Evn2
continuité compacté connexité
(reliquat)

Marc SAGE

1er mars 2018

Table des matières

1 Cours

1.1 tendances fonctionnelles coordonnées

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, *soit* $\binom{E_i}{F_i}_{i\in[1,N|]}$ *une famille de* N *couples d'evns et soit* $(f_i, A_i, L_i, \alpha_i)_{i\in[1,N|]}$ *telle que* $\forall i \in [1,N|]\,,\ \begin{cases} f_i : A_i \longrightarrow F_i \\ A_i \subset E_i \\ L_i \in F_i \cup \{\pm\infty\} \\ \alpha_i \in \overline{A_i} \cup \{\pm\infty\} \end{cases}$. *La famille* $(f_i)_{i\in[1,N|]}$ *définit alors une fonction* $\prod_{i\in I} A_i \longrightarrow \prod_{i\in I} F_i$ *et on a l'équivalence*[1]

$$\left[(f_1, f_2, ..., f_N) \underset{(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_N)}{\longrightarrow} (L_1, L_2, ..., L_N)\right] \Longleftrightarrow \left[\forall i \in [1,N|]\,,\ f_i \underset{\alpha_i}{\longrightarrow} L_i\right].$$

D'après la proposition précédente, chaque tendance fonctionnelle se ramène à des tendances séquentielles et, d'après une proposition section ? ? ?, chaque tendance séquentielle dans chaque produit cartésien fini équivaut à chaque tendance "coordonnée" associée, ce qui permet de conclure. Formellement, on déroule les équivalences[2] :

$$\begin{aligned}
& (f_1, f_2, ..., f_N) \underset{(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_N)}{\longrightarrow} (L_1, L_2, ..., L_N) \\
\underset{\text{de tendance}}{\overset{\text{critère séquentiel}}{\Longleftrightarrow}}\ & \forall a \in \left(\prod_{i=1}^{N} A_i\right)^{\mathbb{N}},\ \left[\begin{array}{c} a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N) \Longrightarrow \\ (f_1, f_2, ..., f_N)(a_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (L_1, L_2, ..., L_N) \end{array}\right] \\
\underset{a=:(a^1,a^2,...,a^N)}{\overset{\text{reparamétrage}}{\Longleftrightarrow}}\ & \forall \left(a^1, a^2, ..., a^N\right) \in \prod_{i=1}^{N} A_i^{\mathbb{N}},\ \left[\begin{array}{c} \left(a_n^1, a_n^2, ..., a_n^N\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N) \Longrightarrow \\ \left(f_1\left(a_n^1\right), f_2\left(a_n^2\right), ..., f_N\left(a_n^N\right)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (L_1, L_2, ..., L_N) \end{array}\right] \\
\underset{\text{"coordonnées"}}{\overset{\text{tendances séquentielles}}{\Longleftrightarrow}}\ & \forall \left(a^1, a^2, ..., a^N\right) \in \prod_{i=1}^{N} A_i^{\mathbb{N}},\ \left[\begin{array}{l} \forall i \in [1,N|]\,,\ a_n^i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha_i \Longrightarrow \\ \forall i \in [1,N|]\,,\ f_i\left(a_n^i\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L_i \end{array}\right] \\
\overset{?}{\Longleftrightarrow}\ & \forall \left(a^1, a^2, ..., a^N\right) \in \prod_{i=1}^{N} A_i^{\mathbb{N}},\ \forall i \in [1,N|]\,,\ \left[a_n^i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha_i \Longrightarrow f_i\left(a_n^i\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L_i\right] \\
\overset{\text{interversion des }\forall}{\Longleftrightarrow}\ & \forall i \in [1,N|]\,,\ \forall a \in A_i^{\mathbb{N}},\ a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha_i \Longrightarrow f_i(a_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L_i \\
\underset{\text{de tendance}}{\overset{\text{critère séquentiel}}{\Longleftrightarrow}}\ & \forall i \in [1,N|]\,,\ f_i \underset{a_i}{\longrightarrow} L_i, \text{ ce qui conclut à condition de justifier l'équivalence } \overset{?}{\Longleftrightarrow}.
\end{aligned}$$

Le sens $\Longleftarrow$ étant tautologique, montrons celui $\Longrightarrow$. Soit $i \in [1,N|]$ et soit $a \in A_i^{\mathbb{N}}$ telle que $a_N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \alpha_i$. Puisque $\forall \iota \in [1,N|]\,,\ \alpha_\iota \in \overline{A_\iota}$, on peut invoquer une famille $\left(s^1, s^2, ..., s^N\right) \in \prod_{\iota=1}^{N} A_\iota^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall \iota \in [1,N|]\,,\ s^\iota \longrightarrow \alpha_\iota$. La famille $\left(s^1, s^2, ..., s^{i-1}, a, s^{i+1}, ...s^N\right)$ satisfait alors l'hypothèse et de la conclusion découle la tendance voulue $f_i(a_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L_i$.

1.2 "Relation" de tendance fonctionnel

1. Chez les fonctions, la tendance est une "relation" ternaire reliant les triplets (f, l, α) de $F^A \times F \times \overline{A}$. Chez les suites, la tendance était une "relation" binaire reliant les couples (s, l) de $F^{\mathbb{N}} \times F$ (sous-entendus HP : $A = \mathbb{N}$ et $a = \infty$).

[1] À i fixé, la non-finitude de α_i ou de L_i restreindrait (A_i, E_i, F_i) comme dans la remarque ? ? ? (par exemple, l'égalité $\alpha_i = -\infty$ forcerait $E_i = \mathbb{R}$ et A_i non minorée).

[2] *Rappel* : pour tous énoncés P et Q contenant au plus un symbole libre a, de l'énoncé $\forall a, (P \Longrightarrow Q)$ suit l'implication $(\forall a, P) \Longrightarrow (\forall a, Q)$.

1.3 critère séquentiel de tendance fonctionnel quand $\|a\| \to \infty$

Supposons $f(a) \underset{\|a\|\to\infty}{\longrightarrow} L$. Soit $a \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\|a_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ et montrons $f(a_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L$. Soit $\varepsilon > 0$, soit $M > 0$ tel que $\|a\| > M \Longrightarrow \|f(a) - L\| < \varepsilon$ (permis par l'hypothèse $f(a) \underset{\|a\|\to\infty}{\longrightarrow} L$), soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in]N, \infty|[$, $\|a_n\| > M$ (légitimé par la tendance $\|a_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$) et soit $n \in]N, \infty|[$: on a alors $\|a_n\| > M$, d'où $\|f(a_n) - L\| < \varepsilon$. Nous venons de montrer $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in]N, \infty|[,\ \|f(a_n) - L\| < \varepsilon$, CQFD

Supposons à présent que $f(a)$ ne tend pas vers L quand $\|a\|$ tend vers ∞, ce qui s'écrit

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall M \in \mathbb{N},\ \exists a \in A,\ (\|a\| > M \text{ et } \|f(a) - L\| \geq \varepsilon).$$

Soit un tel $\varepsilon > 0$. L'axiome du choix nous donne alors une suite $a \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall M \in \mathbb{N},\ (\|a_M\| > M \text{ et } \|f(a_M) - L\| \geq \varepsilon)$, ce permet d'une part d'affirmer la tendance $\|a_M\| \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, d'autre part de nier celle $f(a_M) \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} L$, d'où la conclusion par contraposée.

1.4 tableau recap tendance étendues

source \ but	$\forall \varepsilon > 0, \cdots$ $\|f(a) - \ell\| < \varepsilon$	$\forall N, \cdots f(a) > N$	$\forall N, \cdots f(a) < N$
$\exists \delta > 0,\ \forall a \in A,$ $\|a - \alpha\| < \delta \Longrightarrow$	$f(a) \underset{a\to\alpha}{\longrightarrow} \ell$	$f(a) \underset{a\to\alpha}{\longrightarrow} \infty$	$f(a) \underset{a\to\alpha}{\longrightarrow} -\infty$
$\exists M,\ \forall a \in A,$ $a > M \Longrightarrow$	$f(a) \underset{a\to\infty}{\longrightarrow} \ell$	$f(a) \underset{a\to\infty}{\longrightarrow} \infty$	$f(a) \underset{a\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$
$\exists M,\ \forall a \in A,$ $a < M \Longrightarrow$	$f(a) \underset{a\to-\infty}{\longrightarrow} \ell$	$f(a) \underset{a\to-\infty}{\longrightarrow} \infty$	$f(a) \underset{a\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$
$\exists M,\ \forall a \in A,$ $\|a\| > M \Longrightarrow$	$f(a) \underset{\|a\|\to\infty}{\longrightarrow} \ell$	$f(a) \underset{\|a\|\to\infty}{\longrightarrow} \infty$	$f(a) \underset{\|a\|\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$

1.5 Continuité app multilin

Soit I un ensemble fini, supposons que E est un produit d'evns indexé par I et que f est multilinéaire. On a alors l'équivalence[3]

$$f \textit{ est continue} \Longleftrightarrow \exists C > 0,\ \forall a \in E,\ \|f(a)\| \leq C \prod_{i\in I} \|a_i\|.$$

DEM On admettra la première équivalence$\Longleftrightarrow$ f *est continue en* 0 et se concentrera sur la seconde.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Il suffit d'adapter la démonstration ci-dessus. La continuité de f en 0 permet d'invoquer un $\delta > 0$ tel que $\forall a \in A,\ \|a\| < 2\delta \Longrightarrow \|f(a)\| < 1$. Soit alors $a \in E$ dont chaque composante est non nulle (çed tel que $\forall i \in I,\ a_i \neq 0$) et notons v le vecteur $\delta\left(\frac{a_i}{\|a_i\|}\right)$, lequel est de norme δ et d'image $f(v) = \frac{\delta}{\prod \|a_i\|} f(a)$. Puisque $\|v\| < 2\delta$, on a $\|f(v)\| < 1$, d'où la majoration voulue en notant $C := \frac{1}{\delta}$ (majoration restant valable si l'un des a_i s'annule par multilinéarité de f).

$\boxed{\Longleftarrow}$ Utilisons le critère séquentiel. Étiquetons $I = \{i_1, i_2, ..., i_c\}$ où $c := \operatorname{Card} I$ et identifions les vecteurs de E avec les n-uplets de . La multiadditivité de f permet alors d'écrire

$$\begin{aligned}\|f(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{a})\| &\overset{f \text{ est}}{\underset{\text{multiadditive}}{=}} \left\|\sum_{k=1}^{n} f\left(a_{i_1}, ..., a_{i_{k-1}}, \boxed{x_{i_k} - a_{i_k}}, x_{i_{k+1}}, ...x_{i_n}\right)\right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \left\|f\left(a_{i_1}, ..., a_{i_{k-1}}, x_{i_k} - a_{i_k}, x_{i_{k+1}}, ...x_{i_n}\right)\right\| \\ &\overset{\text{hypothèse}}{\leq} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\|a_{i_1}\| \cdots \|a_{i_{k-1}}\|}_{\text{borné quand } x\to a} \underbrace{\|x_{i_k} - a_{i_k}\|}_{\text{tend vers } 0} \underbrace{\|x_{i_{k+1}}\| \cdots \|x_{i_n}\|}_{\text{borné quand } x\to a} = \sum_{k=1}^{n} o(1) = o(1).\end{aligned}$$

[3] L'evn produit E est normé comme d'habitude par $(a_i)_{i\in I} \mapsto \max_{i\in I} \|a_i\|$.

Soit $a \in E^{\mathbb{N}}$ une suite tendant vers 0. L'ensemble indexant I étant fini, cette tendance équivaut à celle de chacune des composantes, çed à $\forall i \in I,\ [a_n]_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Prendre les normes et multiplier (on peut car I est fini) donne alors la tendance $\prod_{i\in I} \|[a_n]_i\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$; le membre de gauche majorant $\|f(a_n)\|$, cette dernière norme tend elle aussi vers 0, d'où la tendance voulue $f(a_n) \longrightarrow 0$.

1.6 Continuité locale

Soit un recouvrement de A par des ouverts de A mettons $A = \bigcup_{i\in I} O_i$ où O_i est ouvert dans A pour chaque $i \in I$, supposons f continue sur O_i pour chaque $i \in I$, soient $\alpha \in A$ et $a \in A^{\mathbb{N}}$ tels que $a \longrightarrow \alpha$ et soit $\iota \in I$ tel que $\alpha \in O_\iota$. Puisque O_ι est ouvert dans A et contient la limite $\alpha = \lim a$, on peut invoquer un naturel N au-delà duquel chaque terme de la suite a (qui est à valeurs dans A) tombe dans O_ι et définir une suite $a' := (a_{n+N})_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans O_ι. La tendance $a' \longrightarrow \alpha$ et la continuité de f sur O_ι livrent alors la tendance $f(a'_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(\delta)$, çed $f(a_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(\delta)$, d'où la continuité de f en α.

2 Exos

2.1 Lim est unique morhpisme d'algèbre AVEC QUOTIENTS

Soit $a \in E$. Nous présentons ici une caractérisation algébrique de la limite en a des applications scalaires convergeant en a.

Sur l'ensemble $\coprod_{P\subset E} \mathbb{K}^P$ des applications scalaires dont la source est une partie de E, on admet que la relation formée des couples d'applications coïncidant sur l'intersection de leurs sources est une relation d'équivalence, dont on notera les classes avec des barres horizontales :

$$\forall f, g \in \coprod_{P\subset E} \mathbb{K}^P, \qquad \begin{array}{c} \overline{f} = \overline{g} \overset{\text{déf.}}{\iff} f_{|D} = g_{|D} \\ \text{où } D := \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \end{array} .$$

On note alors $\mathbb{F}$ la partie de $\coprod_{P\subset E} \mathbb{K}^P$ formée des applications dont la source est un voisinage de a (pas forcément le même) et convergeant en a, puis on admet l'existence d'une unique structure d'algèbre sur l'ensemble quotient

$$\mathcal{A} := \left\{ \overline{f}\ ;\ f \in \mathbb{F} \right\} \text{ telle que}$$

$$\begin{array}{c} \forall f, g, h \in \mathcal{A} \\ \forall \lambda \in \mathbb{K} \end{array}, \qquad \begin{array}{c} \lambda \cdot \overline{f} + \overline{g} \times \overline{h} = \overline{\lambda\ f_{|V} + g_{|V}\ h_{|V}} \\ \text{où } V := \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} h \end{array} .$$

a. *Quels sont les neutres de l'algèbre $\mathcal{A}$?*

b. *Montrer que l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \overline{f} & \longmapsto & \lim_a f \end{array} \right.$ fait sens et est un morphisme d'algèbres.*

c. *Soit $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{K}$ un morphisme d'algèbres.*

   i. *Montrer les implications $\forall f \in \mathbb{F},\ \varphi\left(\overline{f}\right) = 0 \Longrightarrow \lim_a f = 0$. On pourra raisonner par contraposée.*

   ii. *En déduire que φ est le morphisme de la question 2.1.*

---

a. Notons z l'application nulle (de source E). On a alors pour chaque $f \in \mathbb{F}$, en abrégeant $D := \operatorname{Dom} f$ et en utilisant les égalités $\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} z = D \cap E = D$, les égalités

$$\overline{f} + \overline{z} \underset{\text{l'addition de } \mathcal{A}}{\overset{\text{propriétés de}}{=}} \overline{f_{|D} + z_{|D}} \underset{\text{de } z}{\overset{\text{définition}}{=}} \overline{f_{|D} + 0_{|D}} \underset{\text{de } \mathbb{K}^D}{\overset{\text{neutre additif}}{=}} \overline{f_{|D}} \underset{\text{de } D}{\overset{\text{définition}}{=}} \overline{f},$$

ce qui montre que $\overline{z}$ est le neutre additif de $\mathcal{A}$. On montrerait de même que la classe de l'application de source E partout égale à 1 est le neutre multiplicatif de $\mathcal{A}$.

Remarque – **Culture hors programme**. L'algèbre $\mathcal{A}$ est appelée la ***limite inductive*** des algèbres $\{f : V \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ f$ con lorsque V décrit les voisinages de a. (L'algèbre $\mathbb{K}[X]$ est de même la limite inductive de celles $\mathbb{K}_n[X]$ lorsque n parcourt $\mathbb{N}$.)

b. Tout d'abord, à $f \in \mathbb{F}$ fixé, d'une part f converge en a, d'autre part le point a est centre d'une boule incluse dans $\operatorname{Dom} f$ (car ce dernier est voisinage de a), donc adhère à ce domaine, ce qui donne sens[4] à $\lim_a f$.

Ensuite, pour chaque classe $C \in \mathcal{A}$, on a à $f, g \in C$ fixés, en abrégeant $V := \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$ (qui est un voisinage de a), les égalités

$$\lim_a f \underset{\text{la tendance en } a}{\overset{\text{caractère local de}}{=}} \lim_a f_{|V} \overset{\overline{f}=\overline{g}}{=} \lim_a g_{|V} \underset{\text{la tendance en } a}{\overset{\text{caractère local de}}{=}} \lim_a g,$$

ce qui montre que $\{\lim_a h\}_{h \in C}$ est un singleton et donne par conséquent sens à l'application[5]

$$L := \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ C & \longmapsto & \text{l'unique élément de } \{\lim_a f\}_{f \in C} \end{array} \right. .$$

C'est ainsi qu'il convient de comprendre l'application de l'énoncé :

$$\text{à } C \in \mathcal{A} \text{ fixé, invoquer un } f \in C \text{ et envoyer } C \text{ sur } \lim_a f,$$

image qui ne dépend pas du représentant f invoqué, ce qui permet de *choisir* un tel représentant pour évaluer $L(C)$. En particulier, à $f \in \mathbb{F}$ fixé, la classe $\overline{f}$ a pour image $\lim_a f$ (choisir f pour représenter $\overline{f}$).

Montrons enfin que L est un morphisme d'algèbres. Soient $f, g, h \in \mathbb{F}$ dont on note V l'intersection des sources (laquelle est un voisinage de a car les sources de f, g, h en sont). On a alors d'une part les égalités[6]

$$L(1_{\mathcal{A}}) \overset{\text{question 2.1}}{=} L\left(\overline{1}\right) \underset{\text{de } L}{\overset{\text{définition}}{=}} \lim_a 1 \underset{\text{application constante}}{\overset{\text{tendance d'une}}{=}} 1,$$

d'autre part pour chaque $\lambda \in \mathbb{K}$ les égalités

$$\begin{aligned} L\left(\lambda\overline{f} + \overline{g}\overline{h}\right) & \underset{\text{lois de } \mathcal{A}}{\overset{\text{propriétés des}}{=}} L\left(\overline{\lambda f_{|V} + \left(g_{|V}\right)\left(h_{|V}\right)}\right) \\ & \underset{\text{de } L}{\overset{\text{définition}}{=}} \lim_a \left(\lambda f_{|V} + \left(g_{|V}\right)\left(h_{|V}\right) \right) \\ & \underset{\text{sur les tendances}}{\overset{\text{opérations algébriques}}{=}} \lambda \lim_a f_{|V} + \left(\lim_a g_{|V}\right)\left(\lim_a h_{|V}\right) \\ & \underset{\text{de } L}{\overset{\text{définition}}{=}} \lambda L\left(\overline{f}\right) + L\left(\overline{g}\right) L\left(\overline{h}\right), \ c.\ q.\ f.\ d. \end{aligned}$$

c.

i. Soit $f \in \mathbb{F}$ tel que $\lim_a f \neq 0$. On peut alors invoquer un voisinage V de a sur lequel la restriction de f ne s'annule pas, ce qui donne sens à l'inverse $g := \frac{1}{f_{|V}}$. Les égalités

$$1_{\mathcal{A}} \overset{\text{question 2.1}}{=} \overline{1} = \overline{1_{|V}} \underset{\text{de } g}{\overset{\text{définition}}{=}} \overline{f_{|V} \cdot g} \underset{\text{lois de } \mathcal{A}}{\overset{\text{propriétés des}}{=}} \overline{f_{|V}} \cdot \overline{g} = \overline{f} \cdot \overline{g}$$

livrent celles

$$1 \underset{\text{l'unité}}{\overset{\varphi \text{ préserve}}{=}} \varphi(1_{\mathcal{A}}) = \varphi\left(\overline{f} \cdot \overline{g}\right) \underset{\text{multiplicatif}}{\overset{\varphi \text{ est}}{=}} \varphi\left(\overline{f}\right)\varphi\left(\overline{g}\right),$$

d'où la non-nullité de $\varphi\left(\overline{f}\right)$ désirée.

ii. Soit $f \in \mathbb{F}$ et notons $\lambda := \varphi\left(\overline{f}\right)$. On a alors les égalités

$$\varphi\left(\overline{\lambda - f}\right) \underset{\text{lois de } \mathcal{A}}{\overset{\text{propriétés des}}{=}} \varphi\left(\lambda 1_{\mathcal{A}} - \overline{f}\right) \underset{\text{linéaire}}{\overset{\varphi \text{ est}}{=}} \lambda\varphi(1_{\mathcal{A}}) - \varphi\left(\overline{f}\right) \underset{\text{de } \lambda}{\overset{\text{définition}}{=}} \lambda 1 - \lambda = 0,$$

d'où (avec la question précédente) l'égalité $\lim_a (\lambda - f) = 0$, *i. e.* $\lambda - \lim_a f = 0$, et la conclusion $\varphi\left(\overline{f}\right) = \lambda = \lim_a f$.

Remarque – **Culture**. La lectrice et le lecteur avertis auront décelé en filigrane le classique suivant : *deux formes linéaires*[7] *non nulles sont colinéaires ssi leurs noyaux sont égaux.*

Remarque – Cet exercice possède un analogue discret affirmant que l'application lim définie sur l'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}_{\text{cv}}$ des suites scalaires convergentes est l'unique morphisme d'algèbres $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}_{\text{cv}} \longrightarrow \mathbb{K}$ invariant par extraction.

---

[4] L'*existence* d'une limite en a équivaut à la convergence de f en a, l'*unicité* d'une telle limite équivaut à l'adhérence de a à la source de f.

[5] L comme « limite »

[6] Ne pas oublier le neutre multiplicatif !

[7] Les formes linéaires $\mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{K}$ en jeu ici sont d'une part $\lim_a$, d'autre part la composée $\varphi \circ \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{F} & \twoheadrightarrow & \mathcal{A} \\ f & \mapsto & \overline{f} \end{array} \right.$.

2.2 Application prorpes

1. *On qualifie de* **propre** *toute application continue par laquelle la préimage de chaque compact (but) est compacte.*
   (a) *Supposons E et F chacun de dimension finie et f continue. Montrer alors que f est propre ssi $\|f(a)\| \underset{\|a\|\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.*
   (b) *Supposons E de dimension finie, A fermée, f injective et propre. Montrer alors la continuité de la réciproque $g := \left[f_{|\operatorname{Im} f}\right]^{-1}$.*
   (c) *(plus difficile) Montrer que f est propre ssi l'image directe par f de chaque fermé est fermée et si la préimage par f de chaque singleton est fermée. (Pour le sens réciproque, on pourra admettre le caractère fermé de l'ensemble des termes de chaque suite sans valeur d'adhérence, lequel découle de l'exercice 4 chap evn1 ? ? ?)*

DEM

1.
   (a) $\boxed{\Longleftarrow}$ Soit L un compact but. L'espace source étant de dimension finie, il suffit de montrer que la préimage $f^{-1}(L)$ est fermée et bornée. Le compact L étant fermé, sa préimage par l'application continue f est fermée. Le compact L est par ailleurs borné : soit $N > 0$ un réel tel que $L \subset \mathring{\mathcal{B}}(0, N)$. L'hypothèse permet alors d'invoquer un réel $M > 0$ tel que $\|a\| > M \Longrightarrow \|f(a)\| > N$ et la préimage $f^{-1}(L)$ est alors bornée par M.

   $\boxed{\Longrightarrow}$ Par contraposée. Soit $a \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\|a_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ et telle que, en notant $b := (f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $n \mapsto \|b_n\|$ ne tend pas vers ∞. Il y a alors une extractrice x telle que la suite $b \circ x$ est bornée, d'où (par compacité des segments réels) une extractrice y telle que la suite $b \circ x \circ y$ converge. La partie $\left\{b_{x(y(n))}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \left\{\lim_{n\to\infty} b_{x(y(n))}\right\}$ est alors compacte mais sa préimage n'est pas bornée car contient les termes de la suite $a \circ x \circ y$ qui vérifie $\left\|a_{x(y(n))}\right\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$

   (b) Soient $b \in f(A)^{\mathbb{N}}$ et $\beta \in f(A)$ tels que $b \longrightarrow \beta$, notons $a := g \circ b$ et $\alpha := g(\beta)$, de sorte à avoir l'appartenance $a \in A^{\mathbb{N}}$ et les égalités $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = f(a_n)$. Si l'on montre que a converge (sa limite restant alors dans A car ce dernier est fermé), on aura alors les égalités

   $$f(\lim a) \underset{\text{continue}}{\overset{f \text{ est}}{=}} \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} b_n = \beta = f(\alpha), \quad \begin{array}{c}\text{d'où (par injectivité) l'égalité } \lim a = \alpha, \\ \text{ce qui conclura à la tendance } a \longrightarrow \alpha.\end{array}$$

   Montrons déjà que la suite a est bornée : il y aurait sinon une extractrice x telle que $\left\|a_{x(n)}\right\| \longrightarrow\longrightarrow \infty$, d'où (en utilisant la question ? ? ?) la tendance$\left\|f\left(a_{x(n)}\right)\right\| \longrightarrow\longrightarrow \infty$, laquelle contredirait la tendance $\left\|b_{x(n)}\right\| \longrightarrow\longrightarrow \|\beta\|$. La suite a est donc à valeurs dans l'intersection du fermé A avec une boule fermée, laquelle intersection est fermée bornée, çed compacte puisque E est de dimension finie. Il suffit par conséquent de montrer que a possède au plus une valeur d'adhérence. Soient l et l' deux valeurs d'adhérence de a : les images $f(l)$ et $f(l')$ sont alors (par continuité de f) valeurs d'adhérence de la suite $f \circ a = b$, donc sont égales (à $\lim b = \beta$), d'où par injectivité de f l'égalité $l = l'$ désirée.

   (c) $\boxed{\Longrightarrow}$ Chaque singleton étant compact, sa préimage est compacte. Soit par ailleurs Φ un fermé source, soient $a \in \Phi^N$ et $l \in F$ tels que $f(a_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$. L'ensemble $\{f(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{l\}$ est alors compact, donc sa préimage K est compacte ; puisque a prend ses valeurs dans K, elle possède une valeur d'ahérence, mettons $a_{x(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$; puisque a prend ses valeurs dans le fermé Φ, on a l'appartenance $\alpha \in \Phi$. La continuité de f livre alors la tendance $f\left(a_{x(n)}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(\alpha)$, d'où les égalités $l = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(a_{x(n)}\right) = f(\alpha) \in f(\Phi)$, ce qui conclut.

   $\boxed{\Longleftarrow}$ Soit L un compact but et soit par l'absurde $k \in f^{-1}(L)^{\mathbb{N}}$ sans valeur d'adhérence. La suite $(f(k_n))_{n\in\mathbb{N}}$ prend alors ses valeurs dans le compact L, donc on peut imposer (quitte à extraire) qu'elle converge vers un certain $l \in L$. Montrons alors que la suite $n \mapsto \min\{N \in]n, \infty[\ ;\ f(k_N) = l\}$ fait sens : elle définira alors une extractrice extrayant de k une suite à valeurs dans le compact $f^{-1}(\{l\})$, *a fortiori* possédant une valeur d'adhérence, ce qui sera une contradiction.

   Soit donc n un naturel et montrons l'existence d'un naturel $N > n$ tel que $f(k_N) = l$. La suite $(k_\nu)_{\nu > n}$ n'a (comme k) aucune valeur d'adhérence, donc l'ensemble de ses termes est fermé (d'après le résultat admis), donc l'image par f de cet ensemble est fermé. Or l est limite de la suite $(f(k_\nu))_{\nu>n}$, donc cette limite est de la forme $f(k_N)$ pour un certain naturel $N > n$, ce qui conclut.

Mq $\lambda \mapsto \prod (X-\lambda)$ est propre. Vu que dim finie et cnotinue, suffit mq préimages de borné sont bornée –> location racines. Si K bornée dans $F := {}^u\mathbb{C}_N[X]$, on montre que les racines de P sont bronée par $1 + \sup_{p\in F} \|p\|_\infty$.
Si continue et propre, mq alors fermée. Si de plus surj, alors ouverte. Eg : $\mathbb{C}^n \twoheadrightarrow \mathbb{C}_n^u[X]$

2.3 extrémale et compacité

Supposons que chaque application $A \longrightarrow \mathbb{R}$ continue est bornée. Montrer alors que A est fermée puis compacte.

Montrons que A est fermée. Soient par l'absurde $a \in A^{\mathbb{N}}$ et $l \in E \backslash A$ tels que $a \longrightarrow l$: l'application $\alpha \mapsto d(\alpha, l)$ est alors continue (car 1-lipschitizienne), ne s'annule pas sur A (car $l \notin A$) et a pour infimum 0 (car $a \longrightarrow l$), donc son inverse est défini sur A, y est continu et n'y est pas borné, ce qui est absurde.

Montrons que chaque suite à valeurs dans A possède une valeur d'adhérence (nécessairement dans A puisque A est fermée), ce qui conclura. Soit par l'absurde $a \in A^{\mathbb{N}}$ sans valeur d'adhérence. Aucun de ses termes n'en est alors valeur d'adhérence, ce qui s'écrit

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \exists r > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \|a_n - a_m\| > 2r.$$

L'axiome du choix nous livre alors une application $r : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que $\forall m, n \in \mathbb{N},\ \|a_n - a_m\| > 2r_m$. Montrons alors, en notant $B_n := \mathring{\mathcal{B}}(a_n, r_n)$ pour chaque naturel n, que l'application $S := \alpha \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{r_n} d(\alpha, A \backslash B_n)$ fait sens et est continue : elle sera alors bornée, ce que contredisent à $n \in \mathbb{N}$ fixé les égalité et tendance $S(a_n) = n \longrightarrow\longrightarrow \infty$.

PLUS SIMPLE ? ? ? $\inf_{p\neq q} d(a_p, a_q) > 0$

Par définition de la suite r, les boules B_n sont deux à deux disjointes quand n parcourt $\mathbb{N}$; par ailleurs, à $n \in \mathbb{N}$ fixé, être à distance non nulle du fermé $A \backslash B_n$ revient à tomber hors de ce fermé, çed à appartenir à B_n. On en déduit à $\alpha \in A$ fixé que la somme $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{r_n} d(\alpha, A \backslash B_n)$ a au plus un terme non nul, ce qui lui donne sens. Montrons alors que l'application S est continue à l'aide d'un recouvrement ouvert. Observer que le raisonnement précédent est inchangé si l'on remplace partout B_n par $O_n := \mathring{\mathcal{B}}(a_n, 2r_n)$: par conséquent, pour chaque naturel n, l'application S coïncide sur l'ouvert O_n avec l'application $\alpha \mapsto \frac{n}{r_n} d(\alpha, A \backslash B_n)$, laquelle est continue (composée d'une homothétie et d'une application "distance à une partie"). Coïncidant par ailleurs sur l'ouvert $E \Big\backslash \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_n}$ avec l'application nulle (qui est continue),

2.4 COmpacts et polynômes

Soient $Z \subset \mathbb{C}$ et $N \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes complexes unitaire de degré N dont chaque racine appartient à Z. Montrer Z compact ssi $\mathcal{P}$ compact. Si Z ouvert : *$\mathcal{P}$ ouvert ? ouvert dans poly unitaire ?*

Les coef des p$\in \mathcal{P}$ sont application sym elem en les racines, il y a nb fini de telles fns (n+1), donc quand $\mathcal{Z}$ bornée ces coefs sont bornée. Réciproque, si $\mathcal{P}$ borné, alors $\left\{(X-\lambda)^N\right\}_{\lambda\in Z}$ est bornée pour norme ∞, donc $\left\{\lambda^N\right\}_{\lambda\in Z}$ borné, çed $\{\lambda\}_{\lambda\in Z}$ borné

$f := \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^N & \twoheadrightarrow & {}^uC_N[X] \\ \lambda & \mapsto & \prod (X-\lambda_i) \end{array}$ est continue et$Z^N = f^{-1}(\mathcal{P})$, donc si $\mathcal{P}$ fermé alors Z^N fermé çed Z fermé.

Soit $p \in \mathcal{P}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \pi$. Alors (lemme) on peut approcher les racines de π par des racines de p, donc les racines de π sont dans $\overline{Z}$, donc si Z fermé alors $\mathcal{P}$ fermé.

En fait, $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^N & \twoheadrightarrow & {}^uC_N[X] \\ \lambda & \mapsto & \prod (X-\lambda_i) \end{array}$ est propre, donc fermé.

2.5 normes & continuité

Supposons d'une part l'evn but F de dimension finie, d'autre part l'application f linéaire et surjective. Montrer alors que l'application $b \mapsto \inf_{f(a)=b}^{a\in E} \|a\|$ est une norme sur F ssi f est continue.

Notons N l'application considérée, laquelle fait bien sens puisque la partie $f^{-1}(\{b\})$ est non vide pour chaque $b \in F$ en vertu de la surjectivité de f.

Si N est une norme, la majoration $N(f(a)) = \inf_{f(v)=f(a)}^{v\in E} \|v\| \leq \|a\|$ montre alors que f est LIP pour la norme N, donc LIP tout court (puisque l'ev but est de dimension finie), *a fortiori* continue. Montrons à présent que N est positivement homogène et vérifie les comparaisons triangulaires, ce indépendemment de la continuité de f.

Vu l'égalité $f(0) = 0$ (résultant de l'additivité de f), on peut minorer

$$N(0) = \inf_{f(a)=0}^{a\in E} \|a\| \leq \|0_E\| = 0, \text{ d'où l'égalité } N(0) = 0 \text{ (vu que } N \text{ est positive).}$$

La positive homogénéité de N découle alors des égalités à $b \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$ fixés[8]

$$N(\lambda b) = \inf_{f(a)=\lambda b}^{a\in E} \|a\| \underset{\text{homogène}}{\overset{f \text{ est}}{=}} \inf_{f\left(\frac{a}{\lambda}\right)=b}^{a\in E} \|a\| \underset{(\text{légitime car } \lambda\neq 0)}{\overset{\text{reparamétrage } v:=\frac{a}{\lambda}}{=}} \inf_{f(v)=b}^{v\in E} \|\lambda v\| = \inf_{f(v)=b}^{v\in E} |\lambda| \|v\| \overset{|\lambda|>0}{=} |\lambda| \inf_{f(v)=b}^{v\in E} \|v\| = |\lambda| N(b).$$

Montrons par ailleurs les comparaisons triangulaires. Soient $b, \beta \in F$ et soient $a, \alpha \in E$ tels que $\binom{b}{\beta} = \binom{f(a)}{f(\alpha)}$. L'égalité $f(a+\alpha) = b + \beta$ (résultant de l'additivité de f) permet alors de majorer

$$N(b+\beta) = \inf_{f(v)=b+\beta}^{v\in E} \|v\| \leq \|a+\alpha\| \leq \|a\| + \|\alpha\|, \text{ d'où } N(b+\beta) - \|\alpha\| \leq \|a\|.$$

Vu que a a été invoqué dans $f^{-1}(\{b\})$, nous pouvons le "désinvoquer" et majorer $N(b+\beta) - \|\alpha\| \leq \inf_{f(a)=b}^{a\in E} \|a\| = N(b)$, ce qui se réécrit $N(b+\beta) - N(b) \leq \|\alpha\|$, d'où l'on tire (même argument) les comparaisons $N(b+\beta) - N(b) \leq N(\beta)$ désirées.

Supposons enfin f continue et soit $b \in F$ tel que $N(b) = 0$. La préimage $f^{-1}(\{b\})$ est alors fermée (comme préimage continue du fermé $\{b\}$) et la distance de 0 à ce fermé est nulle, donc 0 appartient à ce fermé, çed $f(0) = b$, d'où $b = 0$ par linéarité de f.

2.6 isométrie surjective

(et EXO 12 http ://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00039.pdf

Supposons d'une part A compact stable par f, d'autre part f continue et telle que

$$\forall a, b \in A, \ \|f(a) - f(b)\| \geq \|a - b\|.$$

Soient $a, b \in A$ dont on note resp. i et j les suites des itérés par f.

2.7 boule de rayuon minimal incluant un compac

Application : soit G groupe compact d'isométries affines . Soit a un point. Alors l'orbite $G \cdot a$ est bornée, donc est incluse dans une unique boule. Cette boule est stable par G, donc (par isométrie) son centre est fixé par G. Donc G est conjugué à un groupe d'isométries linéaires, ie à sous-groupe de $O(E)$.

Supposons A bornée et E ddf.. Montrer qu'il y a une boule contenant A et de rayon minimal pour cette propriété.

On suppose de plus la norme de E préhilbertienne. Montrer alors l'unicité d'une boule fermécomme ci-dessus. Discuter les hypothèses.

1. Montrons que l'application $k \overset{\rho}{\mapsto} \inf\left\{r > 0 \ ; \ K \subset \overline{\mathcal{B}}(k, r)\right\}$ est 1-LIP sur K. Il en résultera, par compacité de K, qu'elle atteindra son infimum en un point $\kappa \in K$ et l'on montrera alors l'inclusion $K \subset \overline{\mathcal{B}}(\kappa, \rho(\kappa))$.

RQ : faux si boule *incluse* (CEG : K rectangle)

[8] *Rappel* : on a les égalités $\begin{matrix}\forall p \in \mathbb{R}_+^* \\ \forall P \subset \mathbb{R}_+\end{matrix}$, $\inf(pP) = p \inf P$.

2.8 Pas de partitions du plans en cercles infinis

Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de cercles infinis partitionnant $\mathbb{C}$. Montrer alors les trois points suivants :

1. *pour chaques cercles C et C' de $\mathcal{C}$ tels que C' passe par le centre de C, le rayon de C' est strictement inférieur à la moitié de celui de C :*

FIG

2. *il y a une suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement décroissante de disques fermés telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists C \in \mathcal{C},\ \operatorname{Fr} D_n = C$ et telle que le rayon du disque D_n tend vers 0 quand $n \to \infty$;*
3. *Conclure à une contradiction en invoquant un point dans l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n$.*

Montrer que le plan $\mathbb{C}$ ne peut être partitionné en cercles infinis.

1. Soient $C, \Gamma \in \mathcal{C}$ dont on note r et ρ les rayons respectifs tels que Γ passe par le centre c de C et notons γ le point de Γ diamètralement opposé à c. Soit $\pi : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \Gamma$ un paramétrage continu de Γ tel que $\binom{\pi(0)}{\pi(1)} = \binom{c}{\gamma}$. L'application $t \mapsto |\pi(t) - c| - r$ ne peut alors s'annuler sur $\mathbb{R}$: un point de $\operatorname{Im} \pi$ serait sinon sur le cercle de centre c et rayon r, d'où un point dans $\Gamma \cap C$, ce qui forcerait l'égalité $\Gamma = C$, d'où l'appartenance $c \in \Gamma = C$ et la nullité absurde du rayon r. Cette application garde donc (par continuité) un signe constant : vu la négativité de $\pi(0) = -r$, on en déduit celle de $\pi(1)$, ce qui s'écrit $|\gamma - c| < r$, çed $2\rho < r$, CQFD
2. L'application $C \mapsto$ [le cercle de $\mathcal{C}$ passant par le centre de C] de source $\mathcal{C}$ fait sens (puisque les éléments de $\mathcal{C}$ partitionnent le plan) et stabilise $\mathcal{C}$ (par construction), donc définit par itération une suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$. Pour chaque naturel n, notons r_n le rayon de C_n et $D_n := \operatorname{Conv} C_n$ le disque fermé associé à C_n. Le point précédent livre alors à n fixé la majoration $r_{n+1} < \frac{r_n}{2}$. Par ailleurs, à $n \in \mathbb{N}$ fixé, en notant c et c' les centres respectifs de C_n et C_{n+1}, on a pour chaque $d \in D_{n+1}$ les majorations[9]

$$|d - c| \leq \underbrace{|d - c'|}_{\leq r_{n++1} \text{ car } d \in D_{n+1}} + \underbrace{|c' - c|}_{= r_{n+1} \text{ car } c \in C_{n+1}} \leq 2r_{n+1} < r_n, \text{ ce qui montre les inclusions } D_{n+1} \subset \mathring{D}_n \subsetneq D_n.$$

3. La suite décroissantes $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de compacts non vides possède un point commun κ à chacun de ses termes. Notons Γ le cercle de $\mathcal{C}$ contenant κ et appelons ρ son rayon. Pour chaque naturel n, l'appartenance $\kappa \in D_n$ et la même preuve qu'en 1 ? ? ? montreraient alors la majoration $2\rho < r_n$, contredisant la tendance $r_n \longrightarrow\longrightarrow 0$.

2.9 Peigne pas cpa

1. *Pour chaque réel r, notons D_r la demi-droite $\{r\} \times \begin{matrix}\mathbb{R}_+ \\ \mathbb{R}_-^*\end{matrix}$ si $r \begin{matrix}\in \\ \notin\end{matrix} \mathbb{Q}$ du plan $\mathbb{R}^2$. Soit i un réel irrationnel, soit $c : [0,1] \longrightarrow \coprod_{r\in\mathbb{R}} D_r$ un chemin continu d'origine un point de D_i, appelons $\binom{x}{y}$ les applications "coordonnées" de c, notons T la partie $\{t \in [0,1]\ ;\ x([0,t]) \subset \{i\}\}$ et notons enfin $\tau := \sup T$.*
   (a) *Établir l'égalité $T = [0, \tau]$.*
   (b) *En considérant un voisinage de τ où y ne prend aucun valeur positive, montrer l'égalité $\tau = 1$.*
   (c) *Conclure que le chemin c reste à valeurs dans la droite D_i.*

Solution proposée

1. (a) La partie T contient déjà 0 d'après l'hypothèse $c(0) \in D_i$. Soit par ailleurs $t \in T^{\mathbb{N}}$ croissante et tendant vers τ (permis par définition de τ et car T est non vide) : on a alors les inclusions

$$x([0,\tau[) \overset{t \text{ croît et}}{\underset{\text{tend vers } \tau}{=}} x\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0, t_n[\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} x([0, t_n[) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{x([0, t_n])}_{\subset\{i\} \text{ car } t_n \in T} \subset \{i\},$$

d'où l'appartenance $\tau \in T$. Montrons par ailleurs que T est stable par minorant dans $[0,1]$, au sens où $\forall t \in T,\ \forall s \in [0,1],\ s < t \Longrightarrow s \in T$: on a en effet pour de tels $s < t$ les inclusions $x([0,s]) \overset{s<t}{\subset} x([0,t]) \overset{t\in T}{\subset} \{i\}$. La partie T est par conséquent un intervalle de $[0,1]$ contenant 0 ainsi que sa borne supérieure, donc vaut $[0, \tau]$

[9] *Modulo* invocation d'un élément dans $\mathcal{C}$ en guise de premier terme.

(b) La continuité de x livrant l'égalité $x(\tau) = \lim_{n\to\infty} x(t_n) = i$, on a l'appartenance $c(\tau) \in D_i$, d'où la majoration $y(\tau) < 0$. Par continuité de y, il y a un voisinage V de τ dans $[0,1]$ où y reste strictement négative – donc où x reste à valeurs irrationnelles – et l'égalité désirée $\tau = 1$ revient à l'inclusion $V \cap [\tau, 1] \subset \{\tau\}$.

FIG $y(V) < 0$ $x(\tau) \neq x(v)$ séparés par droite d'abscisse rationnelle

Soit donc $v \geq \tau$ dans V : on a alors la majoration $y_{|[\tau,v]} < 0$, *i. e.* l'inclusion $x([\tau, v]) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ce qui montre (avec la densité de $\mathbb{Q}$) que l'intervalle $x([\tau, v])$ est réduit au singleton $\{x(\tau)\} = \{i\}$, d'où l'inclusion $x([0,v]) \subset \{i\}$, la majoration $v \leq \sup T$ et l'égalité $v = \tau$ voulue.

(c) D'après les questions précédentes, la partie $T = [0, \tau] = [0, 1]$ contient 1, ce qui s'écrit $x([0,1]) \subset \{i\}$, *i. e.* $c([0,1]) \subset D_i$, d'où la conclusion.

2.10 frontière cpa fermés

Soit F un fermé de E dont la frontière est cpa. Montrer alors que F est cpa. Discuter les hypothèses.

Soient $f, \varphi \in F$, notons Γ la composante cpa de f et supposons par l'absurde $\varphi \notin \Gamma$. Les points f et φ sont alors distincts et l'on peut donner sens au vecteur $u := \frac{\overrightarrow{f\varphi}}{\left\|\overrightarrow{f\varphi}\right\|}$ et à la partie $T := \{t > 0 \ ; \ [f, f + tu] \subset F\}$.

Si aucun des deux n'est intérieur à F, les deux tombent dans $F \Big\backslash \mathring{F} = \operatorname{Fr} F$, d'où (puisque $\operatorname{Fr} F$ est cpa) un chemin continu les reliant dans $\operatorname{Fr} F$, *a foriori* dans F. Par symétrie des rôles joués par f et φ, nous pouvons donc imposer $f \in \mathring{F}$.

Si T contenait un certain réel $t > \left\|\overrightarrow{f\varphi}\right\|$, on aurait alors l'inclusion $[f, \varphi] \subset [f, f + tu] \subset F$ et les points f et φ seraient reliables dans F par le segment $[f, \varphi]$. On peut donc imposer la *finitude* de $\tau := \sup T$, ce qui permet de l'approcher par une suite croissante $t_n \longrightarrow \tau$. La suite $(f + t_n u)$ prend alors ses valeurs dans F et tend vers $f + \tau u$, d'où (vu que F est fermé) l'appartenance $f + \tau u \in F$: si le point $f + \tau u$ était intérieur à F, pb avec sup, donc dans $\operatorname{Fr} F$, ce qui nous ramène au cas $f \in \operatorname{Fr} F$.