonne la *même* somme après reparamétrage de $\mathbb{N}^2$ par une réflexion d'axe la première bissectrice :

$$\sum_{m',n'\geq 0} c^{Rm'+Tn'+Sm'n'} \underset{(m,n):=(n',m')}{\overset{\text{reparamétrage}}{=}} \sum_{m,n\geq 0} c^{Rn+Tm+Snm} = \sum_{m,n\geq 0} c^{Tm+Rn+Smn}.$$

Il suffit donc pour conclure de justifier les deux égalités $\overset{?}{=}$ (celle explicite et son analogue caché) en établissant la sommabilité de la famille $\left(c^{Tm+Rn+Smn}\right)_{m,n\geq 0}$. On reprend pour cela le même calcul :

$$\sum_{m,n\geq 0} \left|c^{Tm+Rn+Smn}\right| = \sum_{m,n\geq 0} |c|^{Tm+Rn+Smn} \underset{\text{calcul}}{\overset{\text{même}}{=}} \sum_{n\geq 0} \frac{|c|^{Rn}}{1-|c|^{Sn+T}}.$$

Or (même raisonnement qu'en début de preuve) la dernière série a un terme général équivalant à celui d'une série géométrique de raison $\left|c^{\frac{R}{S}}\right| = |c|^{\frac{\lambda}{\mu}} < 1$, ce qui montre la finitude de la somme ci-dessus et, partant, la sommabilité cherchée.

(b) Sommer à d fixé (droites verticales) donne

$$\sum_{d|m}^{d,m\geq 1} \frac{1}{d^2m^2} = \sum_{d\geq 1} \frac{1}{d^2} \sum_{m \text{ multiple de } d} \frac{1}{m^2} \underset{\delta:=\frac{m}{d} \text{ (à } d \text{ fixé)}}{\overset{\text{reparamétrage}}{=}} \sum_{d\geq 1} \frac{1}{d^2} \sum_{\delta\geq 1} \frac{1}{(\delta d)^2}$$
$$= \sum_{d\geq 1} \frac{1}{d^4} \sum_{\delta\geq 1} \frac{1}{\delta^2} = \zeta(4)\,\zeta(2) = \frac{\pi^6}{540}.$$

Regrouper dans $\zeta(2)^2$ les couples d'entiers selon leur p. g. c. d. donne

$$\zeta(2)^2 = \sum_{a,b\geq 1} \frac{1}{a^2b^2} = \sum_{d\geq 1} \sum_{a\wedge b=d}^{a,b\geq 1} \frac{1}{a^2b^2}$$
$$\underset{(\alpha,\beta):=\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)}{\overset{\text{reparamétrage (à } d \text{ fixé)}}{=}} \sum_{d\geq 1} \sum_{\alpha\wedge\beta=1}^{\alpha,\beta\geq 1} \frac{1}{(d\alpha)^2 (d\beta)^2} = \sum_{d\geq 1} \frac{1}{d^4} \sum_{\alpha\wedge\beta=1}^{\alpha,\beta\geq 1} \frac{1}{\alpha^2\beta^2}.$$

On en déduit la somme cherchée, à savoir $\frac{\zeta(2)^2}{\zeta(4)} = \frac{\frac{\pi^4}{36}}{\frac{\pi^4}{90}} = \frac{5}{2}$.

6.

(a) Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des segments réels à bornes rationnelles. Vu le caractère infini de $\mathcal{C}$ (il contient le couple $([-n,0],[1,n])$ pour chaque naturel $n>0$) et l'inclusion $\mathcal{C}\subset\mathcal{S}^2$, il suffit de montrer que $\mathcal{S}$ est fini ou dénombrable ($\mathcal{S}^2$ sera alors dénombrable comme carré d'un dénombrable), ce qui découle de la surjectivité de $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}^2 & \twoheadrightarrow & \mathcal{S}\cup\{\emptyset\} \\ (q,r) & \mapsto & [q,r] \end{array}\right.$ dont la source dénombrable $\mathbb{Q}^2$ est dénombrable (carré d'un dénombrable).

(b) Soit c une application de choix qui "pioche" dans chaque intervalle réel infini un élément de cet ensemble (par exemple, chaque bijection $\varphi : \mathbb{Q} \widetilde{\longrightarrow} \mathbb{N}$ induit une telle application $I \mapsto \varphi^{-1}(\min(\varphi(I \cap \mathbb{Q})))$ faisant sens par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).

FIG 11 construction de S, T, n

Soit $d \in D$ et notons $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lim_{d^-} f \\ \lim_{d^+} f \end{pmatrix}$ (légitime puisque $d \in D$), $\varepsilon := \frac{|\mu-\lambda|}{2}$ (qui est non nul par propriétés de D), $\begin{cases} q := c(]\lambda-\varepsilon, \lambda[) \\ r := c(]\lambda, \lambda+\varepsilon[) \end{cases}$ (légitime puisque $\varepsilon > 0$) et $S := [q, r]$ qui est un voisinage de λ (vu l'encadrement $q < \lambda < r$). Remplacer λ par μ définirait de même un voisinage $T \in \mathcal{S}$ de μ *disjoint* de S (en effet, si $\lambda > \mu$, on a $\inf S = \lambda - \varepsilon > \mu + \varepsilon = \sup T$, sinon on a $\inf S > \sup T$). Définissons enfin $n \in \mathbb{N}^*$ minimal tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} d - \frac{1}{n} < x < d \Longrightarrow f(x) \in S \\ d < x < d + \frac{1}{n} \Longrightarrow f(x) \in T \end{cases}$ (un tel n existe par définition des limites λ et μ et puisque S et T en sont des voisinages respectifs). On a alors clairement $d \in D^n_{S,T}$.

(c) Soit $(n, S, T) \in \mathbb{N}^* \times \mathcal{C}$. Si l'on montre que la famille $(d+V)_{d \in D^n_{S,T}}$ est formée d'intervalles infinis deux à deux disjoints, alors l'ensemble indexant $D^n_{S,T}$ sera fini ou dénombrable (*cf.* exercice d'application (c) section 1.2) et l'ensemble D sera alors dénombrable car inclus dans une réunion dénombrable (indexée par le produit de deux dénombrables $\mathbb{N}^* \times \mathcal{C}$) d'ensembles finis ou dénombrables (les $D^n_{S,T}$).

FIG 12 la contradiction $f(]d, d'[) = \emptyset$

Soient donc $d < d'$ dans $D^n_{S,T}$ et soit par l'absurde $a \in (d+V) \cap (d'+V)$. On a alors les majorations

$$d' = \inf(d'+V) \overset{a \in d'+V}{\leq} a \overset{a \in d+V}{\leq} \sup(d+V) = d + \frac{1}{n},$$

ce qui montre que l'intervalle $]d, d'[$ est inclus dans $d' - V$ et dans $d + V$, d'où la contradiction *via* les inclusions

$$f(]d, d'[) \subset f((d'-V) \cap (d+V)) = f(d'-V) \cap f(d+V) \subset S \cap T = \emptyset.$$

Remarque – Les discontinuités d'une application monotone étant chacune de première espèce, on retrouve le résultat de l'exercice (3b). On peut également modifier légèrement la démonstration qui précède pour établir qu'est fini ou dénombrable l'ensemble des points *anguleux* d'une application (points où dérivées à gauche et à droite font sens et diffèrent), ce qui permet de retrouver le résultat de cet exercice lorsque f admet une primitive (par exemple quand f admet une limite à droite et à gauche en chaque point) en remarquant que les points où f est discontinue sont les points anguleux de chaque telle primitive.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. (Les o et O seront pris quand $n \to \infty$.)

(a) Il suffit d'écrire délicatement

$$\left|\sum_{(i,j)\in\mathcal{D}} a_i b_j\right| = \left|\sum_{i\in I} a_i \sum_{j\in D_i} b_j\right| \leq \sum_{i\in I}\left|a_i \sum_{j\in D_i} b_j\right| = \sum_{i\in I}\left(|a_i|\left|\sum_{j\in D_i} b_j\right|\right).$$

(b) La différence $C_{2n} - A_n B_n$ sommant les $a_i b_j$ sur la réunion des deux triangles ci-contre, la majoration ci-dessus va permettre d'utiliser les hypothèses. Quand $\mathcal{T}$ est le triangle haut-gauche, le majorant s'écrit $\sum_{0\leq i<n}|a_i|\left|\sum_{n<j\leq 2n-i} b_j\right|$, produit d'un $O(1)$ (puisque la série A converge absolument) par un $o(1)$ (différence de restes partiels de la série B convergente), donc tend vers 0. Quand $\mathcal{T}$ est le triangle bas-droite, le majorant s'écrit $\sum_{n<i\leq 2n}|a_i|\left|\sum_{0\leq j\leq 2n-i} b_j\right|$, produit de la forme $o(1)\,O(1)$ (mêmes raisons), donc tend vers 0. Ajouter les deux sommes permet de majorer $|C_{2n} - A_n B_n|$ par la somme de deux $o(1)$, laquelle tend vers 0.

FIG 13 deux triangles

De même, la différence $C_{2n-1} - A_n B_n$ somme les $a_i b_j$ sur la réunion des deux triangles ci-contre (à l'exception du terme-"coin" $a_n b_n = o(1)$) et le même argumentaire tient.

FIG 14 deux triangles + coin

(c) Abrégeons $\ell := \sum_{\mathbb{N}} a \sum_{\mathbb{N}} b$. Le point précédent montre les tendances $\begin{cases} C_{2n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \\ C_{2n-1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \end{cases}$, d'où la tendance $C_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$. Finalement, le produit de Cauchy $A * B$ converge et a pour somme le produit des sommes resp. de A et de B.

(d) La différence $C_n - A_n\left(\sum_{\mathbb{N}} b\right)$ somme les $a_i b_j$ sur le "trapèze infini" ci-contre. Fixons $\varepsilon > 0$ et soit N un naturel au-delà duquel les restes partiels des séries $|A|$ et B sont chacun inférieurs à ε. Lorsque $n > 2N$, l'ordonnée (resp. abscisse) sur le premier (resp. second) trapèze est supérieure à N, donc le majorant du point (7a) est inférieur à $\left(\sup\sum|a|\right)\varepsilon$ (resp. $\varepsilon\sup\left|\sum b\right|$), d'où la conclusion en remplaçant rétrospectivement et convenablement ε dans l'évocation de N.

FIG 15 trapèze

Remarque – Le théorème de Mertens admet une réciproque, au sens où, si $A * B$ converge pour chaque B convergente, alors A converge absolument (conséquence immédiate du théorème de Banach-Steinhaus, hors-programme).

8.

(a) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$. Alors la famille $\left(a^2_{\sigma(n)}\right)$ est sommable et l'exercice d'application (a) section 2.3 montre la sommabilité de la famille $\left(a_n a_{\sigma(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que la majoration

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\left|a_n a_{\sigma(n)}\right| \leq \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|^2\sum_{n\in\mathbb{N}}\left|a_{\sigma(n)}\right|^2} \underset{\text{somme par permutation}}{\overset{\text{invariance de la}}{=}} \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|^2\sum_{\mathbb{N}}|a|^2} = \sum_{\mathbb{N}}|a|^2$$

avec égalité si $\sigma = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$, ce qui détermine la borne supérieure cherchée : la somme de la famille $|a|^2$.

Montrons par ailleurs la nullité de la borne inférieure recherchée. L'idée est de trouver une permutation σ telle que, dans chaque terme $a_n a_{\sigma(n)}$, l'un au moins des indices n ou $\sigma(n)$ soit suffisamment grand pour que l'image par a correspondante soit "petite". Lorsque n est grand, a_n est déjà "petit" et il n'y a rien à faire ; lorsque n est petit, on va forcer $\sigma(n)$ à être "grand". Précisons cela.

Soit $\varepsilon > 0$, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|^2 < \varepsilon$. On définit une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ qui fixe $[2N, \infty|[$ et qui échange i et $i+N$ pour chaque $i \in [0, N|[$.

FIG 16 graphe de σ

On divise alors la somme $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|a_n a_{\sigma(n)}\right|$ en trois bouts correspondants aux domaines $[0, N|[$, $[N, 2N|[$ et $[2N, \infty|[$. Le troisième bout se majore aisément

$$\sum_{n\geq 2N} \left|a_n a_{\sigma(n)}\right| \underset{[2N,\infty|[}{\overset{\sigma \text{ fixe}}{=}} \sum_{n\geq 2N} |a_n|^2 \leq \sum_{n\geq N} |a_n|^2 \leq \varepsilon.$$

Le deuxième bout vaut le premier vu les égalités

$$\sum_{i=N}^{2N-1} \left|a_i a_{\sigma(i)}\right| \underset{j:=i-N}{\overset{\text{reparamétrage}}{=}} \sum_{j=0}^{N-1} \left|a_{j+N} a_{\sigma(j+N)}\right| \underset{\text{de } \sigma}{\overset{\text{définition}}{=}} \sum_{j=0}^{N-1} \left|a_{\sigma(j)} a_j\right| = \sum_{i=0}^{N-1} |a_i| \, |a_{i+N}|$$

et le carré de ce dernier se majore (*via* Cauchy-Schwarz) par

$$\sum_{i=0}^{N-1} |a_i|^2 \sum_{i=0}^{N-1} |a_{i+N}|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^2 \sum_{n=N}^{\infty} |a_n|^2 \leq \varepsilon \sum_{\mathbb{N}} |a|^2 .$$

Par conséquent, la somme $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|a_n a_{\sigma(n)}\right|$ est majorée par $f(\varepsilon)$ où l'on a noté

$$f := \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ t & \longmapsto & t + 2\sqrt{\sum_{\mathbb{N}} |a|^2}\sqrt{t} \end{array} \right. ,$$

ce qui conclut en remplaçant rétrospectivement et convenablement ε (explicitement, on garde les évocations de ε et de N mais on remplace le majorant ε imposé de $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|^2$ par un $\delta > 0$ tel que $f(\delta) < \varepsilon$ évoqué par continuité en 0 de f).

(b) Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des segments réels et $\ell := \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ S & \longmapsto & \max S - \min S \end{array} \right.$ l'application "longueur". Soient D un ensemble dénombrable, $\varphi : D \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}^*$ une bijection, $(A_d)_{d\in D}$ une famille de parties de $\mathbb{R}$ négligables et $\varepsilon > 0$. Pour chaque $d \in D$, il y a alors (par négligeabilité de A_d) une suite $(S_n) \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ telle que $\left\{ \begin{array}{c} \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(S_n) < \frac{\varepsilon}{2^{\varphi(d)}} \\ A_d \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n \end{array} \right.$: on peut donc évoquer (par l'axiome du choix) une suite $\left(S_n^d\right) \in \left(\mathcal{S}^{\mathbb{N}}\right)^D$ telle que

$$\forall d \in D, \ \left[\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell\left(S_n^d\right) < \frac{\varepsilon}{2^{\varphi(d)}}\right] \text{ et } \left[A_d \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n^d\right].$$

En identifiant $\left(\mathcal{S}^{\mathbb{N}}\right)^D$ et $\mathcal{S}^{\mathbb{N}\times D}$, cette famille $\left(S_n^d\right)_{(n,d)\in\mathbb{N}\times D}$ de segments est dénombrable (indexée par le produit de dénombrables $\mathbb{N}\times D$) et sa réunion inclut $\bigcup_{d\in D}\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n^d \supset \bigcup_{d\in D} A_d$. Enfin, la somme des longueurs de ses segments est majorée par

$$\sum_{d\in D}\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell\left(S_n^d\right) \leq \sum_{d\in D} \frac{\varepsilon}{2^{\varphi(d)}} \underset{N:=\varphi(d)}{\overset{\text{reparamétrage}}{=}} \sum_{N\in\mathbb{N}^*} \frac{\varepsilon}{2^N} = \varepsilon, \text{ ce qui conclut.}$$

Remarque – En abrégeant C_S^d la conjonction $\left\{\begin{array}{c} \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell\left(S_n\right) < \frac{\varepsilon}{2^{\varphi(d)}} \\ A_d \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n \end{array}\right.$, l'axiome du choix légitime l'interversion des quantificateurs de $\left(\forall d\in D,\ \exists S\in\mathcal{S}^{\mathbb{N}},\ C_S^d\right)$ à $\left(\exists S\in\left(\mathcal{S}^{\mathbb{N}}\right)^D,\ \forall d\in D,\ C_{S^d}^d\right)$.

9.

(a) L'idée est de remplacer chaque inverse $\frac{1}{N}$ par l'intégrale $\int_0^1 x^{N-1}dx$. L'intérêt est double : les opérations algébriques (en particulier la somme) passent mal à l'inverse mais se comportent très bien vis-à-vis des polynômes et, par ailleurs, cette manipulation va permettre de découpler les indices i et j dans $\frac{1}{i+j+1}$ afin de scinder la sommation sur i,j en un produit de deux sommes :

$$\sum_{i,j=0}^n \frac{a_i a_j}{i+j+1} = \sum_{i,j=0}^n a_i a_j \int_0^1 x^{i+j}dx = \int_0^1 \sum_{i,j=0}^n a_i x^i a_j x^j dx = \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i\right)^2 dx \geq 0.$$

(b) Les deux membres de l'égalité à montrer font sens vu la continuité de leurs intégrandes. Étant par ailleurs chacun linéaires en f, il suffit de montrer l'égalité désirée sur une base de $\mathbb{C}[X]$, par exemple les monômes. Soit donc $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $f = X^{n-1}$. Alors d'une part on les égalités

$$\int_0^\pi f\left(e^{i\theta}\right)e^{i\theta}d\theta = \int_0^\pi e^{ni\theta}d\theta \overset{n\neq 0}{=} \left[\frac{e^{ni\theta}}{ni}\right]_{\theta=0}^\pi = \frac{(-1)^n-1}{ni} = \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ \frac{2i}{n} \text{ sinon} \end{array}\right.,$$

d'autre part l'intégrale $\int_{-1}^1 f = \int_{-1}^1 t^{n-1}dt$ ou bien est nulle si n est pair (par imparité de l'intégrande) ou bien vaut (par parité de l'intégrande) $2\int_0^1 t^{n-1}dt = \left[\frac{2t^n}{n}\right]_{t=0}^1 = \frac{2}{n}$. Quelle que soit la parité de n, on obtient l'égalité voulue.

Remarque – Il est très tentant de reparamétrer à l'aide de l'application $\varphi := \left\{\begin{array}{ccc} [0,\pi] & \twoheadrightarrow & \mathbb{C} \\ \theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{array}\right.$ (qui est de classe C^1) en écrivant

$$-i\int_0^\pi f\left(e^{i\theta}\right)e^{i\theta}d\theta = -\int_0^\pi f\left(\varphi\left(t\right)\right)\varphi'\left(t\right)dt \underset{u:=\varphi(t)}{\overset{\overset{?}{\text{reparamétrage}}}{=}} -\int_{\varphi(0)}^{\varphi(\pi)} f\left(u\right)du = \int_{-1}^1 f,$$

ce qui *semble* valide dès que f est seulement continue sur $\mathbb{C}$ (le cas de l'exercice vu la continuité de chaque polynôme). Or, si $f = [t\mapsto |t|]$, l'égalité ci-dessus devient $2=1$! Où donc l'hypothèse « f polynomiale » a-t-elle été utilisée ?

Explication : l'égalité $\int_0^\pi [f \circ \varphi] \times \varphi' = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\pi)} f$ se montre en évoquant une primitive F de f sur le segment $[\varphi(0), \varphi(\pi)]$ (permis par continuité de f) puis en observant que $F \circ \varphi$ est une primitive sur le segment $[0, \pi]$ de $[F \circ \varphi]' = (F' \circ \varphi)\varphi' = (f \circ \varphi)\varphi'$. Or, pour faire sens, ce dernier calcul requiert *que F soit dérivable sur* $\operatorname{Im}\varphi$ (au sens d'y admettre un développement limité à l'ordre 1), ce qui est bien le cas lorsque f est un polynôme ou plus généralement une série entière définie sur $\mathbb{C}$ tout entier. En revanche, si f est l'application *module*, sa primitive (nulle en 0) sur $[-1, 1]$ est $t \mapsto \frac{t|t|}{2}$ et n'admet de DL_1 en aucun complexe c non nul (indication : l'égalité $\frac{|c+\varepsilon c|-|c|}{\varepsilon c} = |c| \frac{\operatorname{Re}\varepsilon}{\varepsilon} + O_{\varepsilon \to 0}(\varepsilon)$ et l'inégalité $\lim_{\varepsilon \to 0}^{\varepsilon \in \mathbb{R}^*} \frac{\operatorname{Re}\varepsilon}{\varepsilon} = 1 \neq 0 = \lim_{\varepsilon \to 0}^{\varepsilon \in i\mathbb{R}^*} \frac{\operatorname{Re}\varepsilon}{\varepsilon}$).

L'explication précédente montre où la preuve ci-dessus achoppe (l'application *module* n'est pas une série entière définie sur $\mathbb{C}$). Or ce point d'achoppement est *générique* au sens du théorème suivant (culture très hors-programme) : *si, pour chaque $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, l'intégrale $\int_0^1 (f \circ \varphi)\varphi'$ ne dépend pas du chemin C^1 choisi φ de $\varphi(0) = \alpha$ à $\varphi(1) = \beta$, alors f est une série entière définie sur $\mathbb{C}$ tout entier.*

(c) Quand $z = 0$, l'intégrale vaut $\int_{-\pi}^{\pi} 1 \frac{d\theta}{2\pi} = 2\pi \frac{1}{2\pi} = 1 = \delta_0^0$. Sinon, l'intégrande a pour primitive $z \mapsto \frac{1}{2\pi i z} e^{iz\theta}$, d'où les égalités

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\theta} \frac{d\theta}{2\pi} = \left[\frac{e^{iz\theta}}{2\pi i z}\right]_{\theta=-\pi}^{\pi} = \frac{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}}{2\pi i z} \underset{\text{entier}}{\overset{z \text{ est}}{=}} \frac{0}{2\pi i z} = \delta_z^0.$$

(d) Commençons par travailler la somme sur un domaine fini. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a les égalités et majorations

$$\begin{aligned}
& \sum_{a,b=0}^{n} \frac{r_a r_b}{a+b+1} \overset{\text{point (9a)}}{=} \int_0^1 \left(\sum_{a=0}^{n} r_a x^a\right)^2 dx = \int_0^1 P^2 \text{ en notant } P := \sum_{i=0}^{n} r_i X^i \\
\leq \ & \int_{-1}^{1} P^2 = \left|\int_{-1}^{1} P^2\right| \overset{\text{point (9b)}}{=} \left|\frac{1}{i}\int_0^\pi P^2\left(e^{i\theta}\right) e^{i\theta} d\theta\right| \leq \int_0^\pi \left|P\left(e^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta \\
= \ & \int_0^\pi P\left(e^{i\theta}\right) \overline{P\left(e^{i\theta}\right)} d\theta \underset{\text{de } P \text{ sont réels}}{\overset{\text{les coefficients}}{=}} \int_0^\pi P\left(e^{i\theta}\right) P\left(\overline{e^{i\theta}}\right) d\theta = \int_0^\pi P\left(e^{i\theta}\right) P\left(e^{-i\theta}\right) d\theta \\
& \underset{\text{l'intégrande}}{\overset{\text{parité de}}{=}} \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} P\left(e^{i\theta}\right) P\left(e^{-i\theta}\right) d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{a=0}^{n} r_a e^{ia\theta} \sum_{b=0}^{n} r_b e^{-ib\theta} d\theta \\
= \ & \pi \sum_{a,b=0}^{n} r_a r_b \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(a-b)\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \overset{\text{point (9c)}}{=} \pi \sum_{a,b=0}^{n} \delta_a^b r_a r_b = \pi \sum_{a=0}^{n} r_a^2 \leq \pi \sum_{\mathbb{N}} r^2.
\end{aligned}$$

Les mêmes calculs en remplaçant r par $|r|$ donnent la sommabilité de la famille $\left(\frac{r_a r_b}{a+b+1}\right)_{a,b \in \mathbb{N}}$, ce qui donne sens à la somme de l'énoncé. Par ailleurs, puisque la suite $[0, n|]^2$ épuise $\mathbb{N}^2$, faire tendre $n \to \infty$ dans la majoration ci-dessus (toujours en remplaçant r par $|r|$) permet – avec l'exercice d'application (d) section 2.1 – de majorer $\sum_{(a,b)\in\mathbb{N}^2} \frac{|r_a r_b|}{a+b+1} \leq \pi \sum_{\mathbb{N}} |r|^2$. On conclut avec une comparaison triangulaire :

$$\sum_{a,b\geq 0}\frac{r_ar_b}{a+b+1}\leq\left|\sum_{a,b\geq 0}\frac{r_ar_b}{a+b+1}\right|\leq\sum_{a,b\geq 0}\left|\frac{r_ar_b}{a+b+1}\right|\leq\pi\sum_{n\geq 0}r_n^2.$$

10. Supposons la famille sommable. Est alors sommable la sous-famille $\left(\frac{1}{(k^a+1)^\rho}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$, d'où la convergence de la série $\sum\frac{1}{|n^a+1|^\rho}$, ce qui force la tendance vers 0 du terme général $\frac{1}{|n^a+1|^\rho}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$, d'où d'une part $a>0$ (sinon le dénominateur tend vers 1 ou 2^ρ) d'autre part $\rho>0$ (sinon $\frac{1}{|n^a+1|^\rho}$ tend vers 1 ou ∞).

Les normes N_1 et N_a de $\mathbb{R}^2$ étant équivalentes, soit $C>0$ tel que $N_1\geq CN_a$. On a alors les minorations

$$\sum_{k,\ell\geq 1}\frac{1}{(k^a+\ell^b)^\rho}=\sum_{k,\ell\geq 1}\frac{1}{N_a\left(k,\ell^{\frac{b}{a}}\right)^{a\rho}}\geq C^{a\rho}\sum_{k,\ell\geq 1}\frac{1}{N_1\left(k,\ell^{\frac{b}{a}}\right)^{a\rho}}=C^{a\rho}\sum_{\ell\geq 1}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{\left(k+\ell^{\frac{b}{a}}\right)^{a\rho}},$$

d'où la sommabilité de la famille $\left(\frac{1}{\left(k+\ell^{\frac{b}{a}}\right)^{a\rho}}\right)_{k,\ell\in\mathbb{N}^*}$, *a fortiori* celle de la sous-famille $\left(\frac{1}{(k+1)^{a\rho}}\right)_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^*\times\{1\}}$, ce qui s'écrit aussi $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^{a\rho}}<\infty$, d'où $a\rho>1$ par RIEMANN.

Cette dernière minoration livre la décroissance de l'application $t\mapsto\frac{1}{t^{a\rho}}$ ainsi que son intégrabilité en ∞, permettent à $\ell\in\mathbb{N}^*$ fixé une comparaison série-intégrale :

$$\sum_{k\geq 1}\frac{1}{\left(k+\ell^{\frac{b}{a}}\right)^{a\rho}}\geq\sum_{k\geq 1}\int_k^{k+1}\frac{dt}{\left(t+\ell^{\frac{b}{a}}\right)^{a\rho}}=\int_1^\infty\frac{dt}{\left(t+\ell^{\frac{b}{a}}\right)^{a\rho}}$$
$$\underset{u=t+\ell^{\frac{b}{a}}}{\overset{\text{reparamétrage}}{=}}\int_{1+\ell^{\frac{b}{a}}}^\infty u^{-a\rho}du=\frac{\left(1+\ell^{\frac{b}{a}}\right)^{1-a\rho}}{a\rho-1}.$$

On en déduit les minorations

$$\infty>\sum_{k,\ell\geq 1}\frac{1}{(k^a+\ell^b)^\rho}\geq\frac{C^{a\rho}}{a\rho-1}\sum_{\ell\geq 1}\frac{1}{\left(1+\ell^{\frac{b}{a}}\right)^{a\rho-1}},$$

d'où la convergence de la série $\sum\frac{1}{\left(1+n^{\frac{b}{a}}\right)^{a\rho-1}}$ dont le terme général (positif) équivaut à $\frac{1}{n^{b\rho-\frac{b}{a}}}$. RIEMANN livre alors la minoration $b\rho-\frac{b}{a}>1$, *i. e.*

$$\rho>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

Supposons réciproquement $a,b>0$ et $\rho>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. Toujours par équivalences des normes N_1 et N_a, on peut imposer $N_1\leq CN_a$ et reprendre le calcul ci-dessus pour obtenir cette fois une *maj*oration

$$\sum_{k,\ell\geq 1}\frac{1}{(k^a+\ell^b)^\rho}\overset{\text{même}}{\underset{\text{calcul}}{\leq}}C^{a\rho}\sum_{\ell\geq 1}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{\left(k+\ell^{\frac{b}{a}}\right)^{a\rho}}.$$

Les hypothèses impliquant $\rho>\frac{1}{a}$, on peut effectuer à nouveau une comparaison série intégrale cette fois en *maj*orant

$$\sum_{k\geq 1}\frac{1}{\left(k+\ell^{\frac{b}{a}}\right)^{a\rho}}\leq\sum_{k\geq 1}\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{\left(t+\ell^{\frac{b}{a}}\right)^{a\rho}}=\int_0^\infty\frac{dt}{\left(t+\ell^{\frac{b}{a}}\right)^{a\rho}}=\frac{\left(0+\ell^{\frac{b}{a}}\right)^{1-a\rho}}{a\rho-1}.$$

Finalement, la somme de départ est majorée par $\frac{C^{a\rho}}{a\rho-1}\sum_{\ell\geq 1}\frac{1}{\ell^{b\rho-\frac{b}{a}}}$, laquelle converge d'après Riemann vu l'équivalence $b\rho-\frac{b}{a}>1\iff\rho>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

Remarque – Il serait aisé de généraliser : étant donnés ρ un réel, n un naturel et $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$ des réels, la famille $\left(\frac{1}{\left(k_1^{a_1}+k_2^{a_2}+\cdots+k_n^{a_n}\right)^\rho}\right)_{k_1,k_2,\cdots,k_n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable ssi $\rho>\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$. On encourage la lectrice à vérifier ce résultat à l'aune des exemples traités dans le cours.