Espaces vectoriels normés 2 : continuité, compacité, connexité

Marc Sage (collab. Michel Wigneron)

29 mai 2017

Table des matières

On évoque pour tout ce cours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E ainsi qu'une norme de E, notée indifféremment $\mathcal{N}$ ou $e \mapsto \|e\|$.

1 Tendances fonctionnelles

Fixons une partie $A \subset E$, un espace vectoriel normé F et une application $f : A \longrightarrow F$.

Avertissement : cette première partie est plutôt théorique, les exemples non triviaux devront attendre.

1.1 Tendances, convergence, limite

Définition – Propriété (tendance, convergence, limite) *Soit $\alpha \in \overline{A}$. Soit $\ell \in F$. On dit que f* ***tend***[1] ***vers*** *ℓ* ***en*** *α si*

$$f \underset{\alpha}{\longrightarrow} \ell \overset{\text{déf.}}{\iff} \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall a \in A,\ \|a - \alpha\| < \delta \Longrightarrow \|f(a) - \ell\| < \varepsilon.$$

FIG

On dit que f ***admet une limite finie*** *(ou* ***converge****)* ***en*** *α s'il y a un point de F vers lequel f tend en α :*

$$f \text{ admet une limite finie en } \alpha \overset{\text{déf.}}{\iff} \exists \ell \in F,\ f \underset{\alpha}{\longrightarrow} \ell.$$

Un tel ℓ est alors unique et est appelé ***la limite***[2] ***de*** *f* ***en*** *α. Cette limite est notée*

$$\lim_{\alpha} f := \text{l'unique } \ell \text{ tel que } f \underset{\alpha}{\longrightarrow} \ell \text{ (si cela fait sens).}$$

Démonstration

Il s'agit d'établir que f ne peut tendre en α vers deux points distincts. Soient donc $\ell \neq \ell'$ dans F tels que $f \underset{\alpha}{\longrightarrow} \ell$ et $f \underset{\alpha}{\longrightarrow} \ell'$. Notons $\varepsilon := \frac{\|\ell' - \ell\|}{2}$, lequel vérifie $\varepsilon > 0$ (car $\ell \neq \ell'$), soient $\delta, \delta' > 0$ comme dans les définitions de $f \underset{\alpha}{\longrightarrow} \ell, \ell'$ resp. et soit $a \in A$ tel que $\|a - \alpha\| < \min\{\delta, \delta'\}$ (permis car[3] $\alpha \in \overline{A}$). On a alors les comparaisons

$\|\ell' - \ell\| \leq \underbrace{\|\ell' - f(a)\|}_{<\varepsilon \text{ car } \|a-\alpha\|<\delta'} + \underbrace{\|f(a) - \ell\|}_{<\varepsilon \text{ car } \|a-\alpha\|<\delta} < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$, contredisant la définition de ε.

[1] On dit aussi que « $f(a)$ ***tend vers*** ℓ ***quand*** a ***tend vers*** α », tendance alors notée $f(a) \underset{a \to \alpha}{\longrightarrow} \ell$. Dans ce cas, la lettre a est partout *muette*.

[2] On parle aussi de « ***la limite de*** $f(a)$ ***quand*** a ***tend vers*** α », limite alors notée $\lim_{a \to \alpha} f(a)$. Dans ce cas, la lettre a est partout *muette*.

[3] C'est là qu'intervient l'hypothèse $\alpha \in \overline{A}$.

Exemple : imposons $\forall a \in A,\ f(a) = 0$ et soit $\alpha \in E$. Soit $\varepsilon > 0$, notons $\delta := 1$ et soit $a \in E$ tel que $\|a - \alpha\| < \delta$. La comparaison $\|f(a) - 0\| < \varepsilon$ se réécrit alors $0 < \varepsilon$, ce qu'on a. Il en résulte la tendance[4] $f \underset{\alpha}{\longrightarrow} 0$. Conclusion :

l'application nulle tend vers 0 *en chaque point source.*

Remarques Soient $\alpha \in \overline{A}$ et $\ell \in F$.

1. *Sanity check* : quand $\binom{E}{F} = \binom{\mathbb{R}}{\mathbb{K}}$, on retrouve la définition de première année en remplaçant les barres de modules par celles de normes.
2. *Sanity check* : quand $f = \mathrm{Id}_E$, la tendance $f(a) \underset{a \longrightarrow \alpha}{\longrightarrow} \alpha$ est valide (imposer $\delta := \varepsilon$ dans la définition ci-dessus) et s'énonce « a tend vers α quand a tend vers α », ce que valide également le français[5].
3. Comme pour les suites, chaque tendance dans F se ramène à une tendance $\underline{\underline{\text{dans } \mathbb{R}}}$ (vers 0) vu les équivalences

$$f \underset{\alpha}{\longrightarrow} \ell \iff f - \ell \underset{\alpha}{\longrightarrow} 0 \iff \|f - \ell\| \underset{\alpha}{\longrightarrow} 0.$$

En particulier, lorsque f est constante partout égale à ℓ, l'application $\|f - \ell\|$ est nulle, donc tend vers 0 en chaque point source, ce qui montre que

chaque application constante tend, en chaque point source, vers sa valeur constante.

4. Comme pour les suites, l'égalité $\lim_\alpha f = \ell$ exprime une relation binaire entre deux objets (d'une part la limite $\lim_a f$, d'autre part le vecteur ℓ) et fait sens ssi chacun de ces objets fait sens, *i. e.* ssi f converge en α, au contraire de la tendance $f \underset{\alpha}{\longrightarrow} \ell$ qui fait toujours sens (et qui n'exprime pas une égalité entre deux vecteurs). Par conséquent :

l'égalité $\lim\limits_{\alpha} f = \ell$ *<u>n'exprime pas la même chose</u> que la tendance* $f \underset{\alpha}{\longrightarrow} \ell$ *!*

Au locuteur donc de savoir si il/elle veut énoncer une *tendance* ou bien une *égalité* avec *convergence* sous-entendue. Bien souvent une tendance seule convient.

5. **Abus linguistique**. Comme pour les suites, on lira souvent (en le point a évoqué) le mélange

« *f converge vers ℓ* » *pour signifier* « *f converge et f tend vers ℓ* ».

Encore une fois, si la convergence n'est pas pertinente (ce qui est très souvent le cas), on écrira alors simplement « f tend vers ℓ » afin de respecter sa pensée.

6. **Tendance suivant une partie**[6]. Lorsque A' dénote une partie de A à laquelle adhère α, on trouve parfois la notation

$$f(a) \underset{\substack{a \to \alpha \\ a \in A'}}{\longrightarrow} \ell \qquad \text{pour signifier } f_{|A'} \underset{\alpha}{\longrightarrow} \ell, \text{ ce qui se lit}$$

« $f(a)$ ***tend vers*** ℓ ***quand*** a ***tend vers*** α ***<u>suivant</u>*** $\underline{\underline{A'}}$ ».

[4] Ni le δ imposé ni l'hypothèse $\|a - \alpha\| < \delta$ n'ont servi. De fait, les implications $\forall a \in A,\ \|a - \alpha\| < \delta \implies \|f(a) - \ell\| < \varepsilon$ sont tautologiques à $\delta, \varepsilon > 0$ fixé.

[5] De la même façon que la tautologie « il faut beau quand il fait beau ».

[6] Lorsque $\binom{E}{A'} = \binom{\mathbb{R}}{]\alpha,\infty[}$, on retrouve la tendance à droite en α (*idem* à gauche).

Les analogues discrets de ces tendances sont les tendances des suites extraites. En particulier, *la tendance suivant* A' *résulte de celle suivant* A (immédiat par définition), la réciproque étant généralement fausse (en le réel 0, l'application "partie entière" tend vers 0 suivant $\mathbb{R}_+^*$ et tend vers -1 suivant $\mathbb{R}_-^*$).

7. **Caractère local de la tendance**. Soit V un voisinage de α dans A tel que $f_{|V} \underset{\alpha}{\longrightarrow} \ell$ et soit $r > 0$ un réel tel que $\mathcal{B}(a, r) \cap A \subset V$ (permis par définition d'un voisinage relatif). Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\Delta > 0$ tel que $\forall v \in V,\ \|v - \alpha\| < \Delta \Longrightarrow \|f(v) - \ell\| < \varepsilon$ (permis par l'hypothèse $f_{|V} \underset{\alpha}{\longrightarrow} \ell$ et l'égalité $f_{|V}(v) = f(v)$). Chaque $a \in A$ tel que $\|a - \alpha\| < \min\{\Delta, r\}$ vérifie alors $\|a - \alpha\| < r$, donc tombe dans $\mathcal{B}(a, r) \cap A \subset V$ et vérifie par ailleurs $\|a - \alpha\| < \Delta$, d'où la majoration $\|f(a) - \ell\| < \varepsilon$. Il en résulte la tendance $f \underset{\alpha}{\longrightarrow} \ell$, ce qui montre avec la remarque précédente les équivalences[7]
$$\left[\exists V \begin{array}{c}\text{voisinage}\\ \text{relatif de } \alpha\end{array},\ f_{|V} \underset{\alpha}{\longrightarrow} \ell\right] \Longleftrightarrow f \underset{\alpha}{\longrightarrow} \ell \Longleftrightarrow \left[\forall V \begin{array}{c}\text{voisinage}\\ \text{relatif de } \alpha\end{array},\ f_{|V} \underset{\alpha}{\longrightarrow} \ell\right]$$
Analogue discret : les tendances séquentielles "ne dépendent pas des premiers termes", elles ont lieu "au voisinage de ∞" au sens où à $a \in A^{\mathbb{N}}$ fixé la tendance $a \longrightarrow \alpha$ équivaut à l'existence $\exists N \in \mathbb{N},\ (a_n)_{n\in[N,\infty[} \longrightarrow \alpha$ (resp. aux tendances $\forall N \in \mathbb{N},\ (a_n)_{n\in[N,\infty[} \longrightarrow \alpha$).

8. **Mnémo (ordre δ-source ε-but)**. Le choix de δ comme symbole muet n'est pas anodin. D'une part, δ fera penser à « **d**ifférence » (suffisamment petite) tout comme ε fera penser à « **e**rreur » (aussi petite que voulue). D'autre part, la comparaison $\|f(a) - \ell\| \leq \varepsilon$ concerne les *images* (donc l'ensemble *but*) et celle $\|a - \alpha\| \leq \delta$ concerne les *arguments* (donc l'ensemble *source*) : en vertu de l'ordre canonique "source $\longrightarrow$ but", nous choisissons pour δ une lettre venant *avant* ε.

   C'est toutefois bien la donnée *préalable* d'un $\varepsilon > 0$ qui nous permettra *alors* d'évoquer un $\delta > 0$: c'est la marge d'erreur *désirée à l'arrivée* qui renseigne la marge d'erreur qu'il suffit d'*imposer au départ*[8] – et non l'inverse !

9. **Tendance en un point source**. Imposons $\alpha \in A$ et f convergeant en α, mettons $f \underset{\alpha}{\longrightarrow} b$ pour un certain $b \in F$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\delta > 0$ comme dans la définition : puisque $\alpha \in A$, on peut remplacer a par α dans l'implication de la définition, ce qui donne $0 < \delta \Longrightarrow \|f(a) - b\| < \varepsilon$, *i. e.* $\|f(a) - b\| < \varepsilon$. Finalement, la norme $\|f(a) - b\|$ est nulle, d'où l'égalité $b = f(a)$. On retiendra donc :

   chaque application convergeant en un point donné
   de sa source tend vers l'image de ce point.

10. **Tendance en un point non adhérant à la source[9] (hors programme)**. Soit[10] $d \notin \overline{A}$. Le réel $\delta := \inf_{a\in A} \|a - d\|$ vérifie alors $\delta > 0$: il y aurait sinon une suite $a \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\|a_n - d\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et d adhérerait à A. Soit $\varepsilon > 0$. À $a \in A$ fixé, la prémisse de l'implication dans la définition de $f \underset{d}{\longrightarrow} \ell$ est alors

[7] On dit que la tendance en α est une notion *locale*.
[8] Bien prendre garde : l'ordre en pratique est donc source $\longleftarrow$ but !
[9] Cette remarque motive la restriction $\alpha \in \overline{A}$ de la définition.
[10] d comme « **d**étaché » (qui "n'adhère pas")

infirmée (par définition de δ), donc l'implication est tautologique, d'où l'énoncé universel $\forall a \in A, ...$ Il en résulte l'énoncé existentiel $\exists \delta > 0, ...$, ce qui montre la tendance $f \underset{d}{\longrightarrow} \ell$. Finalement, f tend vers chaque point de F, tendance d'une part ne présentant aucun intérêt et d'autre part devant choquer notre intuition de première année habituée à l'*unicité de la limite*.

11. **Tendances, boules, ouverts, voisinages (hors programme)**. Dans la définition de la tendance $f \underset{\alpha}{\longrightarrow} \ell$, les comparaisons $\left\{ \begin{array}{c} \|a - \alpha\| < \delta \\ \|f(a) - \ell\| < \varepsilon \end{array} \right.$ se réécrivent $\left\{ \begin{array}{c} a \in \mathring{\mathcal{B}}(\alpha, \delta) \\ f(a) \in \mathring{\mathcal{B}}(\ell, \varepsilon) \end{array} \right.$, ce qui montre que[11]

    chaque tendance finie s'exprime *uniquement en termes de boules ouvertes*.

    Un peu de soin (laissé à la lectrice et au lecteur) permettrait par ailleurs de remplacer le langage des boules ouvertes par celui des voisinages, au sens des équivalences[12]

$$\begin{aligned}
\left(f \underset{\alpha}{\longrightarrow} \ell\right) &\iff \left(\forall \mathcal{C} \begin{array}{c}\text{boule ouverte} \\ \text{centrée en } \ell\end{array}, \exists \mathcal{B} \begin{array}{c}\text{boule ouverte} \\ \text{centrée en } \alpha\end{array}, f(A \cap \mathcal{B}) \subset \mathcal{C}\right) \\
&\iff \left(\forall \Omega \begin{array}{c}\text{ouvert de } F \\ \text{contenant } \ell\end{array}, \exists O \begin{array}{c}\text{ouvert de } A \\ \text{contenant } \alpha\end{array}, f(O) \subset \Omega\right) \\
&\iff \left(\forall W \begin{array}{c}\text{voisinage} \\ \text{de } \ell \text{ dans } F\end{array}, \exists V \begin{array}{c}\text{voisinage} \\ \text{de } \alpha \text{ dans } A\end{array}, f(V) \subset W\right).
\end{aligned}$$

    Chaque tendance peut ainsi s'exprimer *uniquement en termes de voisinages* ou *uniquement en termes d'ouverts.*

1.2 Tendances étendues

Pour étendre les définitions ci-dessus, il suffit de reprendre les neuf tendances $f \overset{\alpha}{\longrightarrow} \lambda$ vues en première année lorsque $F = \mathbb{K}$ et A est un intervalle de $E = \mathbb{R}$ (selon que α et λ soient finis ou infinis), toujours en doublant les barres des modules. Nous rajouterons une dernière ligne, spécifique aux espaces vectoriels normés.

Soient $\alpha \in \overline{A}$ et $\ell \in F$. On souhaite remplir le tableau suivant[13] :

[11] On qualifie de *finies* les tendances $f \underset{\alpha}{\longrightarrow} \ell$ par opposition aux tendance *infinies* que nous allons voir.

[12] Suivant l'usage $\delta \longrightarrow \varepsilon$ (ordre alphabétique suivant celui canonique "source $\longrightarrow$ but"), nous utilisons les lettres $\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$, $O \longrightarrow \Omega$ (français $\longrightarrow$ grec) et $V \longrightarrow W$.

[13] La lettre a est partout *muette*.

source \ but	$f(a)$ tend vers ℓ	(cas $F = \mathbb{R}$) $f(a)$ tend vers ∞	(cas $F = \mathbb{R}$) $f(a)$ tend vers $-\infty$
quand a tend vers α	?	?	?
quand a tend vers ∞ (cas $A \subset \mathbb{R}$ non majorée)	?	?	?
quand a tend vers $-\infty$ (cas $A \subset \mathbb{R}$ non minorée)	?	?	?
quand $\|a\|$ tend vers ∞ (cas A non bornée)	?	?	?

Selon la colonne puis la ligne, la définition cherchée s'obtient grâce aux deux tableaux suivants[14] :

colonne	définition de la forme
$f(a)$ tend vers ℓ	$\forall \varepsilon > 0, \ \cdots \ \|f(a) - \ell\| \leq \varepsilon$
$f(a)$ tend vers ∞	$\forall N > 0, \ \cdots \ f(a) > N$
$f(a)$ tend vers $-\infty$	$\forall N < 0, \ \cdots \ f(a) < N$

(les « $\cdots$ » sont à substituer selon le second tableau)

ligne	à substituer aux « $\cdots$ »
quand a tend vers α	$\exists \delta > 0, \ \forall a \in A, \ \|a - \alpha\| < \delta \Longrightarrow$
quand a tend vers ∞	$\exists M > 0, \ \forall a \in A, \ a \geq M \Longrightarrow$
quand a tend vers $-\infty$	$\exists M < 0, \ \forall a \in A, \ a < M \Longrightarrow$
quand $\|a\|$ tend vers ∞	$\exists M > 0, \ \forall a \in A, \ \|a\| > M \Longrightarrow$

.

On obtient ainsi le tableau suivant où, pour chaque couple (i, j), la définition de la tendance située à la case (i, j) s'obtient en substituant la i-ième case de la dernière colonne aux « $\cdots$ » de la j-ième case de la dernière ligne :

$f(a) \underset{a \to \alpha}{\longrightarrow} \ell$	$f(a) \underset{a \to \alpha}{\longrightarrow} \infty$	$f(a) \underset{a \to \alpha}{\longrightarrow} -\infty$	$\exists \delta > 0, \ \forall a \in A,$ $\|a - \alpha\| < \delta \Longrightarrow$
$f(a) \underset{a \to \infty}{\longrightarrow} \ell$	$f(a) \underset{a \to \infty}{\longrightarrow} \infty$	$f(a) \underset{a \to \infty}{\longrightarrow} -\infty$	$\exists M, \ \forall a \in A,$ $a > M \Longrightarrow$
$f(a) \underset{a \to -\infty}{\longrightarrow} \ell$	$f(a) \underset{a \to -\infty}{\longrightarrow} \infty$	$f(a) \underset{a \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$	$\exists M, \ \forall a \in A,$ $a < M \Longrightarrow$
$f(a) \underset{\|a\| \to \infty}{\longrightarrow} \ell$	$f(a) \underset{\|a\| \to \infty}{\longrightarrow} \infty$	$f(a) \underset{\|a\| \to \infty}{\longrightarrow} -\infty$	$\exists M, \ \forall a \in A,$ $\|a\| > M \Longrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0, \ \cdots$ $\|f(a) - \ell\| < \varepsilon$	$\forall N, \ \cdots \ f(a) > N$	$\forall N, \ \cdots \ f(a) < N$	but \ source

Remarques

• *Sanity check* : retrouver dans la case en haut à gauche la définition de la section 1.1.

• **Ordre M-source N-but**. Pour décrire ce qui se passait dans un voisinage de 0 (à la source comme au but), nous avions utilisé les lettres δ (source) et ε (but) dans l'ordre alphabétique. Suivant la même cohérence, pour décrire ce qui se passe dans un voisinage de $\pm\infty$ (à la source comme au but), nous avons utilisé ici les lettres M (source) et N (but) dans le même ordre alphabétique.

[14] Les quantifications « $\exists M$ » et « $\forall N$ » portent indifféremment sur les entiers ou les réels.

- **Abus usuel**. Dans chacune des définitions ci-dessus,

la quantification « $\forall a \in A$ » est la plupart du temps sous-entendue.

Comme pour les suites, attention donc si l'on souhaite nier une tendance. Par exemple,

$$\text{la négation de } f \underset{\alpha}{\longrightarrow} \ell \text{ s'écrit } \exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \underline{\underline{\underline{\exists a \in A}}},\ \begin{cases} \|a - \ell\| < \delta \\ \|f(a) - \ell\| \geq \varepsilon \end{cases}.$$

On verra à la section 1.3 un critère séquentiel de tendance explicitant la négation ci-dessus de façon pratique.

- **Limites à droite, à gauche (hors programme)**. Dans le cas $A \subset \mathbb{R}$, on pourrait rajouter également deux lignes correspondant aux tendances à droite et à gauche de α, notées, resp. $f \underset{\alpha^+}{\longrightarrow} L$ et $f \underset{\alpha^-}{\longrightarrow} L$.

- **Forme générique d'une tendance**. Chacune des douze tendances ci-dessus est de la forme $f(a) \underset{\theta(a)\to\alpha}{\longrightarrow} L$ où :

1. la lettre θ dénote[15]
   (a) ou bien l'application Id ;
   (b) ou bien l'application "norme" $\mathcal{N}$ (auquel cas $\alpha = \infty$ et A n'est pas bornée).
2. le symbole α dénote[16]
   (a) ou bien un point évoqué dans l'adhérence $\overline{A}$;
   (b) ou bien $-\infty$ (auquel cas $E = \mathbb{R}$ et A n'est pas minorée) ;
   (c) ou bien ∞, auquel cas
      i. ou bien $\theta = \mathrm{Id}$, $E = \mathbb{R}$ et A n'est pas majorée ;
      ii. ou bien $\theta = \mathcal{N}$ et A n'est pas bornée ;
3. le symbole L dénote[17]
   (a) ou bien un point évoqué dans F ;
   (b) ou bien ∞ (auquel cas $F = \mathbb{R}$) ;
   (c) ou bien $-\infty$ (auquel cas $F = \mathbb{R}$).

- **Tendances & voisinages (hors programme)**. Regardons les trois entrées de la dernière ligne du tableau ci-dessus. Chaque énoncé de la forme « $\forall \varepsilon > 0, \cdots \|f(a) - \ell\| < \varepsilon$ » se réécrit sous la forme « $\forall \underset{\substack{\text{boule ouverte} \\ \text{centrée en } \ell}}{\mathcal{B}}, \cdots f(a) \in \mathcal{B}$ », forme équivalente à « $\forall \underset{\substack{\text{voisinage} \\ \text{de } \ell \text{ dans } F}}{W}, \cdots f(a) \in W$ ». De même, chaque énoncé de la forme « $\forall N, \cdots f(a) > N$ » se réécrit sous la forme[18] « $\forall \underset{\substack{\text{voisinage} \\ \text{de } \infty \text{ dans } \mathbb{R}}}{W}, \cdots f(a) \in$

[15] θ doit faire penser à *argument* (comme celui du complexe $e^{i\theta}$) car s'applique à l'*argument* de l'expression $f(a)$ dans la tendance $f(a) \underset{\theta(a)\to\alpha}{\longrightarrow} L$.
[16] α est le point *en* lequel on regarde la tendance.
[17] L est à penser comme la limite en α.
[18] *Rappel* : un voisinage de ∞ dans $\mathbb{R}$ est une partie incluant un intervalle de la forme $[a, \infty[$.

W » (*idem* pour les tendances vers et les voisinages de $-\infty$). En transformant de même les quatre entrées de la dernière colonne du tableau ci-dessus, ce dernier peut alors se résumer sous la forme

$f(a) \underset{\theta(a)\longrightarrow\alpha}{\longrightarrow} L$	$\exists V \subset E$ voisinage de α, $\forall a \in A,\ \theta(a) \in V \Longrightarrow$
$\forall W \subset F$ voisinage de L, $\cdots$ $f(a) \in W$	but \ source

,

résumé permettant d'unifier grâce aux voisinages les douze tendances ci-dessus en l'*unique* équivalence

$$\left(f(a) \underset{\theta(a)\longrightarrow\alpha}{\longrightarrow} L\right) \Longleftrightarrow \left(\forall W \underset{\text{de } L \text{ dans } F}{\text{voisinage}}, \exists V \underset{\text{de } \alpha \text{ dans } A}{\text{voisinage}},\ \theta^{-1}(V) \subset f^{-1}(W)\right).$$

Sanity check : lorsque $\binom{f}{L} = \binom{\theta}{\alpha}$, la tendance à gauche s'énonce « $\theta(a)$ tend vers L quand $\theta(a)$ tend vers L », ce que valide le français. La lectrice et le lecteur pourront vérifier que cette tendance est bien valide formellement[19].

Exemple : soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant dont on note d le degré et C le coefficient dominant. On a alors l'équivalence $P(a) \underset{|a|\to\infty}{\sim} Ca^d$, d'où (puisque $C \neq 0$ et $d > 0$) la tendance $|P(a)| \underset{|a|\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \infty$.

1.3 Propriétés

Cette section reprend et étend aux espaces vectoriels normés les propriétés des tendances vues en première année : elle serait pénible à rédiger exhaustivement. Le parti est par conséquent pris d'utiliser la forme générale[20] $f(a) \underset{\theta(a)\longrightarrow\alpha}{\longrightarrow} L$ des douze tendances au programme – ce afin d'unifier les énoncés – ainsi que sa traduction (hors programme) en termes de voisinages – ce afin d'unifier les démonstrations.

On évoque désormais α, L et θ comme ci-dessus.

Propriétés (opérations usuelles sur les tendances)

Soient $\begin{matrix} g : A \longrightarrow F \\ \lambda : A \longrightarrow \mathbb{K} \end{matrix}$ *et*[21] $\begin{matrix} M \in F \amalg \{-\infty, \infty\} \\ \Lambda \in \mathbb{K} \amalg \{-\infty, \infty\} \end{matrix}$ *tels que* $\begin{cases} f(a) \underset{\theta(a)\to\alpha}{\longrightarrow} L \\ g(a) \underset{\theta(a)\to\alpha}{\longrightarrow} M \\ \lambda(a) \underset{\theta(a)\to\alpha}{\longrightarrow} \Lambda \end{cases}$ *. Alors :*

1.

[19] Quand $f = \theta$ (qui est surjective), l'inclusion à droite se réécrit $V \subset W$ et le membre de droite de l'équivalence ci-dessus se reformule en « chaque voisinage de L dans F inclut un voisinage de α dans A », *i. e.* (distinguer les cas) en l'égalité $\alpha = L$.

[20] *Cf.* deux dernières remarques

[21] La non-finitude de M restreindrait (A, F) comme le ferait celle de L.

(a) **(norme[22])** *on a la tendance* $\|f(a)\| \underset{\theta(a)\to\alpha}{\longrightarrow} \|L\|$ *;*

(b) **(somme)** *si* $\{L, M\} \neq \{-\infty, \infty\}$, *on a la tendance* $f(a) + g(a) \underset{\theta(a)\to\alpha}{\longrightarrow} L + M$ *:*

(c) **(homothété)** *si* Λ *et* L *sont finis*[23], *on a la tendance* $\lambda(a) \cdot f(a) \underset{\theta(a)\to\alpha}{\longrightarrow} \Lambda \cdot L$.

2. *Si l'espace vectoriel but* F *est en outre une algèbre à multiplication continue, alors :*

(a) **(produit)** *si* $\{\|L\|, \|M\|\} \neq \{0, \infty\}$, *on a la tendance* $f(a)\, g(a) \underset{\theta(a)\to\alpha}{\longrightarrow} LM$ *;*

(b) **(inverse[24])** *si* $L \in \operatorname{Int} F^{\times}$, *on a la tendance* $\frac{1}{f(a)} \underset{\theta(a)\to\alpha}{\longrightarrow} \frac{1}{L}$ *;*

(c) **(quotient)** *si* $M \in \operatorname{Int} F^{\times}$, *on a la tendance* $\frac{f(a)}{g(a)} \underset{\theta(a)\to\alpha}{\longrightarrow} \frac{L}{M}$.

Démonstration : reprendre (si $\theta = \mathrm{Id}$) celles de première année (les points 1c et 2a sont alors confondus) en doublant les barres, puis adapter ces reprises au cas $\theta = \mathcal{N}$.

Remarque – **Inversibles dans une algèbre de dimension finie**. Lorsque l'espace vectoriel normé F est une algèbre de dimension finie, d'une part sa multiplication est continue, d'autre part on pourrait montrer (hors programme) que ses inversibles forment une partie $F^{\times}$ ouverte[25]. Par conséquent,

dans ce cas, si le vecteur $\lim_a f$ *fait sens et est inversible, alors*[26] *l'application* $\frac{1}{f}$ *fait sens au voisinage de* a *et tend en* a *vers* $\frac{1}{\lim_a f}$.

Propriété (composition des tendances)

Soit g *une application à valeurs dans un espace vectoriel normé telle que* $g \circ f$ *fait sens et soit*[27] $\blacksquare$ *un point de* $F \amalg \{-\infty, \infty\}$. *On a alors l'implication*

$$\left\{ \begin{array}{c} f(a) \underset{\theta(a)\to\alpha}{\longrightarrow} \blacksquare \\ g \underset{\blacksquare}{\longrightarrow} L \end{array} \right. \Longrightarrow g(f(a)) \underset{\theta(a)\to\alpha}{\longrightarrow} L.$$

Démonstration

[22] même si $L = \pm\infty$, auquel cas $\|L\| = |\pm\infty| = \infty$

[23] Cette tendance reste valide si $|\Lambda| = \infty = \|L\|$ mais ce cas (où l'on a alors $\mathbb{K} = \mathbb{R} = F$) est traité par le point 2a.

[24] *Rappel* : pour chaque anneau R (*ring*), on note $R^{\times}$ la partie formée par les éléments inversibles de R.

[25] L'hypothèse « de dimension finie » est en général nécessaire : lorsque $F = \mathbb{K}[X]$ (vu comme espace de suites et muni de la norme uniforme), le polynôme 1 est inversible mais est limite de la suite $\left(1 + \frac{X}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont aucun terme n'est inversible.

[26] *Sanity check* : lorsque $F = \mathbb{R}$, on retrouve un résultat de première année.

[27] Encore une fois, la non-finitude de $\blacksquare$ restreindrait les hypothèses sur F ainsi que sur $\operatorname{Dom} g$.

Supposons $\begin{cases} f(a) \underset{\theta(a)\to\alpha}{\longrightarrow} \blacksquare \\ g \underset{\blacksquare}{\longrightarrow} L \end{cases}$. Soit W un voisinage de L dans $\operatorname{Im} g$, soit $\mathcal{V}$ un voisinage de $\blacksquare$ dans $\operatorname{Dom} g$ tel que $g(\mathcal{V}) \subset W$ (permis car $g \underset{\blacksquare}{\longrightarrow} L$), soit V voisinage de α dans A tel que $f\left(\theta^{-1}(V)\right) \subset \mathcal{V}$ (permis car[28] $f(a) \underset{\theta(a)\to\alpha}{\longrightarrow} \blacksquare$). On a alors les inclusions

$$[g \circ f]\left(\theta^{-1}(V)\right) = g\left(\ f\left(\theta^{-1}(V)\right)\ \right) \subset g(\mathcal{V}) \subset W, \text{ ce qui conclut.}$$

Mnémonique : dans $g(f(a))$, mettre $f(a)$ dans une "boîte noire[29]" en l'encadrant $\boxed{f(a)}$, ce qui donne $g(\blacksquare)$.

Exemples

1. Vu les tendances $\frac{1}{t} \underset{t\to\boxed{\infty}}{\longrightarrow} 0$ et $\|a\| \underset{\|a\|\to\infty}{\longrightarrow} \boxed{\infty}$, on a la tendance $\frac{1}{\|a\|} \underset{\|a\|\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Vu les tendances $\cos \underset{\boxed{0}}{\longrightarrow} 1$ et $\frac{1}{\|a\|^2+1} \underset{\|a\|\to\infty}{\longrightarrow} \boxed{0}$, on a la tendance $\cos \frac{1}{\|a\|^2+1} \underset{\|a\|\to\infty}{\longrightarrow} 1$

Proposition (critère séquentiel de tendance)

On a l'équivalence

$$\left(f(a) \underset{\theta(a)\to\alpha}{\longrightarrow} L\right) \iff \left(\forall a \in A^{\mathbb{N}},\ \left[\theta(a_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha \Longrightarrow f(a_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L\right]\right).$$

Démonstration

Les neuf cas où $\theta = \mathrm{Id}$ sont réglés en reprenant les démonstrations de première année et en doublant les barres. On peut donc imposer les égalités $\binom{\alpha}{\theta} = \binom{\infty}{\mathcal{N}}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons par contraposée que $f(a)$ ne tend pas vers L quand $\|a\|$ tend vers ∞, ce qui s'écrit

$$\exists W \begin{array}{c}\text{voisinage} \\ \text{de } L \text{ dans } F\end{array},\ \forall M \in \mathbb{N},\ \exists a \in A,\ \begin{cases} \|a\| > M \\ f(a) \notin W \end{cases}.$$

Soit un tel voisinage W. L'axiome du choix nous donne alors une suite $a \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall M \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} \|a_M\| > M \\ f(a_M) \notin W \end{cases}$, ce qui permet d'une part d'affirmer la tendance $\|a_M\| \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, d'autre part de nier celle $f(a_M) \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} L$, d'où la conclusion.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $a \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\theta(a_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$, soit W un voisinage de L dans F, soit V un voisinage de α dans A tel que $f\left(\theta^{-1}(V)\right) \subset W$ (permis par l'hypothèse $f(a) \underset{\theta(a)\to\infty}{\longrightarrow} L$), soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in]N, \infty|[,\ \theta(a_n) \in V$ (légitimé

[28] Cette tendance permettrait, avec l'inclusion $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Dom} g$, de vérifier que le point $\blacksquare$ adhère bien au domaine de définition de g, ce qui est requis par le programme pour donner sens à l'hypothèse $g \underset{\blacksquare}{\longrightarrow} L$.

[29] La boîte est dite *noire* car l'on ne veut pas savoir ce qu'il y a *dedans* : seul importe que son contenu soit *le même* pour chaque boîte.

par la tendance $\theta(a_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$ et soit $n \in]N,\infty|[$: on a alors $a_n \in \theta^{-1}(V)$, d'où $f(a_n) \in f\left(\theta^{-1}(V)\right) \subset W$. Nous venons de montrer[30]

$$\forall W \begin{array}{c}\text{voisinage}\\ \text{de } L \text{ dans } F\end{array}, \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in]N,\infty|[,\ f(a_n) \in W,\ i.\ e.\ f(a_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L,\ c.\ q.\ f.\ d.$$

Remarque – Vu d'une part le critère ci-dessus lorsque $\theta = \mathrm{Id}$, d'autre part le caractère invariant de la "relation" de tendance séquentielle par passage à une norme équivalente, pour chaque $\alpha \in \overline{A}$,

la "relation" de tendance en α est inchangée par passage à une norme équivalente (dans l'espace vectoriel normé source comme dans l'espace vectoriel normé but)

Corollaire (tendances finies "produit")

Soit $\begin{pmatrix} E_i & A_i & \alpha_i \\ F_i & f_i & \ell_i \end{pmatrix}$ une famille[31] $\underline{\underline{\text{finie}}}$ telle que, pour chaque i, E_i et F_i sont des espaces vectoriels normés, A_i est une partie de E_i et[32] $\left\{ \begin{array}{c} (\alpha_i, \ell_i) \in \overline{A_i} \times F_i \\ f_i : A_i \longrightarrow F_i \end{array} \right.$. Alors

1. *la famille (α_i) définit un point source adhérant à la partie $\prod A_i$,*
2. *la famille (f_i) définit une application $\prod A_i \longrightarrow \prod F_i$,*
3. *la famille (ℓ_i) définit un point but dans $\prod F_i$ et*

$$\textit{l'on a l'équivalence} \qquad (f_i) \underset{(\alpha_i)}{\longrightarrow} (\ell_i) \Longleftrightarrow \forall i,\ f_i \underset{\alpha_i}{\longrightarrow} \ell_i.$$

Démonstration

L'idée est la suivante : d'après la proposition précédente, chaque tendance fonctionnelle se ramène à des tendances séquentielles et, d'après une proposition chapEvn1 ? ? ?, chaque tendance séquentielle dans chaque produit cartésien fini équivaut à chaque tendance "coordonnée" associée, ce qui permet de conclure.

Formellement, traitons afin d'alléger les écritures le cas où l'ensemble indexant est $\{1,2\}$ et où l'on aura renommé[33] $\begin{pmatrix} f & A & \alpha & L \\ g & B & \beta & M \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f_1 & A_1 & \alpha_1 & \ell_1 \\ f_2 & A_2 & \alpha_2 & \ell_2 \end{pmatrix}$. On déroule alors les équivalences[34]

[30] Cette preuve du sens $\boxed{\Longrightarrow}$ est en fait valide pour chaque $\binom{\alpha}{\theta}$ – pas seulement $\binom{\infty}{\mathcal{N}}$.

[31] L'ensemble indexant est sous-entendu afin d'alléger les écritures : la lettre i est ainsi partout *muette*.

[32] Ici, les limites ℓ_i restent *finies*.

[33] Signalons l'abus consistant à *définir* $A := A_1$ (la lettre A a déjà été évoquée en début de section !). Il aurait fallu, en toute rigueur, *imposer* $A = A_1$.

[34] *Sanity check* : le point (α,β) adhère bien à $A\times B$ vu l'appartenance $(\alpha,\beta) \in \overline{A}\times\overline{B}$ et l'égalité $\overline{A}\times\overline{B} = \overline{A\times B}$ (*cf.* exemple **??** section **??** chapitre evn1 ? ? ?).

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \underset{(\alpha,\beta)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} L \\ M \end{pmatrix} \\
\underset{\text{de tendance}}{\overset{\text{critère séquentiel}}{\iff}} \quad & \forall c \in (A \times B)^{\mathbb{N}}, \ \left[c_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\alpha, \beta) \Longrightarrow \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} (c_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} L \\ M \end{pmatrix} \right] \\
\underset{c=:(a,b)}{\overset{\text{reparamétrage}}{\iff}} \quad & \begin{matrix} \forall a \in A^{\mathbb{N}} \\ \forall b \in B^{\mathbb{N}} \end{matrix}, \ \left[\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} f(a_n) \\ g(b_n) \end{pmatrix} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} L \\ M \end{pmatrix} \right] \\
\underset{\text{"coordonnées"}}{\overset{\text{tendances séquentielles}}{\iff}} \quad & \begin{matrix} \forall a \in A^{\mathbb{N}} \\ \forall b \in B^{\mathbb{N}} \end{matrix}, \ \left\{ \begin{matrix} a \longrightarrow \alpha \\ b \longrightarrow \beta \end{matrix} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{matrix} f(a_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L \\ g(b_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} M \end{matrix} \right. \\
\overset{?}{\iff} \quad & \left\{ \begin{array}{l} \forall a \in A^{\mathbb{N}}, \ a \longrightarrow \alpha \Longrightarrow f(a_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L \\ \forall b \in B^{\mathbb{N}}, \ b \longrightarrow \beta \Longrightarrow g(b_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} M \end{array} \right. \\
\underset{\text{de tendance}}{\overset{\text{critère séquentiel}}{\iff}} \quad & \left\{ \begin{array}{l} f \underset{\alpha}{\longrightarrow} L \\ g \underset{\beta}{\longrightarrow} M \end{array} \right. , \qquad \begin{array}{c} \text{ce qui conclut, à condition de} \\ \text{justifier l'équivalence } \overset{?}{\iff}. \end{array}
\end{aligned}$$

Le sens $\Longleftarrow$ étant tautologique, montrons celui $\Longrightarrow$. Soit $a \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $a \longrightarrow \alpha$. Puisque $\beta \in \overline{B}$, on peut évoquer une suite $b \in B^{\mathbb{N}}$ tendant vers β. La suite $\binom{a}{b}$ tend alors vers $\binom{\alpha}{\beta}$, d'où par hypothèse les tendances $\left\{ \begin{matrix} f(a_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L \\ g(b_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} M \end{matrix} \right.$: la première suffit à notre bonheur. (Raisonnement analogue pour établir $\forall b \in B^{\mathbb{N}}, \ b \longrightarrow \beta \Longrightarrow g(b_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} M$.)

Exemple : imposons $A = E = \mathbb{C}[X]$ muni de la norme uniforme sur $[1, 7]$. Cette norme étant sous-multiplicative, la multiplication de A est continue et l'on a la tendance $P^2 \underset{P\to X+1}{\longrightarrow} (X+1)^2$ d'après les propriétés algébriques des tendances. Par ailleurs, dans l'espace vectoriel $C([1,7], \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme, on a la tendance $f(e) \underset{f\to\ln}{\longrightarrow} \ln e = 1$ (majorer $|f(e) - \ln e| \leq \|f - \ln\|$). Il en résulte les tendances $\binom{P^2}{f(e)} \underset{\binom{P}{f}\to\binom{X+1}{\ln}}{\longrightarrow} \binom{(X+1)^2}{1}$.

Proposition (tendances finies "coordonnées")

Imposons l'espace vectoriel normé but F de dimension finie, soient $B \subset F$ une partie basique et[35] $\ell \in F$. Pour chaque vecteur de base $\beta \in B$, notons π^β la projection sur la droite $\mathbb{K}\beta$ parallèlement à $\bigoplus_{b\neq\beta}^{b\in B} \mathbb{K}b$ et signalons par un exposant β la composition à gauche par π^β, de sorte à abréger $\left\{ \begin{array}{l} f^\beta = \pi^\beta \circ f \\ \ell^\beta = \pi^\beta(\ell) \end{array} \right.$. On a alors l'équivalence

$$\left(f(a) \underset{\theta(a)\to\alpha}{\longrightarrow} \ell \right) \iff \left(\forall \beta \in B, \ f^\beta(a) \underset{\theta(a)\to\alpha}{\longrightarrow} \ell^\beta \right).$$

En particulier, l'application f converge en a ssi l'application "coordonnée" f^β converge en a pour chaque $\beta \in B$.

[35] Ici, la limite ℓ reste *finie*.

Démonstration

$\boxed{\Longleftarrow}$ L'hypothèse se réécrit $\pi^{\beta}(f(a)) \underset{\theta(a)\to\alpha}{\longrightarrow} \pi^{\beta}(\ell)$ pour chaque $\beta \in B$. Puisque $\sum_{\beta\in B}\pi^{\beta} = \mathrm{Id}_F$, ajouter ces tendances $\pi^{\beta}(f(a)) \underset{\theta(a)\to\alpha}{\longrightarrow} \pi^{\beta}(\ell)$ livre la tendance $f(a) \underset{\theta(a)\to\alpha}{\longrightarrow} \ell$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ La preuve la plus directe à notre connaissance utilise (sans cercle vicieux !) des notions que nous allons voir dans les prochaines sections. Soit $\beta \in B$: le projecteur π^{β} étant continu en tant qu'endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie (*cf.* exemple 6 section 2.1), on peut "composer" l'hypothèse $f(a) \underset{\theta(a)\to\alpha}{\longrightarrow} \ell$ à gauche par π^{β}, d'où la tendance désirée $\pi^{\beta}(f(a)) \underset{\theta(a)\to\alpha}{\longrightarrow} \pi^{\beta}(\ell)$.

Exemple : quand $F = M_2(\mathbb{R})$, on a la tendance $\begin{pmatrix} \operatorname{th}\|a\| & \frac{1}{\|a\|^2+1} \\ \operatorname{ch}\frac{1}{\|a\|^2+1} & \operatorname{sh}\frac{1}{\|a\|} \end{pmatrix} \underset{\|a\|\to\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vu chacune des tendances (obtenues par composition lorsque $\|a\| \to \infty$)

$$\begin{cases} \operatorname{th}\|a\| \longrightarrow \lim_{\infty}\operatorname{th} = 1 \\ \operatorname{ch}\frac{1}{\|a\|^2+1} \longrightarrow \lim_0 \operatorname{ch} = 1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \frac{1}{\|a\|^2+1} \longrightarrow \lim\limits_{c\to\infty}\frac{1}{c+1} = 0 \\ \operatorname{sh}\frac{1}{\|a\|} \longrightarrow \lim_0 \operatorname{sh} = 0 \end{cases}.$$

Faute à ce stade d'applications intéressantes, nous proposons un seul exercice d'application, éclairant – une fois n'est pas coutume – d'un regard *algébrique* les notions d'analyse sus-développées.

Exercice d'application

Par commodité, on désévoque la lettre f pour cet exercice.

Pour chaque $f : E \longrightarrow F$ et pour chaque partie $P \subset E$, on notera f^P l'application coïncidant avec f sur P et nulle ailleurs.

Soit $a \in E$. Appelons d'une part $\mathcal{V}$ l'ensemble des voisinages de a (dans E), d'autre part $\mathcal{A}$ la partie de $\mathbb{K}^E$ formée des applications convergeant en a.

a. *Pour chaque $f : E \longrightarrow F$, montrer l'équivalence*

$$\begin{matrix} \forall \ell \in F \\ \forall V \in \mathcal{V} \end{matrix},\ f \underset{a}{\longrightarrow} \ell \Longleftrightarrow f^V \underset{a}{\longrightarrow} \ell.$$

b. *Montrer que l'application* $\lim_a$ *est un morphisme d'algèbres $\mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{K}$ tel que*

$$\begin{matrix} \forall f \in \mathcal{A} \\ \forall V \in \mathcal{V} \end{matrix},\ \varphi(f) = \varphi\left(f^V\right).$$

c. *Soit $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{K}$ un morphisme d'algèbres vérifiant les égalités de la question* (b)*.*

   i. *Montrer l'inclusion* $\operatorname{Ker}\varphi \subset \operatorname{Ker}\lim_a$*. On pourra raisonner par contraposée.*

ii. *En déduire l'égalité* $\varphi = \lim_a$.

---

a. Soit un tel f et soit $(\ell, V) \in F \times \mathcal{V}$: puisque f et f^V coïncident alors sur V, on a l'égalité $f_{|V} = \left[f^V\right]_{|V}$, d'où les équivalences

$$f \underset{a}{\longrightarrow} \ell \underset{\text{la tendance en } a}{\overset{\text{caractère local de}}{\Longleftrightarrow}} f_{|V} \underset{a}{\longrightarrow} \ell \Longleftrightarrow \left[f^V\right]_{|V} \underset{a}{\longrightarrow} \ell \underset{\text{la tendance en } a}{\overset{\text{caractère local de}}{\Longleftrightarrow}} f^V \underset{a}{\longrightarrow} \ell.$$

Remarque – Cette question traduit le caractère local de la tendance en a vu en cours d'une façon permettant de formuler cet exercice sans parler de quotients (*cf.* remarque en fin d'exercice).

b. Le fait que $\mathcal{A}$ soit une algèbre et $\lim_a$ un morphisme d'algèbres résulte d'une part de la tendance de l'application constante[36] $1_{\mathcal{A}} \underset{a}{\longrightarrow} 1_{\mathbb{K}}$, d'autre part des opérations usuelles sur les tendances (somme, homothété et produit).

La question (a) montre par ailleurs pour chaque $(f, V) \in \mathcal{A} \times \mathcal{V}$ l'égalité $\lim_a f = \lim_a f^V$.

c.

i. Soit $f \in \mathcal{A}$ tel que $\lim_a f \neq 0$. On peut alors évoquer un $V \in \mathcal{V}$ sur lequel la restriction de f ne s'annule pas, ce qui donne sens à l'application $g := \begin{cases} \frac{1}{f} \text{ sur } V \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$. On a alors les égalités

$$fg = \begin{cases} f\frac{1}{f} \text{ sur } V \\ f0 \text{ ailleurs} \end{cases} = \begin{cases} 1 \text{ sur } V \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases} = 1^V,$$

d'où celles

$$1 \underset{\text{l'unité}}{\overset{\varphi \text{ préserve}}{=}} \varphi(1) \underset{\text{sur } \varphi}{\overset{\text{hypothèse}}{=}} \varphi\left(1^V\right) = \varphi(fg) \underset{\text{multiplicatif}}{\overset{\varphi \text{ est}}{=}} \varphi(f)\varphi(g),$$

ce qui empêche la nullité de $\varphi(f)$, *c. q. f. d.*

ii. Soit $f \in F$ et notons $\lambda := \varphi(f)$. On a alors les égalités

$$\varphi(\lambda - f) = \varphi(\lambda 1_{\mathcal{A}} - f) \underset{\text{linéaire}}{\overset{\varphi \text{ est}}{=}} \lambda\varphi(1_{\mathcal{A}}) - \varphi(f) \underset{\text{de } \lambda}{\overset{\text{définition}}{=}} \lambda 1 - \lambda = 0,$$

d'où (avec la question précédente) l'égalité $\lim_a(\lambda - f) = 0$, *i. e.* $\lambda - \lim_a f = 0$, et la conclusion[37] $\varphi(f) = \lambda = \lim_a f$.

Remarques – Cet exercice montre que $\lim_a$ est l'unique morphisme d'algèbres

$$\{f : E \longrightarrow \mathbb{K} \; ; \; f \text{ converge en } a\} \longrightarrow \mathbb{K}$$

ne "voyant" pas ce qui se passe "loin de a", au sens des égalités[38] $\varphi(f) = \varphi\left(f^V\right)$ de la question (b).

---

[36] Ne pas oublier le neutre multiplicatif !

[37] La lectrice et le lecteur avertis auront décelé en filigrane le classique suivant : *deux formes linéaires non nulles* (ici φ et $\lim_a$) *sont colinéaires ssi leurs noyaux sont égaux.*

[38] Observer que seules nous ont servi les égalités $\varphi(1) = \varphi\left(1^V\right)$.

Cependant, un esprit *purement algébrique* désirant caractériser la limite en a cherchera à traduire *algébriquement* ces dernières égalités. Cela peut se faire en quotientant la partie de $\coprod_{P\subset E} \mathbb{K}^P$ formée des applications convergeant en a par la relation « coïncider sur l'intersection des sources ». On obtiendrait ainsi une algèbre[39] (notons-la $\mathcal{G}$) et l'on montrerait alors l'existence d'un unique morphisme d'algèbres $\mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{K}$ (défini par $\overline{f} \mapsto \lim_a f$) : la caractérisation cherchée.

Cet exercice possède un analogue discret affirmant que l'application lim définie sur l'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}_{\text{cv}}$ des suites scalaires convergentes est l'unique morphisme d'algèbres $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}_{\text{cv}} \longrightarrow \mathbb{K}$ invariant par extraction. La lectrice et le lecteur à l'esprit algébrique pourront chercher une traduction de cet énoncé en termes purement algébriques.

2 Continuité

On garde évoqués les espaces vectoriels normés E et F, la partie $A \subset E$ et l'application $f : A \longrightarrow F$.

La norme de E évoquée est toujours notée $\mathcal{N}$ ou avec des doubles-barres, lesquelles pourront également – selon le contexte – dénoter la norme de F.

2.1 Définitions & propriétés usuelles

Définition (continuité ponctuelle, continuité globale)

Soit $a \in A$. L'application f est dite ***continue en*** *a si l'une des conditions suivantes équivalentes*[40] *est vérifiée :*

1. *on a la tendance* $f \underset{a}{\longrightarrow} f(a)$ *;*
2. *l'application f converge en a ;*
3. *le vecteur $\lim_a f$ fait sens et est fini ;*
4. *on a les implications* $\forall \overrightarrow{a} \in A^{\mathbb{N}},\ a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \Longrightarrow f(a_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a)$ *;*
5. *il y a un voisinage V de a dans A tel que* $f_{|V} \underset{a}{\longrightarrow} f(a)$ *;*
6. *pour chaque voisinage V de a dans A, on a la tendance* $f_{|V} \underset{a}{\longrightarrow} f(a)$.

Soit[41] *D une partie de la source de f. On qualifie f de* ***continue sur*** *D si elle est continue en chaque point de D. L'ensemble des applications continues $D \longrightarrow F$ est noté $C(D,F)$ ou $C^0(D,F)$.*

L'application f est dite ***continue*** *(tout court) si elle est continue sur sa source.*

Remarques Soit $a \in A$.

[39] *Culture hors programme* : cette algèbre ($\mathcal{G}$ comme « **g**ermes », le nom de ses éléments) est appelée la ***limite inductive*** des algèbres $\{f : V \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ f \text{ converge en } a\}$ lorsque V décrit les voisinages de a. (L'algèbre $\mathbb{K}[X]$ est de même la limite inductive de celles $\mathbb{K}_n[X]$ lorsque n parcourt $\mathbb{N}$.)

[40] Les points 1, 2 et 3 sont équivalents par définition, le point 4 leur équivaut d'après le critère séquentiel de tendance et les points 5 et 6 leur équivalent d'après le caractère local de la tendance.

[41] D comme « sous-**d**omaine »

• **Caractère ponctuel de la continuité**. La définition ci-dessus montre que la continuité (tout court) est une notion *ponctuelle*, au sens où elle équivaut à une conjonction de continuités ponctuelles :

$$\forall D \subset A,\ [f \text{ continue sur } D \iff \forall d \in D,\ f \text{ continue en } d].$$

• **Caractère local de la continuité ponctuelle**. En remplaçant $f(a)$ par $f_{|V}(a)$ dans les points 5 et 6, on obtient les équivalences

$$\left[\exists V \begin{array}{c}\text{voisinage}\\ \text{relatif de } a\end{array},\ f_{|V} \text{ continue en } a\right] \iff f \text{ continue en } a$$
$$\iff \left[\forall V \begin{array}{c}\text{voisinage}\\ \text{relatif de } a\end{array},\ f_{|V} \text{ continue en } a\right].$$

Par conséquent, et comme pour la tendance en a, la continuité en a ne voit pas ce qui se passe "loin de a" : on dit que c'est une notion *locale*.

• **Invariance de la continuité par équivalence de normes**. La continuité en a se définissant par une tendance (fonctionnelle) en un point de $\overline{A}$, elle est invariante par passage à une norme équivalente (dans l'espace vectoriel normé source comme dans l'espace vectoriel normé but). En particulier,

la continuité est inchangée par passage à une norme équivalente
(dans l'espace vectoriel normé source comme dans l'espace vectoriel normé but).

• **Caractère localement borné des applications continues**. Imposons f continue en a, notons $\ell := f(a)$ et soit $\delta > 0$ tel que[42] $\forall b \in A,\ \|b-a\| < \delta \implies \|f(b)-\ell\| < 1$. On a alors pour chaque $b \in \mathring{\mathcal{B}}(a,\delta) \cap A$ les majorations $\|f(b)\| \leq \|f(b)-\ell\| + \|\ell\| \leq 1 + \|\ell\|$, ce qui montre que f est bornée sur le voisinage $\mathring{\mathcal{B}}(a,\delta) \cap A$ relatif de a. Par conséquent :

chaque application continue est bornée au voisinage de chaque point source.

Exemples

1. Imposons f constante. Elle tend alors en chaque point de sa source vers sa valeur constante, d'où pour chaque $a \in A$ la tendance $f \underset{a}{\longrightarrow} f(a)$. Il en résulte que

   chaque application constante est continue.

2. Les propriétés usuelles sur les tendances montrent les continuités de :

   (a) la norme $E \longrightarrow \mathbb{R}$,

   (b) l'addition $E^2 \longrightarrow E$,

   (c) la multiplication scalaire $\mathbb{K} \times E \longrightarrow E$,

   (pour les points suivants, on impose en outre que E soit une algèbre *à multiplication continue*)

   (d) la multiplication $E^2 \longrightarrow E$,

[42] Le majorant 1 ne joue aucun autre rôle que celui d'être un réel strictement positif.

(e) l'inversion $E^{\times} \longrightarrow E^{\times}$ et

(f) la division $E \times E^{\times} \longrightarrow E$.

3. La tendance $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ montre que l'application rg n'est pas continue en la matrice nulle (le critère séquentiel impliquerait sinon la tendance $1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$).
4. Imposons que E soit un produit *fini* d'espaces vectoriels normés. Chaque tendance dans E impliquant alors les tendances coordonnées correspondantes,

   la projection de chaque produit fini sur chacun de ses facteurs est continue.

5. Imposons A fini, notons ε le minimum de l'ensemble $\{d(a,b)\}_{a\neq b}^{a,b\in A} \cup \{1\}$ (lequel fait alors sens et vérifie $\varepsilon > 0$), soient $a \in A^{\mathbb{N}}$ et $\alpha \in A$ tels que $a \longrightarrow \alpha$ et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in [N, \infty|[,\ d(a_n, \alpha) < \varepsilon$. La définition de ε impose alors le caractère stationnaire de la suite a (à partir du rang N), d'où celui de la suite $n \mapsto f(a_n)$, laquelle converge donc vers $f(a_N) = f(\alpha)$. Il en résulte[43]

   la continuité de chaque application de source finie.

   Plus généralement, l'application f sera continue dès que, pour chaque $\alpha \in A$, le point α n'adhère pas à[44] $A \setminus \{\alpha\}$ (remplacer alors le ε ci-dessus par $\inf_{a\in A\setminus\{\alpha\}} d(\alpha, a)$).
6. Nous verrons à la section 3.3 que

   $$\boxed{\begin{array}{c}\textit{si } E \textit{ est de dimension finie, alors} \\ \textit{chaque application linéaire de source } E \textit{ est continue.}\end{array}}$$

   L'hypothèse est bien nécessaire : si l'on norme $\mathbb{K}[X]$ par $P \mapsto \max_{[0,1]} |P|$, la suite $\left(\frac{X^n}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend alors vers le polynôme nul (sa "norme" $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0) mais la suite "dérivée" $\left(\sqrt{n}X^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers la dérivée du polynôme nul (elle n'est pas bornée), ce qui montre la non-continuité en 0 de la dérivation $P \mapsto P'$, application linéaire de source $\mathbb{K}[X]$.
7. Nous verrons à la même section la continuité de chaque application *multi*linéaire de source chaque produit d'espaces vectoriels normés de dimension finie. En particulier,

   si l'espace vectoriel E est une algèbre de dimension finie,
   sa multiplication est alors continue.

   En résulte pour chaque naturel n la continuité de la multiplication matricielle sur $M_n(\mathbb{K})$.
8. Imposons A fermée et f continue dont on note $G := \left\{\binom{a}{f(a)}\right\}_{a\in A}$ le graphe. Soit $g \in G^{\mathbb{N}}$ convergeant dans $E \times F$ vers un certain $\binom{\ell}{m}$ et dont on note $\binom{x}{y}$ les suites "coordonnées". Composer par les deux projections livre alors (d'après

[43] Ces continuités sont quasiment tautologiques et présentent donc peu d'intérêt.

[44] *Culture* : un tel point est dit ***isolé*** car il possède un voisinage dans A dont il est le seul élément.

la remarque 4) les tendances $\left\{ \begin{array}{l} x \longrightarrow \ell \\ y \longrightarrow m \end{array} \right.$, d'où (par continuité[45] de f en ℓ) celle $f \circ x \longrightarrow f(\ell)$. Or, puisque g prend ses valeurs dans le graphe de f, on a l'égalité séquentielle $f \circ x = y$, d'où les égalités $m = \lim y = \lim f \circ x = f(\ell)$ et l'appartenance $\lim g \in G$. Conclusion :

est fermé le graphe de chaque application continue de source fermée.

Remarques Soit $D \subset A$.

1. De la continuité de f en chaque $a \in A$ on déduirait celle de f en chaque $d \in D$, *i. e.* celle de f sur D. Par conséquent, la "continuité-sur" passe à la sous-partie, au sens des implications

$$f \text{ continue sur } A \Longrightarrow f \text{ continue sur } D.$$

2. **Continuité & restrictions**. Imposons f continue sur D, soient $d \in D$ et $\Delta \in D^{\mathbb{N}}$ tels que $\Delta \longrightarrow d$. La continuité de f en d livre alors la tendance $f(\Delta_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(d)$, *i. e.* $f_{|D}(\Delta_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f_{|D}(d)$, ce qui montre la continuité de $f_{|D}$ en d. Il en résulte les implications :

$$f \text{ continue sur } D \Longrightarrow f_{|D} \text{ continue.}$$

La réciproque est cependant fausse en général[46] : pour chaque point $a \in A$ où f n'est pas continue, l'application $f_{|\{a\}}$ est continue (car constante) mais f n'est pas continue sur $\{a\}$ (car ne l'est pas en a).

Montrons qu'elle tient si D est *ouvert* dans A : pour chaque $d \in D$, l'ouvert relatif D étant alors voisinage relatif de d, il y a[47] un voisinage relatif V de d tel que $f_{|V} \underset{d}{\longrightarrow} f(d)$, ce qui est l'une des descriptions de la continuité en d. On pourra donc retenir les équivalences

$$\forall O \ \underline{\underline{\text{ouvert}}} \text{ de } A, \ \left[f \text{ continue sur } O \Longleftrightarrow f_{|O} \text{ continue} \right].$$

3. **Caractère local de la continuité**. Pour chaque $a \in A$, notons $\mathcal{V}_a$ l'ensemble des voisinages de a dans A. On a alors le cycle d'implications

$$\begin{array}{lcl} f \text{ continue sur } A & \overset{\text{remarque 1}}{\Longrightarrow} & \forall a \in A, \ \ \forall V \in \mathcal{V}_a, \ f \text{ continue sur } V \\ & \underset{\mathcal{V}_a \neq \emptyset \text{ à } a \in A \text{ fixé}}{\overset{\text{remarque 2 et}}{\Longrightarrow}} & \forall a \in A, \ \ \exists V \in \mathcal{V}_a, \ f_{|V} \text{ continue} \\ & \underset{\text{de la continuité}}{\overset{\text{caractère ponctuel}}{\Longrightarrow}} & \forall a \in A, \ \ \exists V \in \mathcal{V}_a, \ f_{|V} \text{ continue en } a \\ & \underset{\text{la continuité en } a}{\overset{\text{caractère local de}}{\Longleftrightarrow}} & \forall a \in A, \ \ f \text{ continue en } a \\ & \underset{\text{de la continuité}}{\overset{\text{caractère ponctuel}}{\Longrightarrow}} & f \text{ continue sur } A. \end{array}$$

[45] La limite ℓ reste bien dans A car ce dernier est fermé par hypothèse.
[46] Attention donc à ne pas faire dire au caractère ponctuel de la continuité plus que ce qu'il dit !
[47] Imposer $V := D$ et utiliser l'hypothèse $f_{|D} \underset{d}{\longrightarrow} f(d)$.

Ce cycle bouclant, les implications en jeu sont des équivalences. En ne retenant que le deuxième énoncé de droite, nous pouvons affirmer que[48]

f est continue ssi chaque point de sa source admet un voisinage auquel la restriction de f est continue.

Cela s'énonce parfois sous la forme plus "compacte" (bien s'assurer que tous les implicites de cette forme soient clairs)

f est continue ssi elle l'est au voisinage de chaque point.

Application : soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement de A par des ouverts de A à chacun desquels la restriction de f est continue. Soit $a \in A$ et soit $i \in I$ tel que $a \in O_i$: la partie O_i étant alors voisinage de a dans A, nous avons la continuité de f au voisinage de a. Le caractère local de la continuité permet donc d'affirmer :

pour chaque recouvrement de la source par des ouverts (de la source),
la continuité équivaut à celle de la restriction
à chaque ouvert du recouvrement considéré.

Exemple : soient $C, C' \subset A$ fermés (relatifs) tels que $A = C \amalg C'$ et imposons $\binom{f_{|C}}{f_{|C'}} = \binom{0}{1}$. Les fermés C et C' sont alors ouverts dans A (car complémentaires dans A et fermés) et recouvrent A. L'application f étant par ailleurs continue sur chacun de ces ouverts (car y est constante), le caractère local de la continuité montre que f est continue.

FIG

Cet exemple a de quoi surprendre : l'application f est continue mais "saute" pourtant de 0 à 1 quand les fermés C et C' sont non vides ! Ce fait contre-intuitif[49] vient de ce que la partie $C \amalg C'$ n'est alors pas "connexe" – au sens intuitif d'être faite "d'un seul tenant". Nous verrons à la section 4.4 que cette surprise ne peut avoir lieu quand A est *connexe par arcs*.

Propriétés (stabilité de la continuité ponctuelle par opérations algébriques, par composition) *Soit $a \in A$.*

1. *Les applications $A \longrightarrow F$ continues en a forment un sous-espace vectoriel de F^A. Si de plus F est une algèbre à multiplication continue, ce sous-espace vectoriel est alors une sous-algèbre de F^A.*
2. *Soit g une application à valeurs dans un espace vectoriel normé et donnant sens à la composée $g \circ f$. On a alors l'implication*

$$\left\{\begin{array}{c} f \text{ est continue en } a \\ g \text{ est continue en } f(a) \end{array}\right. \Longrightarrow g \circ f \text{ est continue en } a.$$

[48] On dit que la continuité (tout court) est une notion *locale*.

[49] Notre intuition se fourvoie précisément lorsqu'elle parle d'un "saut", en préjugeant de l'existence d'un *point où aurait lieu* ce "saut".

Démonstration

1. Soient φ et ψ deux applications de F^A continues en a, soit $\lambda \in \mathbb{K}$. L'application $\lambda\varphi + \psi$ tend alors (d'après les opérations usuelles sur les tendances) en a vers

   $\lambda \lim_a \varphi + \lim_a \psi \overset{\varphi \text{ et } \psi \text{ sont}}{\underset{\text{continues en } a}{=}} \lambda\varphi(a) + \psi(a) = [\lambda\varphi + \psi](a)$, d'où sa continuité en a.

   Supposons de plus que F est une algèbre à multiplication continue. L'application $\varphi\psi$ tend (d'après les opérations usuelles sur les tendances) en a vers $\varphi(a)\psi(a) = [\varphi\psi](a)$, d'où sa continuité en a. L'application constante[50] 1_F fait par ailleurs sens et est continue (car constante).

2. La prémisse de l'implication désirée se réécrivant $\begin{cases} f \underset{a}{\longrightarrow} \boxed{f(a)} \\ g \underset{\boxed{f(a)}}{\longrightarrow} g(f(a)) \end{cases}$, il en résulte (par composition des tendances) la tendance $g \circ f \underset{a}{\longrightarrow} g(f(a))$, d'où la continuité de $g \circ f$ en a.

Corollaires (stabilité de la continuité par opérations algébriques, par composition)

1. *La partie $C(A, F)$ de F^A en est un sous-espace vectoriel. C'en sera même une sous-algèbre si F est en outre une algèbre à multiplication continue.*
2. *Soit g une application à valeurs dans un espace vectoriel normé et continue sur* $\operatorname{Im} f$*. Si f est continue, alors la composée $g \circ f$ fera sens et sera continue*[51]*.*

Démonstration : se ramener aux propriétés précédentes en utilisant le caractère ponctuel de la continuité.

Exemples

1. Soit $N \in \mathbb{N}$ et imposons que E est une algèbre à multiplication continue[52]. Par composition, la multiplication $E^N \longrightarrow E$ est alors continue, donc (par combinaisons linéaires)

   $\boxed{\textit{chaque application } E^N \longrightarrow E \textit{ polynomiale à } N \textit{ indéterminées est continue}}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'algèbre $M_n(\mathbb{K})$ étant alors de dimension finie, sa multiplication est continue et, en identifiant $M_n(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}^{n^2}$, l'exemple précédent appliqué au cas $\binom{E}{N} = \binom{\mathbb{K}}{n^2}$ livre

   les continuités de la trace et du déterminant sur $M_n(\mathbb{K})$.

Proposition (continuités "produit" et "coordonnées")

[50] Ne pas oublier l'unité de l'algèbre !
[51] En d'autres termes : *dès qu'elle fait sens, chaque composée d'applications continues est continue.*
[52] Par exemple si la norme de E est sous-multiplicative ou si l'algèbre E est de dimension finie.

1. *Soit* $\begin{pmatrix} E_i & A_i \\ F_i & f_i \end{pmatrix}$ *une famille*[53] *finie telle que, pour chaque* i, E_i *et* F_i *sont des espaces vectoriels normés,* $A_i \subset E_i$ *et* $f : A_i \longrightarrow F_i$. *Alors*

$$\text{l'application "produit" } \left\{ \begin{array}{ccc} \prod A_i & \longrightarrow & \prod F_i \\ (a_i) & \longmapsto & (f_i(a_i)) \end{array} \right.$$

est continue ssi l'application f_i *est continue pour chaque* i.

2. *Imposons l'espace vectoriel normé but* F *de dimension finie et soit* $B \subset F$ *une partie basique. Pour chaque vecteur de base* $\beta \in B$, *notons* f^β *la composée à gauche de* f *par la projection sur la droite* $\mathbb{K}\beta$ *parallèlement à* $\bigoplus_{b \neq \beta}^{b \in B} \mathbb{K}b$. *Alors*

$$f \text{ est continue ssi } f^\beta \text{ est continue pour chaque } \beta \in B.$$

Démonstration

1. En notant φ l'application définie par la famille (f_i), on a les équivalences

$$\begin{array}{lcl} \varphi \text{ est continue} & \underset{\text{la continuité}}{\overset{\text{définition de}}{\iff}} & \forall a \in \prod A_i,\ \varphi \underset{a}{\longrightarrow} \varphi(a) \\ & \underset{\text{de } \varphi}{\overset{\text{définition}}{\iff}} & \forall a \in \prod A_i,\ \varphi \underset{a}{\longrightarrow} (\ f_i(a_i)) \\ & \underset{\text{sur les tendances "produit"}}{\overset{\text{proposition correspondante}}{\iff}} & \forall a \in \prod A_i,\ \forall i,\ f_i \underset{a_i}{\longrightarrow} f_i(a_i) \\ & \overset{?}{\iff} & \forall i,\ \forall \alpha \in A_i,\ \ f_i \underset{\alpha}{\longrightarrow} f_i(\alpha) \\ & \underset{\text{la continuité}}{\overset{\text{définition de}}{\iff}} & \forall i,\ f_i \text{ est continue.} \end{array}$$

L'équivalence $\overset{?}{\iff}$ se justifie comme la proposition correspondante sur les tendances "produits" (sens $\Longleftarrow$ aisé, sens $\Longrightarrow$ plus délicat).

2. On a les équivalences

$$\begin{array}{lcl} f \text{ est continue} & \underset{\text{la continuité}}{\overset{\text{définition de}}{\iff}} & \forall a \in A,\ f \underset{a}{\longrightarrow} f(a) \\ & \underset{\text{sur les tendances "coordonnées"}}{\overset{\text{proposition correspondante}}{\iff}} & \forall a \in A,\ \forall \beta \in B,\ f^\beta \underset{a}{\longrightarrow} f^\beta(a) \\ & \underset{\text{quantificateurs } \forall}{\overset{\text{interversion de}}{\iff}} & \forall \beta \in B,\ \forall a \in A,\ f^\beta \underset{a}{\longrightarrow} f^\beta(a) \\ & \underset{\text{la continuité}}{\overset{\text{définition de}}{\iff}} & \forall \beta \in B,\ \ f^\beta \text{ est continue.} \end{array}$$

Exemples Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrons la continuité de l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ a & \longmapsto & \left(\operatorname{tr} a^i\right)_{i \in [1,n|]} \end{array} \right.$. D'après le point 1 ci-dessus, il s'agit d'établir à $i \in [1, n|]$ fixé la continuité de $a \mapsto \operatorname{tr} a^i$, laquelle résulte (par composition) de celles des applications polynomiales tr et $a \mapsto a^i$.

[53] L'ensemble indexant est sous-entendu afin d'alléger les écritures : la lettre i est ainsi partout *muette*.

2. Montrons la continuité de l'application "polynôme caractéristique" $\left\{\begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ a & \longmapsto & \chi_a \end{array}\right.$.
   D'après le point 2 ci-dessus, en choisissant la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ il suffit de prouver que l'application $a \mapsto \operatorname*{Coef}_{X^i} \chi_a$ est continue pour chaque $i \in [0, n|]$. Or, étant donné un tel i, l'application $a \mapsto \operatorname*{Coef}_{X^i} \chi_a$ est polynomiale (à n^2 coordonnées), donc continue, *c. q. f. d.*
3. Montrons la continuité de l'application "comatrice" $\left\{\begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ a & \longmapsto & \operatorname{com} a \end{array}\right.$.
   Il s'agit à $i, j \in [1, n|]$ fixés d'établir la continuité de l'application $a \mapsto \operatorname*{Coef}_{E_{i,j}} \operatorname{com} a$: or cette application est polynomiale car est un déterminant en les coordonnées de la matrice-argument, ce qui conclut.

La proposition suivante décrit la continuité exclusivement en termes *topologiques.* Elle est à rapprocher de la remarque 11 section 1.1 décrivant les tendances en termes d'ouverts ou en termes de voisinages.

Proposition (continuité, ouverts, fermés)

Parmi les points suivants, le point 1 implique les points 2 et 3 :

1. *l'application f est continue ;*
2. *l'image $\underline{\underline{\text{réciproque}}}$ par f de chaque ouvert de F est ouverte dans A ;*
3. *l'image $\underline{\underline{\text{réciproque}}}$ par f de chaque fermé de F est fermée dans A.*

Démonstration

Montrons plus généralement que les trois points sont équivalents.

$\boxed{2 \Longrightarrow 1}$ (hors programme) Soit $a \in A$. Soit $\mathcal{C}$ une boule ouverte centrée en $f(a)$: l'image réciproque $f^{-1}(\mathcal{C})$ contient alors a et est ouverte (d'après 2), donc inclut une boule $\mathcal{B}$ centrée en a, d'où les inclusions $f(\mathcal{B}) \subset f\left(f^{-1}(\mathcal{C})\right) \subset \mathcal{C}$. Il en résulte la tendance $f \underset{a}{\longrightarrow} f(a)$, *i. e.* la continuité de f en a.

Sanity check : deux normes équivalentes induisant les mêmes ouverts, elles induisent bien les mêmes applications continues.

$\boxed{1 \Longrightarrow 2}$ Soit Ω un ouvert de F. Montrons que son image réciproque $O := f^{-1}(\Omega)$ est ouverte dans A. Soit $o \in O$. On a alors l'appartenance $f(o) \in \Omega$, d'où (vu que Ω est ouvert) un réel $\varepsilon > 0$ tel que $\mathring{\mathcal{B}}(f(o), \varepsilon) \subset \Omega$. Par ailleurs, la continuité de f livre la tendance $f \underset{o}{\longrightarrow} f(o)$, d'où un réel $\delta > 0$ tel que $f\left(\mathring{\mathcal{B}}(o, \delta) \cap A\right) \subset \mathring{\mathcal{B}}(f(o), \varepsilon)$. Des deux inclusions précédentes résulte celle $f\left(\mathring{\mathcal{B}}(o, \delta) \cap A\right) \subset \Omega$, *i. e.* $\mathring{\mathcal{B}}(o, \delta) \cap A \subset O$, ce qui conclut d'après la caractérisation des ouverts relatifs en termes de boules.

$\boxed{3 \Longrightarrow 2}$ Soit Ω un ouvert de F. Vu pour chaques parties $X, Y \subset F$ l'égalité $f^{-1}(Y \setminus X) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(X)$, remplacer $\binom{X}{Y}$ par $\binom{{}^c\Omega}{F}$ livre l'égalité $f^{-1}(\Omega) = A \setminus f^{-1}({}^c\Omega)$. Le complémentaire ${}^c\Omega$ étant par ailleurs fermé, son image réciproque par f est par hypothèse fermée, donc le complémentaire $A \setminus f^{-1}({}^c\Omega) = f^{-1}(\Omega)$ est ouvert dans A, ce qui conclut. (Raisonnement identique pour l'autre sens.)

Remarques

- On pourrait dans les points 2 et 3 remplacer F par n'importe quelle partie incluant $\operatorname{Im} f$ (en particulier par $\operatorname{Im} f$).
- La proposition précédente s'énonce parfois sous la forme concise

le caractère ouvert (resp. fermé) est préservé par préimage continue[54].

- Si l'on remplace dans les points 2 et 3 les images *réciproques* par les images *directes*[55], les implications annoncées tombent en défaut (sauf cas pathologiques). En effet, chaque application constante est continue mais l'image directe (par une telle application) de chaque partie non vide est un singleton, lequel n'est pas ouvert si $E \neq \{0\}$. De même, pour chaque vecteur $b \in F$, l'application continue $a \mapsto (\operatorname{th} \|a\|)\, b$ envoie le fermé E sur l'intervalle $\{\lambda b\}_{-1<\lambda<1}$, lequel n'est pas fermé ssi $b \neq 0$.

Exemples

1. *Sanity checks* : soit $r \geq 0$ un réel. Chaque sphère de rayon r est alors fermée comme image réciproque du fermé $\{r\}$ par l'application continue "norme". De même, chaque boule fermée de rayon r est fermée comme image réciproque du fermé $[0, r]$ par l'application continue "norme" – et chaque boule ouverte de rayon r est ouverte comme préimage continue de l'ouvert $]-1, r[$. Enfin, la partie $\mathbb{Z}$ est fermée dans $\mathbb{R}$ comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue $t \mapsto \sin(\pi t)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{K})$ est alors ouvert dans l'espace vectoriel normé $M_n(\mathbb{K})$ comme image réciproque de l'ouvert $\mathbb{K}^*$ par l'application continue det. De même, le groupe spécial linéaire $SL_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\{1\})$ est fermé comme préimage continue du fermé $\{1\}$.
3. Le lieu d'annulation de chaque application réelle continue sur E est fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$. Réciproquement, chaque fermé de E est le lieu d'annulation de l'application "distance à ce fermé", laquelle est continue comme nous le verrons à la section 2.2 (exemple 3). On pourra donc retenir que

   les fermés de E sont les lieux d'annulations
   des applications réelles continues sur E.

   Remarque – **hors programme**. Cet exemple motive, en remplaçant le cadre *analytique* des applications réelles continues par le cadre *algébrique* des applications polynomiales, l'étude des *variétés algébriques* définies par les racines de polynômes à plusieurs indéterminées. Ces variétés forment les fermés de la topologie de Zariski dont il a été question au chapEvn1 ? ? ?.
4. Soient $r \leq n$ deux naturels. L'application qui à chaque matrice de $M_n(\mathbb{K})$ associe la famille de ses mineurs de taille $m \times m$ où m parcourt $]r, n|]$ est alors continue (chaque de ses applications "coordonnée" est continue car polynomiale), donc son lieu d'annulation est fermé. Le rang de chaque matrice étant par ailleurs le plus grand "côté" d'une de ses matrices extraites inversibles, le lieu d'annulation considéré est formé des matrices de rang au plus r, ce qui montre le caractère fermé de l'ensemble $\{a \in M_n(\mathbb{K}) \ ; \ \operatorname{rg} a \leq r\}$.

[54] Par « préimage continue » on entend « image réciproque par une application continue ».
[55] *Culture* : chaque application préservant le caractère ouvert (resp. fermé) est dite ***ouverte*** (resp. ***fermée***).

Proposition[56] **(continuité et densité)**

Soit $D \subset A$ dense dans A, soit $g : A \longrightarrow F$, imposons f et g coïncidant sur D et continues (sur A). Les applications f et g sont alors égales.

Démonstration

Soit $a \in A$ et soit $d \in D^{\mathbb{N}}$ tel que $d \longrightarrow a$ (permis puisque D est dense dans A). Vu l'inclusion $D \subset A$, l'égalité $f(d_n) = g(d_n)$ fait alors sens pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et est vérifiée par hypothèse : appliquer $\lim_{n\to\infty}$ livre alors (grâce aux continuités en a de f et g) l'égalité $f(a) = g(a)$, *c. q. f. d.*

Exemples

1. Soit $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application *continue* préservant l'addition. D'après un exercice classique (*cf.* ? ? ?), la restriction $a_{|\mathbb{Q}}$ est alors une certaine homothétie $q \mapsto \lambda q$: cette dernière étant continue sur $\mathbb{R}$, dans lequel $\mathbb{Q}$ est dense, on a l'égalité $a = \lambda \,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.
2. Imposons $A = E \neq \{0\}$ et f nulle partout sauf en un nombre fini non nul de points. Les applications f et 0 coïncident alors sur une partie dense (l'espace privé d'une partie finie[57]) et ne sont pas égales, donc l'une des deux n'est pas continue. Comme l'application constante 0 est continue, c'est f qui ne l'est pas. En d'autres termes[58],

   pour chaque partie $\Phi \subset E$ finie, chaque application continue sur E et constante sur $E \setminus \Phi$ est constante.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $a \in M_n(\mathbb{K})$. On vérifie alors aisément l'égalité des polynômes caractéristiques $\chi_{ab} = \chi_{ba}$ pour chaque matrice b inversible (*cf.* ? ? ?chapRéduc). Vu la densité de $GL_n(\mathbb{K})$, cette égalité se propagera pour chaque matrice $b \in M_n(\mathbb{K})$ si l'on montre la continuité des applications $M \mapsto \chi_{aM}$ et $M \mapsto \chi_{Ma}$, laquelle résulte (par composition) de celle de l'application[59] $M \mapsto (aM, Ma, \chi_M)$.
4. Regardons comment l'application "comatrice" agit sur les conjugaisons. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$. On a alors pour chaque matrice $a \in GL_n(\mathbb{K})$ les égalités[60]

$$\begin{aligned} \operatorname{com}\left(PaP^{-1}\right) &= \left(\det PaP^{-1}\right) \cdot {}^t\left(PaP^{-1}\right)^{-1} = (\det a)\ {}^tP\ {}^ta^{-1}\ {}^tP^{-1} \\ &= {}^tP\ \left[(\det a)\ {}^ta^{-1}\right]\ {}^tP^{-1} = {}^tP\ (\operatorname{com} a)\ {}^tP^{-1}. \end{aligned}$$

   Les applications $a \mapsto \operatorname{com}\left(PaP^{-1}\right)$ et $a \mapsto {}^tP\ (\operatorname{com} a)\ {}^tP^{-1}$ coïncident donc sur $GL_n(\mathbb{K})$: pour montrer qu'elle sont égales, il suffit d'établir leur continuité. Or d'une part l'application "comatrice" est continue, d'autre part l'application linéaire $a \mapsto \left(Pa, aP^{-1}, {}^ta\right)$ est continue (l'espace source est de dimension finie), d'où (par composition) la continuité de $a \mapsto \binom{PaP^{-1}}{{}^tP\ a\ {}^tP^{-1}}$ et (toujours par composition) celles de $a \mapsto \binom{\operatorname{com}\left(PaP^{-1}\right)}{{}^tP\ (\operatorname{com} a)\ {}^tP^{-1}}$, *c. q. f. d.*

[56] En termes plus concis : *deux applications continues coïncidant sur une partie dense sont égales.*
[57] On pourrait remplacer « finie » par « dénombrable ».
[58] Φ comme « **fi**ni »
[59] Les multiplications par a sont continues car linéaires sur un espace de dimension finie.
[60] On rappelle pour chaque matrice a carrée l'égalité $a\ {}^t\operatorname{com} a = (\det a)\,\mathrm{Id}$.

Exercices d'application

1. *Soient $n \geq 2$ un naturel et $f : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer alors l'existence d'un $u \in \mathbb{U}$ tel que $f(u) = f\left(u\, e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)$.*

2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir alors pour chaques matrices $a, b \in M_n(\mathbb{K})$ les égalités*

$$\det \operatorname{com} a = (\det a)^{n-1}, \quad \operatorname{com} \operatorname{com} a = (\det a)^{n-2}\, a \quad \textit{et} \quad \operatorname{com} ab = \operatorname{com} a \ \operatorname{com} b.$$

3. *Montrer l'équivalence des quatre énoncés suivants :*
   (a) *f est continue ;*
   (b) *$\forall P \subset A,\ f\left(\overline{P}\right) \subset \overline{f(P)}$;*
   (c) *$\forall Q \subset F,\ \overline{f^{-1}(Q)} \subset f^{-1}\left(\overline{Q}\right)$;*
   (d) *$\forall Q \subset F,\ f^{-1}(Q) \subset \operatorname{Int} f^{-1}(Q)$.*

4. *Soit $\mathcal{F}$ un recouvrement de A par un nombre fini de fermés de A.*
   (a) *Montrer que f est continue ssi sa restriction à chaque élément de $\mathcal{F}$ est continue.*
   (b) *Discuter les hypothèses.*

---

1. Notons[61] δ l'application $t \mapsto f\left(e^{2\pi i t}\right) - f\left(e^{2\pi i\left(t+\frac{1}{n}\right)}\right)$ définie sur $\mathbb{R}$ et dont on veut prouver l'existence d'un zéro. Elle est continue en tant que différence de composées d'applications continues. Vu l'égalité "télescopique" $\sum_{i=1}^{n} \delta\left(\frac{i}{n}\right) = 0$, il y a un $i \in [1, n|[$ tel que $\delta\left(\frac{i}{n}\right) \delta\left(\frac{i+1}{n}\right) \leq 0$ (les termes de la somme précédente seraient sinon strictement du même signe et leur somme ne saurait être nulle) et le théorème des valeurs intermédiaires livre alors (par continuité de δ) un zéro de δ comme désiré.

   Remarque – S'agissant d'une adaptation "complexe" du *théorème de la corde universelle*, ce résultat pourrait s'appeler *théorème de l'argument universel*.

2. On a pour chaque $a \in GL_n(\mathbb{K})$ les égalités

$$\det \operatorname{com} a \underset{\delta := \det a}{\overset{\text{abréger}}{=}} \det \left[\ \delta\ {}^t a^{-1}\ \right] = \delta^n \ \det\left({}^t a^{-1}\right) \ = \delta^n\ \delta^{-1} = (\det a)^{n-1}.$$

Or la composée $\det \circ \operatorname{com}$ est continue (comme composée d'applications continues) et l'itérée $\det^{\circ(n-1)}$ est continue car polynomiale (bien utiliser $n \geq 1$) : de leur coïncidence sur la partie dense $GL_n(\mathbb{K})$ on peut donc déduit leur égalité.

On a pour chaque $a \in GL_n(\mathbb{K})$ les égalités

$$\operatorname{com} \operatorname{com} a = \det \operatorname{com} a\ {}^t(\operatorname{com} a)^{-1} = (\det a)^{n-1}\ \frac{a}{\det a} = (\det a)^{n-2}\ a.$$

Or le carré $\operatorname{com}^{\circ 2}$ est continu (comme itéré d'une application continue) et l'application $a \mapsto (\det a)^{n-2}\ a$ est continue (elle est polynomiale en chaque coordonnée

[61] δ pour « **d**ifférence »

lorsque $n \geq 2$ et est constante égale à 1 lorsque $n = 1$) : on peut donc conclure comme ci-dessus.

On a pour chaques $a, b \in GL_n(\mathbb{K})$ les égalités

$$\begin{aligned}\operatorname{com} ab &= \det(ab)\ {}^t(ab)^{-1} = (\det a)(\det b)\ {}^ta^{-1}\ {}^tb^{-1} \\ &= (\det a)\ {}^ta^{-1}\ (\det b)\ {}^tb^{-1}\ = \operatorname{com} a\ \operatorname{com} b.\end{aligned}$$

Or la multiplication de $M_n(\mathbb{K})$ est continue (car polynomiale), donc ses deux composées avec l'application continue "comatrice" seront continues et l'on peut conclure comme ci-dessus en utilisant la densité de $GL_n(\mathbb{K})^2$ dans $M_n(\mathbb{K})^2$.

Remarque – Sans topologie, toutes ces égalités peuvent s'établir sur chaque corps K en les montrant tout d'abord en les matrices $(X_{i,j})_{i,j\in[1,n|]}$ et $(Y_{i,j})_{i,j\in[1,n|]}$ inversibles dans $M_n(L)$ où $L := K(X_{i,j}, Y_{i,j})_{i,j\in[1,n|]}$ est le corps des fractions rationnelles à n^2 indéterminées, puis, à $a, b \in M_n(K)$ fixés, en évaluant les égalités obtenues selon $\binom{X_{i,j}}{Y_{i,j}} \mapsto \binom{a_{i,j}}{b_{i,j}}$ pour chaques $i, j \in [1, n|]$ (évaluations légitimes car chacun des membres est polynomial).

3. On pourrait montrer les quatre implications $(b) \underset{\Longleftarrow}{\Longrightarrow} (c) \underset{\Longleftarrow}{\Longrightarrow} (d)$ uniquement à l'aide de considérations ensemblistes sur les images réciproques et de la dualité adhérence-intérieur. La continuité étant ici ce qui nous intéresse, montrons plutôt que le premier point équivaut resp. à chacun des trois autres[62].

$\boxed{(a) \Longrightarrow (c)}$ Pour chaque $Q \subset F$, l'image réciproque par f du fermé $\overline{Q} \supset Q$ est fermée (par continuité de f) et inclut celle de Q (par croissance de $B \mapsto f^{-1}(B)$), donc est un fermé incluant $f^{-1}(Q)$, d'où l'inclusion $\overline{f^{-1}(Q)} \subset f^{-1}\left(\overline{Q}\right)$.

$\boxed{(c) \Longrightarrow (a)}$ Pour chaque fermé[63] $C \subset F$, remplacer Q par $C = \overline{C}$ donne $\overline{f^{-1}(C)} \subset f^{-1}(C)$, d'où le caractère fermé de $f^{-1}(C)$.

$\boxed{(a) \Longrightarrow (d)}$ Pour chaque $Q \subset F$, l'image réciproque par f de l'ouvert $\mathring{Q} \subset Q$ est ouverte (par continuité de f) et incluse dans celle de Q (par croissance de $B \mapsto f^{-1}(B)$), *i. e.* est un ouvert inclus dans $f^{-1}(Q)$, d'où l'inclusion $f^{-1}(Q) \subset \operatorname{Int} f^{-1}(Q)$.

$\boxed{(d) \Longrightarrow (a)}$ Pour chaque ouvert $O \subset F$, remplacer Q par $O = \mathring{O}$ donne l'inclusion $f^{-1}(O) \subset \operatorname{Int} f^{-1}(O)$, d'où le caractère ouvert de $f^{-1}(O)$.

$\boxed{(a) \Longrightarrow (b)}$ Soit $P \subset A$, soit $q \in f\left(\overline{P}\right)$, soit $\pi \in \overline{P}$ tel que $q = f(\pi)$ et soit $p \in P^{\mathbb{N}}$ tel que $p \longrightarrow \pi$ (permis car $\pi \in \overline{P}$). La suite $(f(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est alors à valeurs dans $f(P)$ et tend (par continuité de f) vers $f(\lim p) = f(\pi) = q$, d'où l'appartenance $q \in \overline{f(P)}$.

$\boxed{(b) \Longrightarrow (a)}$ Soit par l'absurde $\alpha \in A$ en lequel f n'est pas continue et soit $a \in A^{\mathbb{N}}$ tendant vers α sans que la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende vers $f(\alpha)$ (permis par le critère séquentiel de continuité). On peut alors évoquer une extractrice x et un réel $\varepsilon > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ \left\|f\left(a_{x(n)}\right) - f(\alpha)\right\| > \varepsilon$. Le point $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_{x(n)}$ adhérant alors à la partie $P := \left\{a_{x(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, on a l'appartenance $\alpha \in \overline{P}$, d'où celle $f(\alpha) \in f\left(\overline{P}\right)$. Le membre de droite incluant

[62] Il serait plus court d'établir le cycle d'implications $(a) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (c) \Longrightarrow (d) \Longrightarrow (a)$.
[63] C comme « **c**losed »

par hypothèse $\overline{f(P)}$, le point $f(\alpha)$ adhère à $f(P)$, d'où un $q \in f(P)$ tel que $\|q - f(\alpha)\| < \varepsilon$, ce qu'empêchent les minorations ci-dessus $\forall p \in P,\ \|f(p) - f(\alpha)\| > \varepsilon$.

4.

(a) Le sens direct est immédiat, la continuité impliquant celle de la restriction à chaque partie.

Pour le sens réciproque, vu la stabilité du caractère "fermé dans A" par réunion finie, une récurrence immédiate permet de ramener le nombre de fermés à 2 (le cas d'un recouvrement à une seule partie est trivial). Soient donc $C, C' \subset A$ deux fermés de A à chacun desquels la restriction de f est continue, soient $\alpha \in A$ et $a \in A^{\mathbb{N}}$ tels que $a \longrightarrow \alpha$. Les parties $I := a^{-1}(C)$ et $I' := a^{-1}(C')$ recouvrent alors $\mathbb{N}$, donc l'une des deux au moins est infinie : discutons selon que les *deux* sont infinies ou non.

Supposons I infinie et I' finie. En notant $N := \sup_{\mathbb{N}} I' + 1$, on a alors l'inclusion $[N, \infty|[\subset \mathbb{N} \backslash I' \subset I$ et la suite $(a_{N+n})_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $a(I) \subset C$; puisqu'elle tend vers α, le caractère fermé de C livre l'appartenance $\alpha \in C$. La continuité de $f_{|C}$ et le critère séquentiel de continuité livrent alors la tendance $f(a_{N+n}) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(\alpha)$, *i. e.* $f(a_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(\alpha)$, ce qui conclut.

Supposons I et I' infinis. On les paramètre alors à l'aide de deux extractrices i et i'. Comme ci-dessus, la limite $\alpha = \lim_{n \to \infty} a_{i(n)}$ adhère à $a(I) \subset C$ et appartient à C, d'où la tendance $f\left(a_{i(n)}\right) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(\alpha)$; on montrerait de même celle $f\left(a_{i'(n)}\right) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(\alpha)$. Les images I et I' resp. de i et i' recouvrant par ailleurs $\mathbb{N}$, on peut conclure à la tendance $f(a_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(\alpha)$.

(b) Si F est nul, chaque restriction de f est continue (car alors constante) et l'équivalence est tautologique. Même conclusion si chaque point $\alpha \in A$ vérifie $\alpha \notin \overline{A \backslash \{\alpha\}}$. On imposera donc pour les contre-exemples suivants que F est non nul et que A contient un point α tel que[64] $\alpha \in \overline{A \backslash \{\alpha\}}$, ce qui permet d'évoquer un vecteur $u \in F$ unitaire et une suite injective $a \in A^{\mathbb{N}}$ tendant vers α. Montrons alors que, ces cas pathologiques étant mis à part, chaque hypothèse est nécessaire.

Si f est nulle partout sauf en α où l'on a $f(\alpha) := u$, le critère séquentiel de continuité en α est alors nié (donc f n'est pas continue) mais la restriction de f au fermé $\{p\}$ pour chaque point $p \in A$ est continue (car constante) et ces fermés recouvrent bien A. La *finitude* du recouvrement est donc indispensable en général. (On peut bien sûr s'en passer dans le cas *particulier* du recouvrement infini par les boules fermées unité de A.)

Soit n un naturel et imposons f nulle partout sauf sur $A' := \{\alpha\} \cup \{a_i\}_{i \in [1,n|[}$ où l'on impose $f(\alpha) = u$ et $f(a_i) = iu$ pour chaque $i \in [1, n|[$. Chacune des n images réciproques $f^{-1}(b)$ lorsque b décrit $[0, n|[\, u$ est alors, à l'exception de $f^{-1}(\{0\})$, fermée (car finie), la restriction à chacune de ces images réciproques est continue car constante mais l'application f n'est pas continue en 0 (le critère séquentiel de continuité en α n'est pas vérifié).

[64] *Culture* : un tel point α (non isolé) est appelé un ***point d'accumulation*** de A.

Par conséquent, on ne peut se passer en général du caractère fermé de *chaque* partie du recouvrement fini considéré, quel que soit son cardinal. (On peut bien sûr s'en passer dans le cas *particulier* des recouvrements par des ouverts.)

2.2 Continuité uniforme, continuité au sens de Lipschitz

Définition (continuité uniforme, caractère lipschitzien)

L'application f est dite ***lipschitzienne***[65] *si*

$$\exists L > 0,\ \forall a, b \in A,\ \left\| f(a) - f(b) \right\| \leq L \left\| a - b \right\|.$$

L'application f est dite ***uniformément continue*** *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall a, b \in A,\ \left\| a - b \right\| < \delta \Longrightarrow \left\| f(a) - f(b) \right\| < \varepsilon.$$

Rappelons à fins de comparaisons que f est continue ssi

$$\forall a \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall b \in A,\ \left\| a - b \right\| < \delta \Longrightarrow \left\| f(a) - f(b) \right\| < \varepsilon.$$

Remarques

• Étant donné un réel L comme ci-dessus, on qualifie f de L-***lipschitzienne***.

• Soit un tel L, soit $\mathfrak{N}$ une norme équivalente à $\mathcal{N}$ et soient $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha \mathfrak{N} \leq \mathcal{N} \leq \beta \mathfrak{N}$. On a alors à $a, b, \in E$ fixés les comparaisons

$$\mathfrak{N}(f(a) - f(b)) \leq \frac{1}{\alpha} \left\| f(a) - f(b) \right\| \leq \frac{L}{\alpha} \left\| a - b \right\| \leq \frac{\beta L}{\alpha} \mathfrak{N}(a - b),$$

ce qui montre que f est $\frac{\beta L}{\alpha}$-lipschitzienne pour la norme $\mathfrak{N}$. Il en résulte[66]

l'invariance du caractère lipschitzien par passage à une norme équivalente.

• Lorsque $F = \mathbb{K}$, l'application f est lipschitzienne ssi les taux d'accroissements $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$ sont bornés lorsque (a, b) décrit les couples de points distincts de A. Le graphe de f est donc "coincé" dans un cône d'ouverture $2 \arctan L$ en chaque point de son graphe :

FIG

On retrouve ainsi, *via* la formule des accroissements finis, que *chaque application dérivable (de source un intervalle réel) est lipschitzienne ssi sa dérivée est bornée.*

• En terme de graphes, l'application f est uniformément continue si son graphe est compris, pour chaque point G de ce graphe, dans un rectangle centré en G de hauteur ε et de largeur δ associée :

FIG

Il apparaît ainsi graphiquement que

[65] De Rudolph Lipschitz, mathématicien allemand de la fin du XIX$^{\text{e}}$ siècle.

[66] La continuité uniforme est elle aussi invariante par passage à une norme équivalente (*cf.* remarque en fin de l'exercice 2a).

chaque application lipschitzienne est uniformément continue[67].

• En calquant les définitions des continuités uniforme et "simple", la seule différence apparaissant est un échange de quantificateurs :

$$\begin{array}{lll} \text{continuité "simple"} & : & \forall\varepsilon,\ \underline{\underline{\forall a,\ \exists\delta}},\ \forall b,\ \cdots \\ \text{continuité uniforme} & : & \forall\varepsilon,\ \underline{\underline{\exists\delta,\ \forall a}},\ \forall b,\ \cdots. \end{array}$$

Le terme *uniforme* (littéralement *le même partout*) se réfère par conséquent au δ ci-dessus : dans le cas de la continuité uniforme, on peut imposer *le même δ partout* à la source (*i. e.* pour chaque point $a \in A$). Par ailleurs, cette différence étant mise à jour, l'implication suivante devient tautologique :

chaque application uniformément continue est continue.

• Il serait aisé de montrer que les caractères lipschitzien et uniformément continu sont stables par combinaisons linéaires :

les applications lipschitziennes (resp. uniformément continues) sur A forment un sous-espace vectoriel de F^A.

Exemples

1. Les comparaisons triangulaires $|\|a\| - \|b\|| \leq \|a-b\|$ expriment précisément le caractère 1-lipschitzien de la norme de E (à valeurs dans l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}$). En conséquence :

   la norme de E est continue.

2. Appelons ***isométrie*** toute application entre parties d'espaces vectoriels normés qui préserve les distances[68]. Par exemple, les translations de E sont des isométries, les rotations et les réflexions de $\mathbb{R}^2$ en sont des isométries. Une isométrie étant 1-lipschitzienne,

   chaque isométrie de E est continue.

   De même, pour chaque scalaire λ, chaque homothétie affine de E de rapport λ multiplie les distances par $|\lambda|$, donc est $|\lambda|$-lipschitzienne. Par conséquent,

   chaque homothétie affine ou translation de E est continue.

3. Imposons A non vide, ce qui donne sens à l'application "distance à A" définie par

   $$\delta := \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ e & \longmapsto & \inf_{a\in A} d(a,e) \end{array} \right.$$

   et soient p et q deux points de E. Vu pour chaque $a \in A$ les majorations

   $$\delta(q) = \inf_{\alpha\in A} d(\alpha, q) \leq d(a,q) \underset{\text{triangulaire}}{\overset{\text{comparaison}}{\leq}} d(a,p) + d(p,q),$$

[67] Formellement, lorsque f est L-lipschitzienne, imposer (à $\varepsilon > 0$ fixé) dans la définition de l'uniforme continuité $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$

[68] Formellement, l'application f est une isométrie ssi $\forall a, b \in A,\ \|f(a) - f(b)\| = \|a-b\|$

la différence $\delta(q)-d(p,q)$ minore l'ensemble $\{d(a,p)\}_{a\in A}$, donc minore sa borne inférieure $\delta(p)$, ce qui s'écrit $\delta(q)-d(p,q)\leq\delta(p)$, *i. e.* $\delta(q)-\delta(p)\leq\|p-q\|$. Observer la symétrie des rôles joués par p et q livre alors[69] la majoration $\delta(p)-\delta(q)\leq\|q-p\|$, d'où la conclusion $|\delta(p)-\delta(q)|\leq\|p-q\|$ et le caractère 1-lipschitzien de δ. En conséquence,

$$\boxed{\textit{l'application "distance à } A\textit{" est continue} \text{ (sauf si } A \text{ est vide).}}$$

4. Munissons le sous-espace vectoriel $E^{(\mathbb{N})}$ de $E^{\mathbb{N}}$ formé des suites stationnant à 0 de la norme d'indice 1 associée. Les comparaisons triangulaires $\|a-b\|\leq\|a\|+\|b\|$ et la linéarité de l'addition montrent alors que[70]

$$\text{l'opérateur "somme" } \left\{\begin{array}{ccc} E^{(\mathbb{N})} & \longrightarrow & E \\ a & \longmapsto & \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \end{array}\right. \text{ est continu car 1-lipschitzien.}$$

5. Soit S un segment infini de $\mathbb{R}$ et munissons l'espace $C(S,\mathbb{K})$ de la norme uniforme. Les comparaisons triangulaires $\left|\int_S\varphi\right|\leq\int_S|\varphi|$ et la linéarité de l'intégration montrent de même que[71]

$$\text{l'opérateur "intégrale sur } S\text{" } \left\{\begin{array}{ccc} C(S,\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \varphi & \longmapsto & \int_S\varphi \end{array}\right. \text{ est } \begin{array}{c}\text{continu car} \\ \ell(S)\text{-lipschitzien.}\end{array}$$

Application : soit $a\in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\inf_{p\neq q}^{p,q\in\mathbb{N}} d(a_p,a_q)>1$ et montrons l'existence d'une application $A\longrightarrow\mathbb{R}$ continue non bornée. Pour chaque naturel n notons $B_n:=\mathring{\mathcal{B}}(a_n,1)$, nommons δ_n l'application "distance au fermé ${}^cB_n$" (laquelle est continue d'après le point 3 encadré) et appelons Δ l'application $E\longrightarrow\mathbb{R}$ nulle en dehors de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\overline{B_n}$ et telle que Δ coïncide avec $n\delta_n$ sur $\overline{B_n}$ pour chaque naturel n.

FIG cônes Δ sur chaque B_n

L'hypothèse sur a montre alors d'une part que la réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\overline{B_n}$ est fermée (chaque suite convergente à valeurs dans cette réunion est à partir d'un certain rang à valeurs dans l'un des réunis $\overline{B_n}$), d'autre part à $n\in\mathbb{N}$ fixé que la boule $\mathring{\mathcal{B}}(a_n,2)$ ne rencontre B_m pour aucun naturel $m\neq n$ et donc que Δ et $n\delta_n$ coïncident sur $\mathring{\mathcal{B}}(a_n,2)$. Finalement, l'application Δ est continue (car nulle) sur l'ouvert ${}^c\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\overline{B_n}$ et est à $n\in\mathbb{N}$ fixé continue sur l'ouvert $\mathring{\mathcal{B}}(a_n,2)$ (car y coïncide avec l'application continue $n\delta_n$). Ces ouverts recouvrant par ailleurs E, l'application Δ est continue[72]. Vu enfin à $n\in\mathbb{N}$ les égalités $\delta_n(a_n)=1$ et $\Delta(a_n)=n$, l'application Δ n'est pas bornée.

Exercices d'application

[69] Appliquer le même raisonnement en échangeant les lettres p et q.

[70] *Culture hors programme* : la conclusion est maintenue en remplaçant les familles *finies* de E par les familles *sommables* de E.

[71] La notation $\ell(S)$ désigne la longueur du segment S.

[72] On a utilisé le caractère local de la continuité.

1. *Montrer que le caractère lipschitzien est préservé par composition (dès que cela fait sens).*
2.
   (a) *Montrer que f est uniformément continue ssi*[73]
   $$\forall a,b \in A^{\mathbb{N}},\ a_n - b_n \longrightarrow 0 \Longrightarrow f(a_n) - f(b_n) \longrightarrow 0.$$
   (b) *En déduire que l'application réelle $t \mapsto \cos t^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*
   (c) *Déterminer l'intérieur dans l'espace $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme de la partie formée par les applications uniformément continues.*
3. *Soit $c \in A$. Montrer alors que l'application*[74]
   $$\varphi \mapsto \|\varphi(c)\| + \sup_{a,b\in A}^{a\neq b} \frac{\|\varphi(a) - \varphi(b)\|}{\|a-b\|}$$
   définit une norme sur l'espace des applications lipschitziennes de A vers F. Ces normes sont-elles équivalentes lorsque c décrit A ?

---

1. Imposons f lipschitzienne, soit g une application[75] lipschitzienne sur $\operatorname{Im} f$, soient $L, M > 0$ des réels tels que f et g soient resp. L-lipschitzienne et M-lipschitzienne. On a alors pour chaques $a, b \in A$ les majorations
   $$\begin{aligned} \|[g\circ f](a) - [g\circ f](b)\| &= \|g(f(a)) - g(f(b))\| \\ &\underset{\text{lipschitzienne}}{\overset{g \text{ est } M\text{-}}{\leq}} M\|f(a) - f(b)\| \underset{\text{lipschitzienne}}{\overset{f \text{ est } L\text{-}}{\leq}} ML\|a-b\|, \end{aligned}$$
   ce qui montre que la composée $g \circ f$ est LM-lipschitzienne.
2.
   (a) Supposons f uniformément continue et soient $a, b \in A^{\mathbb{N}}$ dont la différence tend vers 0. Soit $\varepsilon > 0$, soit $\delta > 0$ associé à ε par l'uniforme continuité de f et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|a_n - b_n\| < \delta$ pour chaque naturel $n > N$. On a alors (pour un tel n) la comparaison $\|f(a_n) - f(b_n)\| < \varepsilon$, ce qui conclut.

   Supposons f non uniformément continue. On a alors[76]
   $$\exists \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists a,b \in A,\ \left\{ \begin{array}{l} \|a-b\| < \frac{1}{2^n} \\ \|f(a) - f(b)\| \geq \varepsilon \end{array} \right. .$$
   Soit un tel ε. L'axiome du choix nous donne alors deux suites $a, b \in A^{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ \left\{ \begin{array}{l} \|a_n - b_n\| < \frac{1}{2^n} \\ \|f(a_n) - f(b_n)\| \geq \varepsilon \end{array} \right.$. En particulier, la suite $a - b$ tend vers 0 mais les comparaisons $\|f(a_n) - f(b_n)\| \geq \varepsilon > 0$ empêchent la tendance $f(a_n) - f(b_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui conclut par contraposée.

   Remarque – Puisque le prédicat « tendre vers 0 » est inchangé par passage à une norme équivalente, il en est de même pour la continuité uniforme.

[73] Cette équivalence est un *critère séquentiel d'uniforme continuité.*
[74] *Rappel* : la borne supérieure considérée l'est dans $\mathbb{R}_+$.
[75] L'espace vectoriel normé but de g est sous-entendu.
[76] Remplacer (dans la définition de l'uniforme continuité de f) le δ par $\frac{1}{2^n}$ pour chaque naturel n.

(b) Notons f l'application considérée. L'idée est que f oscille de plus en plus vite entre deux même valeurs (± 1). Définissons donc une suite $a := n \mapsto \sqrt{n\pi}$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

FIG

On a alors d'une part les égalités et tendances

$$\begin{aligned} a_{2n+1} - a_{2n} &= \sqrt{2n\pi + \pi} - \sqrt{2n\pi} = \frac{(2n\pi + \pi) - (2n\pi)}{\sqrt{2n\pi + \pi} + \sqrt{2n\pi}} \\ &\leq \frac{\pi}{\sqrt{2n\pi}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

d'autre part les égalités

$$f(a_{2n+1}) - f(a_{2n}) = \cos(2n\pi + \pi) - \cos(2n\pi) = -2,$$

ce qui contredit le critère séquentiel d'uniforme continuité établi à la question 2a.

(c) La partie considérée est un sous-espace vectoriel strict (elle ne contient pas l'application $t \mapsto \cos(t^2)$ d'après la question 2b), donc est d'intérieur vide d'après l'exo ? ? ?chapEvn1 ? ?

3. Notons N l'application proposée. Elle fait sens[77] par définition des applications lipschitziennes. Imposons f lipschitzienne, soit g lipschitzienne, soit λ un scalaire et notons $S := \sup_{a \neq b}^{a,b\in A} \frac{\|f(a)-f(b)\|}{\|a-b\|}$.

Supposons $N(f) = 0$. Chacun des termes de $N(f)$ étant positif, chacun d'eux est alors nul : la nullité du second revient à la nullité des normes $\|f(a) - f(b)\|$ lorsque a et b décrivent A, *i. e.* à la constance de f ; la nullité du premier terme montre alors que f est nulle.

Vu d'une part les égalités

$$\begin{aligned} \|[\lambda f](c)\| &= \|\lambda\, f(c)\| = |\lambda|\ \|f(c)\| \text{ et (pour chaques } a \neq b \text{ dans } A) \\ \|[\lambda f](a) - [\lambda f](b)\| &= \|\lambda f(a) - \lambda f(b)\| = \|\lambda(f(a) - f(b))\| = |\lambda|\ \|f(a) - f(b)\|, \end{aligned}$$

d'autre part l'égalité $\sup(pP) = p \sup P$ valide pour chaque réel p positif et pour chaque partie $P \subset \mathbb{R}_+$, on peut réécrire

$$\begin{aligned} N(\lambda f) &= |\lambda|\ \|f(c)\| + \sup_{a,b\in A}^{a\neq b} \left(|\lambda| \frac{\|f(a) - f(b)\|}{\|a-b\|} \right) \\ &= |\lambda| \left(\|f(c)\| + \sup_{a,b\in A}^{a\neq b} \frac{\|f(a) - f(b)\|}{\|a-b\|} \right) = |\lambda|\, N(f). \end{aligned}$$

Soient enfin $a \neq b$ dans A. On a alors les majorations

$$\begin{aligned} \|[f+g](a) - [f+g](b)\| &= \|f(a) + g(a) - f(b) - g(b)\| \\ &= \|f(a) - f(b) + g(a) - g(b)\| \\ &\leq \|f(a) - f(b)\| + \|g(a) - g(b)\|, \end{aligned}$$

[77] Même si la partie dont on prend la borne supérieure est vide, cette dernière fait sens car vaut $\sup_{\mathbb{R}_+} \emptyset = \min \mathbb{R}_+ = 0$.

d'où (en divisant par $\|a-b\|$) celles

$$\begin{aligned}\frac{\|[f+g](a)-[f+g](b)\|}{\|a-b\|} &\leq \frac{\|f(a)-f(b)\|}{\|a-b\|}+\frac{\|g(a)-g(b)\|}{\|a-b\|}\\ &\leq S+\sup_{\alpha,\beta\in A}^{\alpha\neq\beta}\frac{\|g(\alpha)-g(\beta)\|}{\|\alpha-\beta\|}.\end{aligned}$$

Il en résulte la majoration $\sup_{a,b\in A}^{a\neq b}\frac{\|[f+g](a)-[f+g](b)\|}{\|a-b\|}\leq S+\sup_{a,b\in A}^{a\neq b}\frac{\|g(a)-g(b)\|}{\|a-b\|}$. Ajouter $[f+g](c)=f(c)+g(c)$ livre alors la majoration $N(f+g)\leq N(f)+N(g)$, ce qui finit d'établir que N est une norme.

Montrons que les normes considérées sont dans la même classe d'équivalence. Soit $c'\in A$ et notons N' la norme induite sur $\operatorname{Lip}(A,F)$ par c'. On a alors les majorations

$$\begin{aligned}N'(f)-N(f) &= \|f(c')\|-\|f(c)\|\leq\|f(c')-f(c)\|\leq S\|c'-c\|\\ &\leq (S+\|f(c)\|)\|c'-c\|\text{, d'où } N'(f)\leq(1+\|c'-c\|)N(f).\end{aligned}$$

Échanger les rôles de c et c' montrerait alors l'équivalence de N et N', ce qui conclut.

2.3 Cas des applications (multi)linéaires

Les trois continuités sus-présentées se confondent – et même se simplifient – dans le cas des applications linéaires, au sens de la proposition suivante.

Proposition (continuité d'une application linéaire)

Imposons f linéaire. On a alors l'équivalence[78]

$$\boxed{f\text{ est continue}\iff\exists C>0,\ \forall a\in E,\ \|f(a)\|\leq C\|a\|}.$$

Démonstration

$\boxed{\Longleftarrow}$ Vu pour chaques $a,b\in E$ les majorations

$$\|f(a)-f(b)\|\underset{\text{additive}}{\overset{f\text{ est}}{=}}\|f(a-b)\|\overset{\text{hypothèse}}{\leq}C\|a-b\|,$$

l'application f est lipschitzienne, donc continue.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Remplacer ε par 1 dans la définition de la continuité de f en 0 permet d'évoquer un $\delta>0$ tel que $\forall a\in A,\ \|a-0\|<2\delta\Longrightarrow\|f(a)-f(0)\|<1$. Soit alors $a\in E$ non nul et notons $v:=\delta\frac{a}{\|a\|}$, lequel est

$$\begin{aligned}\text{de norme }\|v\| &= \left\|\delta\frac{a}{\|a\|}\right\|=|\delta|\left\|\frac{a}{\|a\|}\right\|=\delta\ 1=\delta\\ \text{et d'image } f(v) &= f\left(\delta\frac{a}{\|a\|}\right)\underset{\text{linéaire}}{\overset{f\text{ est}}{=}}\frac{\delta}{\|a\|}f(a).\end{aligned}$$

[78] Le membre de droite $\exists C>0,\ \forall a\in E,\ \|f(a)-f(0)\|\leq C\|a-0\|$ s'énonce parfois « f est lipschitzienne en 0 ».

De la majoration $\|v-0\|<2\delta$ l'on peut alors déduire celle $\|f(v)-f(0)\|<1$, d'où les majorations

$$\|f(a)\| = \left\|\frac{\|a\|}{\delta}f(v)\right\| = \underbrace{\frac{\|a\|}{\delta}}_{>0}\underbrace{\|f(v)\|}_{<1} < \frac{\|a\|}{\delta} = C\,\|a\| \text{ en notant } C := \frac{1}{\delta}$$

La majoration $\|f(a)\| \leq C\,\|a\|$ restant valide lorsque $a=0$ (elle s'écrit alors $0\leq 0$ par linéarité de f), on a terminé.

Notation : l'ensemble des applications linéaires continues de E vers F sera noté

$$L_c(E,F) := L(E,F)\cap C(E,F).$$

Remarques

- Dans le monde linéaire, la continuité est une affaire de *majorations*.
- Sur l'espace vectoriel $L_c(E,F)$, l'application $\varphi \mapsto \sup_{a\in E}^{a\neq 0} \frac{\|\varphi(a)\|}{\|a\|} =: |||\varphi|||$ fait sens et l'on pourrait montrer[79] (hors programme) qu'il s'agit quand $E=F$ d'une norme d'algèbre[80] sur l'algèbre $L_c(E)$. Cette norme est un cas particulier de l'exercice 3 section 2.2 où le point c est imposé nul.
- **Continuité d'une application multilinéaire (hors programme)**. Un peu de travail permettrait d'obtenir la généralisation suivante. Soit I un ensemble fini, imposons que E soit un produit d'espaces vectoriels normés indexé par I et que f soit multilinéaire. On a alors l'équivalence[81]

$$f \textit{ est continue} \iff \exists C>0,\ \forall a\in E,\ \|f(a)\| \leq C\prod_{i\in I}\|a_i\|.$$

Le sens direct est une adaptation immédiate de la preuve ci-dessus, celui réciproque est établi dans la dernière preuve de cette section (preuve au programme).

Sanity check : si E est une algèbre, sa multiplication est alors bilinéaire, donc (d'après l'équivalence ci-dessus) continue ssi $\exists C>0, \forall a,b\in E,\ \|ab\| \leq C\,\|a\|\,\|b\|$. On retrouve bien notre "définition" d'une algèbre à multiplication continue donnée au chapitre evn1 ? ? ? en fin de section *Normes, distances, équivalence de normes.*

Exemples

1. Soit $\mathcal{E}$ un ensemble et imposons $E=\mathcal{B}(\mathcal{E},F)$ (muni de la norme uniforme). Les majorations $\begin{matrix}\forall e\in\mathcal{E}\\ \forall f\in E\end{matrix}$, $\|f(e)\|\leq\|f\|$ montrent alors que

   chaque évaluation sur $\mathcal{B}(\mathcal{E},F)$ *est continue (car* 1*-lipschitzienne).*

   En particulier, lorsque $\binom{\mathcal{E}}{F}=\binom{\mathbb{N}}{\mathbb{K}}$, les majorations $\forall n\in\mathbb{N},\ |a_n|\leq\|a\|$ pour chaque suite $a\in E$ convergente donnent (en appliquant lim) la majoration $|\lim a|\leq\|a\|$, d'où

   la continuité sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{cv}}$ *de l'application* lim *(qui est* 1*-lipschitzienne).*

[79] Nous l'avons de fait établi au chapitre evn1 ? ? ? dans le cas particulier de l'exo d'entrainmentEvn1 ? ? ?normesMatrcieSubordonée ? ? ?

[80] On a plus généralement la majoration $|||g\circ f|||\leq|||g|||\cdot|||f|||$ pour chaque espace vectoriel normé G et pour chaque $g\in L_c(F,G)$, dès que $f\in L_c(E,F)$.

[81] L'espace vectoriel normé produit E est normé comme d'habitude par $(a_i)_{i\in I}\mapsto\sup_{i\in I}\|a_i\|$.

2. Toujours sur $\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{K})$, le "tapis roulant" $\gamma := a \mapsto (a_1, a_2, a_3...)$ vers la gauche est 1-lipschitzien vu à $a \in \mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{K})$ fixé les majorations

$$\|\gamma(a)\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\gamma(a)_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_{n+1}| \overset{\text{reparamétrer}}{\underset{m:=n+1}{=}} \sup_{m\in\mathbb{N}^*} |a_m| \leq \sup_{m\in\mathbb{N}} |a_m| = \|a\|.$$

De même, le "tapis roulant" $\delta := a \mapsto (0, a_0, a_1, a_2, ...)$ vers la droite est une isométrie (le terme nul rajouté ne change pas la borne supérieure), donc est 1-lipschitzien et *a fortiori* continu.

3. Imposons $E = \mathbb{K}[X]$ normé par $P \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \left|P^{(n)}(0)\right|$ (il s'agit de la norme d'indice 1 associée à la base $\left(\frac{X^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$). Vu pour chaque $P \in \mathbb{K}[X]$ les majorations

$$\|P'\| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left|P^{(n+1)}(0)\right| = \sum_{m\in\mathbb{N}^*} \left|P^{(m)}(0)\right| = \|P\| - |P(0)| \leq \|P\|,$$

on peut affirmer le caractère 1-lipschitzien et la continuité de la dérivation. Nous avons en revanche vu (*cf.* exemple 6 section 2.1) que cette dernière n'était pas continue pour la norme $P \mapsto \max_{[0,1]} |P|$.

Proposition (continuité des applications linéaires en dimension finie)

Si E est de dimension finie, alors chaque application linéaire de source E est continue.

Démonstration

Imposons E de dimension finie et f linéaire. La continuité de f étant alors invariante par équivalence de normes, il suffit d'établir cette continuité pour *une* norme de E. Soit pour cela une partie basique $B \subset E$ finie (légitime car E est de dimension finie), laquelle induit (d'après l'exercice ? ? ?chapEvn1) une norme N sur E vérifiant $N\left(\sum_{b\in B} \lambda_b b\right) = \sup_{b\in B} |\lambda_b|$ pour chaque $\lambda \in \mathbb{K}^B$. On a a alors pour chaque $a \in E$, en notant $(\lambda_b)_{b\in B}$ la famille des coordonnées de a dans la base $(b)_{b\in B}$, les majorations

$$\begin{aligned}\|f(a)\| &= \left\|f\left(\sum_{b\in B} \lambda_b b\right)\right\| = \left\|\sum_{b\in B} \lambda_b f(b)\right\| \leq \sum_{b\in B} \underbrace{|\lambda_b|}_{\leq \sup_{\beta\in B}|\lambda_\beta| = N(a)} \|f(b)\| \\ &\leq \left(\sum_{b\in B} \|f(b)\|\right) N(a), \text{ ce qui conclut.}\end{aligned}$$

Corollaire (caractère fermé des sous-espaces vectoriels de dimension finie)

Chaque sous-espace vectoriel de E de dimension finie est fermé.

Démonstration

Soit V un tel sous-espace vectoriel et soient $v \in V^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$ tels que $v \longrightarrow \ell$. Notons alors $W := V + \mathbb{K}\ell$ et soit $\pi \in L(W)$ dont l'ensemble des points fixes est V (si $\ell \in V$, alors $W = V$ et l'identité Id_W convient, sinon le projecteur sur V parallèlement à $\mathbb{K}\ell$ fait l'affaire). L'espace vectoriel W est de dimension finie au plus $1 + \dim V$ et est naturellement normé par la norme induite par celle de E : en particulier, la tendance[82] $v \longrightarrow \ell$ a lieu dans E comme dans W. En tant qu'application linéaire de source un espace vectoriel de dimension finie, l'endomorphisme π est continu, d'où la tendance $\pi(v_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi(\ell)$. Or chaque terme de la suite v tombe dans V, *i. e.* est fixe par π, donc la tendance précédente se réécrit $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi(\ell)$, d'où les égalités $\pi(\ell) = \lim v = \ell$, ce qui montre que ℓ est fixe par π, *i. e.* appartient à V, *c. q. f. d.*

Remarques

- Cette preuve est assez fine : sans utiliser la continuité des endomorphismes en dimension finie, laquelle repose sur l'équivalence des normes en dimension finie (un gros théorème), il semble délicat d'établir le résultat annoncé.
- Quand E est déjà de dimension finie, une preuve plus courte est toutefois disponible. Chaque sous-espace vectoriel se décomposant comme intersection finie d'hyperplans, il suffit de montrer que chaque hyperplan de E est fermé. Or chaque hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire sur E, laquelle est continue puisque E est de dimension finie ; un tel hyperplan est donc fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par une application continue.
- Il peut bien sûr y avoir des sous-espaces vectoriels non fermés ! Ceux-là seront néanmoins de dimension infinie, à l'instar de $\mathbb{K}[X]$ qui ne contient pas, bien qu'elle lui adhère, la limite uniforme exp dans $C([0,1], \mathbb{K})$.

Finissons par une généralisation de la proposition précédente. La preuve proposée, malgré son aspect technique, reprend fondamentalement les mêmes ingrédients que la preuve "1-linéaire".

Proposition (continuité des applications multilinéaires en dimension finie)

Imposons que E soit un produit fini d'espaces vectoriels normés chacun de dimension finie. Chaque application multilinéaire de source E est alors continue.

Démonstration

Imposons f multilinéaire. On peut alors évoquer une famille finie $(E_i)_{i\in I}$ d'espaces vectoriels normés chacun de dimension finie dont E est le produit. On peut ensuite évoquer comme dans la preuve "1-linéaire" une famille $\binom{B_i}{N_i}_{i\in I}$ telle que, à $i \in I$ fixé, d'autre part B_i est une partie basique finie de E_i, d'autre part N_i est une norme sur E_i vérifiant

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}^{B_i}, \left\| \sum_{b\in B_i} \lambda_b b \right\| = \sup_{b\in B} |\lambda_b| \qquad \text{(pour alléger la lecture, on a abusivement noté } \|e\| := N_i(e) \text{ pour chaque } e \in E_i\text{).}$$

[82] Cette tendance se réécrit $\|v_n - l\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ dans $\mathbb{R}$.

Montrons alors la continuité de f pour la norme produit $N := \left(a^i\right)_{i\in I} \mapsto \sup_{i\in I} \left\|a^i\right\|$ induite par la famille de normes $(N_i)_{i\in I}$, ce qui conclura en vertu de l'équivalence des normes de E.

Quitte à reparamétrer le produit $E = \prod_{i\in I} E_i$ et à renommer ses facteurs, on peut imposer $I = [1,n|]$ où $n := \operatorname{Card} I$ et réécrire à fins de visibilité le produit E sous la forme $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$.

Soit $a =: \left(a^1, a^2, ..., a^n\right) \in E$. Pour chaque $i \in I$, notons $\left(\lambda^i_b\right)_{b\in B_i}$ la famille des coordonnées de a^i dans la base $(b)_{b\in B_i}$. On majore alors comme dans la preuve "1-linéaire" :

$$\begin{array}{rcl}
\|f(a)\| & = & \left\|f\left(\sum_{b\in B_1} \lambda^1_b b, \sum_{b\in B_2} \lambda^2_b b, ..., \sum_{b\in B_n} \lambda^n_b b\right)\right\| \\
& \underset{n\text{-linéaire}}{\overset{f \text{ est}}{=}} & \left\|\sum_{b\in B_1\times B_2\times\cdots\times B_n} \lambda^1_{b_1}\lambda^2_{b_2}\cdots\lambda^n_{b_n}\ f(b_1, b_2, ..., b_n)\right\| \\
& \leq & \sum_{b\in B_1\times B_2\times\cdots\times B_n} \underbrace{\left|\lambda^1_{b_1}\right|\ \left|\lambda^2_{b_2}\right|\ \cdots\ \left|\lambda^n_{b_n}\right|}_{\leq\|a^1\|\ \|a^2\|\ \cdots\ \|a^n\|}\ \|f(b_1, b_2, ..., b_n)\| \\
& \leq & \left\|a^1\right\|\ \left\|a^2\right\|\ \cdots\ \|a^n\| \sum_{b\in B_1\times B_2\times\cdots\times B_n} \|f(b)\| \\
& = & C\ \left\|a^1\right\|\ \left\|a^2\right\|\ \cdots\ \|a^n\| \text{ en abrégeant } C := \sum_{b\in B_1\times B_2\times\cdots\times B_n} \|f(b)\|.
\end{array}$$

Concluons en montrant la tendance $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$. Quand f était la multiplication $\mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$, nous avions établi cette tendance grâce à une égalité "télescopique" de la forme $xy - ab = (x-a)y + a(y-b)$. Généralisons cette dernière[83].

Soit $x \in E$. On a alors les égalités

$$\begin{array}{cl}
& \sum_{i=1}^n f\left(a^1, ..., a^{i-1}, \boxed{x^i - a^i}, x^{i+1}, ..., x^n\right) \\
\underset{\text{multi-additive}}{\overset{f \text{ est}}{=}} & \sum_{i=1}^n \begin{array}{l} f\left(a^1, ..., a^{i-1}, x^i, x^{i+1}, ..., x^n\right) \\ -f\left(a^1, ..., a^{i-1}, a^i, x^{i+1}, ..., x^n\right) \end{array} \\
= & \begin{array}{l} f(x) + \sum_{i=2}^n f\left(a^1, ..., a^{i-1}, x^i, ..., x^n\right) \\ -\sum_{i=1}^{n-1} f\left(a^1, ..., , a^i, x^{i+1}, ..., x^n\right) - f(a) \end{array} \\
\underset{j:=i+1 \text{ en bas}}{\overset{\text{reparamétrage}}{=}} & \begin{array}{l} f(x) + \sum_{i=2}^n f\left(a^1, ..., a^{i-1}, x^i, ..., x^n\right) \\ -\sum_{j=2}^n f\left(a^1, ..., , a^{j-1}, x^j, ..., x^n\right) - f(a) \end{array} \\
= & f(x) - f(a).
\end{array}$$

À l'aide des majorations $\forall e \in E,\ \|f(e)\| \leq C \prod_{i\in I} \left\|e^i\right\|$ sus-établies, on peut alors

[83] Pour *trois* facteurs, on utiliserait une égalité de la forme $xyz - abc = (x-a)yz + a(y-b)z + ab(z-c)$.

majorer[84]

$$\begin{aligned}\|f(x)-f(a)\| &= \left\|\sum_{i=1}^{n} f\left(a^1,...,a^{i-1},x^i-a^i,x^{i+1},...,x^n\right)\right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\left\|f\left(a^1,...,a^{i-1},x^i-a^i,x^{i+1},...,x^n\right)\right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} C\left\|a^1\right\|\cdots\left\|a^{i-1}\right\|\ \left\|x^i-a^i\right\|\ \left\|x^{i+1}\right\|\cdots\left\|x^{i+1}\right\|.\end{aligned}$$

Vu à $i\in I$ fixé la tendance $x^i \underset{x\to a}{\longrightarrow} a^i$ (voilà tout l'intérêt d'utiliser la norme "uniforme" N), on peut écrire $\begin{cases} \forall j\in [1,i|[\,, & \left\|a^j\right\| = O_{x\to a}(1) \\ & \left\|x^i-a^i\right\| = o_{x\to a}(1) \\ \forall j\in]i,n|]\,, & \left\|x^j\right\| = O_{x\to a}(1)\end{cases}$, ce qui montre (après multiplication) que chaque terme de la somme ci-dessus est un $o_{x\to a}(1)$. Cette somme est donc elle-même un $o_{x\to a}(1)$, ce qui conclut en majorant $\|f(x)-f(a)\|\leq o_{x\to a}(1)\underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.

Remarque – Il est conseillé d'expliciter cette démonstration dans le cas $n=2$ afin d'éclairer la technicité du cas général.

Sanity check : lorsque E est une algèbre à multiplication continue de dimension finie, la multiplication $E^n \longrightarrow E$ est alors à $n\in\mathbb{N}$ fixé n-linéaire, donc continue.

Exercices d'application

1. *Soient n un naturel et $a>1$ un réel. Montrer qu'il y a un réel $C>0$ tel que $\forall P\in\mathbb{K}_n[X],\ |P(a)|\leq C\sup_{[-1,1]}|P|$.*
2.
   (a) *Imposons E formé des suites scalaires bornées et muni de la norme uniforme. Étudier la continuité de la "dérivation discrète" $a\mapsto (a_{n+1}-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
   (b) *Imposons E formé des applications scalaires bornées sur $[0,1]$ et muni de la norme uniforme. Étudier la continuité de $f\mapsto f(0)-f(1)$.*
   (c) *Imposons E formé des applications scalaires continues sur $[0,1]$ et muni de la norme uniforme. Étudier la continuité de $f\mapsto [t\mapsto f(0)+t(f(1)-f(0))]$.*
3. *Imposons $A=E$ et f linéaire. Montrer alors l'équivalence des assertions suivantes :*
   (a) *f est continue ;*
   (b) *l'image réciproque de la sphère unité est fermée ;*
   (c) *pour chaque suite $a\in E^{\mathbb{N}}$ tendant vers 0, la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.*

[84] La fin de cette preuve montre la suffisance des majorations $\forall e\in E,\ \|f(e)\|\leq C\prod_{i\in I}\left\|e^i\right\|$ pour établir la continuité de l'application multilinéaire f.

4. *On impose pour cet exercice f linéaire.*

   (a) *Imposons de plus $F=\mathbb{K}$. Montrer alors que le noyau de f est fermé (resp. dense) si f est continue (resp. n'est pas continue).*

   (b) *Retrouver*[85] *le caractère fermé de la somme de chaque sous-espace vectoriel de E fermé et de chaque sous-espace vectoriel de E de dimension finie.*

   (c) *(plus difficile) Imposons cette fois* $\operatorname{Im} f$ *de dimension finie (sans hypothèse sur l'espace vectoriel normé but F). Montrer alors que f est continue ssi* $\operatorname{Ker} f$ *est fermé et donner une interprétation géométrique de cette équivalence. (On pourra admettre, étant donnés un groupe abélien et trois parties G, H, S de ce groupe dont S est un sous-groupe, l'implication $G\subset S\subset G+H \Longrightarrow S=G+H\cap S$.)*

   (d) *Discuter les hypothèses ci-dessus.*

---

1. On veut montrer la continuité de la forme linéaire "évaluation en a" pour la norme $P\mapsto \sup_{[-1,1]}|P|$. L'espace source $\mathbb{K}_n[X]$ étant de dimension finie, c'est immédiat. (Le minorant $1<a$ ne joue aucun rôle.)

2.

   (a) Notons δ l'application considérée : s'agissant de la somme du "tapis roulant" vers la gauche et de l'identité, elle est linéaire. Par ailleurs, pour chaque $a\in\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{K})$, vu à $n\in\mathbb{N}$ fixé les majorations

   $$\left|\delta(a)_n\right| = |a_{n+1}-a_n| \leq |a_{n+1}|+|a_n| \leq \|a\|+\|a\|,$$

   on peut majorer $\|\delta(a)\|\leq 2\|a\|$, ce qui montre que δ continue (car 2-lipschitzienne).

   (b) On montre comme ci-dessus que l'application considérée est linéaire (différence de deux évaluations) et 2-lipschitzienne.

   (c) Notons φ l'application considérée[86]. Vu l'égalité $\varphi=\alpha\operatorname{eval}_0+\beta\operatorname{eval}_1$ où $\binom{\alpha}{\beta}:=\binom{t\mapsto 1-t}{t\mapsto t}$, on déduit de la linéarité des évaluations celle de φ. Par ailleurs, pour chaque $f\in C([0,1],\mathbb{R})$, l'application affine $t\mapsto f(0)+t(f(1)-f(0))$ est extrémale en l'une de ses bornes, où elle vaut $f(0)$ ou $f(1)$, d'où l'égalité et la majoration

   $$\|\varphi(f)\| = \max\{|f(0)|,|f(1)|\} \leq \|f\|,$$

   ce qui montre que φ est continue (car 1-lipschitzienne).

3. Notons $\mathbb{S}$ la sphère unité de F et montrons les implications (a)$\Longrightarrow$(b)$\Longrightarrow$(c)$\Longrightarrow$(a), les deuxième et troisième par contraposée.

   Supposons (a). Chaque sphère de F étant fermée, l'image réciproque par f de chaque sphère est fermée (par continuité de f), en particulier celle de $\mathbb{S}$, d'où (b).

   Supposons non-(a), *i. e.* (puisque f est linéaire) $\forall C\geq 0,\ \exists a\in E,\ \|f(a)\|>C\|a\|$. En imposant C entier, on en déduit (*via* l'axiome du choix) une suite $a\in$

[85] *Cf.* exercice ? ? ?chapEvn1 ? ? ?section Fermés ? ? ?p47

[86] L'application φ associe à chaque fonction continue la fonction affine coïncidant avec sur $\{0,1\}$

$E^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \|f(a_n)\| > n\|a_n\|$. La suite $\left(\frac{a_n}{\sqrt{n}\|a_n\|}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ fait alors sens[87] et tend vers 0, cependant que sa suite "image" n'est pas bornée vu à $n \in \mathbb{N}^*$ les minorations et tendance

$$\left\| f\left(\frac{a_n}{\sqrt{n}\|a_n\|}\right)\right\| \overset{f \text{ linéaire}}{=} \left\|\frac{f(a_n)}{\sqrt{n}\|a_n\|}\right\| = \frac{\|f(a_n)\|}{\sqrt{n}\|a_n\|} > \frac{n\|a_n\|}{\sqrt{n}\|a_n\|} = \sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

ce qui montre non-(c).

Supposons non-(c) et soit $a \in E^{\mathbb{N}}$ tel que $a \longrightarrow 0$ et $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ non bornée. On peut alors de a extraire une suite α telle que $\|f(\alpha_n)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, ce qui donne sens[88] à la suite $n \mapsto \frac{\alpha_n}{\|f(\alpha_n)\|}$, laquelle prend ses valeurs dans $f^{-1}(\mathbb{S})$ vu à $n \in \mathbb{N}$ les égalités

$$\left\| f\left(\frac{\alpha_n}{\|f(\alpha_n)\|}\right)\right\| \overset{f \text{ linéaire}}{=} \left\|\frac{1}{\|f(\alpha_n)\|} f(\alpha_n)\right\| = \frac{1}{\|f(\alpha_n)\|}\|f(\alpha_n)\| = 1.$$

Or les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{\|f(\alpha_n)\|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent chacune vers 0, donc leur produit aussi, ce qui montre que la suite $\left(\frac{\alpha_n}{\|f(\alpha_n)\|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de $f^{-1}(\mathbb{S})^{\mathbb{N}}$ tend vers un point hors de $f^{-1}(\mathbb{S})$: cette dernière image réciproque n'est pas donc pas fermée, d'où la conclusion non-(b).

4.

(a) Si f est continue, son noyau est alors fermé comme préimage continue du fermé $\{0\}$ (déjà vu en cours). Supposons à présent f non continue et soit $e \in E$. Comme à l'exercice 3, la linéarité de f et sa non-continuité permettent d'évoquer une suite $a \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ |f(a_n)| > n\|a_n\|$. La suite $n \mapsto e - \frac{f(e)}{f(a_n)}a_n$ fait alors sens (d'une part car $F = \mathbb{K}$, d'autre part car $\forall n \in \mathbb{N},\ |f(a_n)| > 0$) et prend ses valeurs dans $\operatorname{Ker} f$ vu à $n \in \mathbb{N}$ fixé les égalités[89]

$$f\left(e - \frac{f(e)}{f(a_n)}a_n\right) \overset{f \text{ linéaire}}{=} f(e) - \frac{f(e)}{f(a_n)}f(a_n) = 0.$$

Vu par ailleurs à $n \in \mathbb{N}^*$ les majorations et tendance $\left\|\frac{a_n}{f(a_n)}\right\| = \frac{\|a_n\|}{|f(a_n)|} < \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, la suite considérée (à valeurs dans $\operatorname{Ker} f$) tend vers e, ce qui conclut à la densité voulue.

Sanity check : on retrouve le fait que chaque hyperplan est ou bien fermé ou bien dense (exo ? ? ?chapEvn1) en associant à l'hyperplan considéré une forme linéaire non nulle dont il est le noyau (la non-nullité excluant le cas fermé *et* dense).

(b) Soient F et Φ deux sous-espaces vectoriels de E resp. fermé et de dimension finie, soient $s \in (F+\Phi)^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$ tels que $s \longrightarrow \ell$, soient $f \in F^{\mathbb{N}}$ et $\varphi \in \Phi^{\mathbb{N}}$ tels que $s = f + \varphi$.

[87] Pour chaque naturel $n \geq 1$, la minoration $\|f(a_n)\| > n\|a_n\|$ empêche la nullité de a_n.
[88] Quitte à extraire à nouveau, on peut toujours imposer $\forall n \in \mathbb{N},\ \|f(\alpha_n)\| > 0$.
[89] Comme si on unitarisait a_n et e relativement à f au lieu de relativement à la norme de E.

Une récurrence immédiate permet d'imposer que Φ soit une droite vectorielle en somme directe avec F. Notons alors π le projecteur de $F \oplus \Phi$ sur Φ parallèlement à F, soit $v \in E$ tel que $\Phi = \mathbb{K}v$ et notons v^* la forme linéaire "coordonnée dans la base (v)" définie sur la droite Φ. La forme linéaire $\Lambda := v^* \circ \pi$ a alors pour noyau

$$\operatorname{Ker} \Lambda = \operatorname{Ker}(v^* \circ \pi) = \pi^{-1}(\operatorname{Ker} v^*) = \pi^{-1}(\{0\}) = \operatorname{Ker} \pi = F,$$

lequel est fermé, et la question 4a) livre la continuité de Λ, d'où la tendance $\Lambda(s_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Lambda(\ell)$. Vu par ailleurs à $n \in \mathbb{N}$ fixé les égalités

$$\Lambda(s_n) = [v^* \circ \pi](f_n + \varphi_n) = v^*(\pi(f_n + \varphi_n)) = v^*(\varphi_n),$$

la suite $\varphi = (v^*(\varphi_n)\, v)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\Lambda(\ell)\, v$, donc la suite $s - \varphi = f$ tend vers $\ell - \Lambda(\ell)\, v$, d'où les égalité et appartenance

$$\ell = \underbrace{\lim f}_{\in F \text{ car } F \text{ est fermé}} + \underbrace{\Lambda(\ell)\, v}_{\in \mathbb{K}v = \Phi} \in F + \Phi, \textit{ c. q. f. d.}$$

(c) Le sens direct se traite comme précédemment. Supposons à présent $\operatorname{Ker} f$ fermé et soit B une partie basique de $\operatorname{Im} f$. Pour chaque $\beta \in B$, notons f^β la composée à gauche de f par la β-ième forme linéaire coordonnée dans la base $(b)_{b\in B}$. Alors d'une part la continuité de f équivaut à celle de f^β pour chaque $\beta \in B$, *i. e.* (d'après la question 4a) au caractère fermé de $\operatorname{Ker} f^\beta$ pour chaque $\beta \in B$,

$$\text{d'autre part on a l'égalité } \operatorname{Ker} f = \bigcap_{\beta\in B} \operatorname{Ker} f^\beta,$$

laquelle fournit au passage une interprétation géométrique comme demandé :

pour chaque famille finie $\mathcal{H}$ d'hyperplans de E,
l'intersection $\cap \mathcal{H}$ est *fermée ssi chaque élément de $\mathcal{H}$ est fermé.*

Soit $\beta \in B$. L'idée est de rajouter au sous-espace vectoriel fermé $\operatorname{Ker} f$ un nombre *fini* de vecteurs afin d'obtenir le noyau $\operatorname{Ker} f^\beta$, la question 4b livrant alors le caractère fermé de ce noyau et la conclusion. Utilisons pour cela l'implication admise avec E pour groupe abélien : puisque $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^\beta \subset E$, si l'on trouve un sous-espace vectoriel $\Phi \subset E$ de dimension finie tel que $E \subset \operatorname{Ker} f + \Phi$, remplaçant (G, H, S) par $(\operatorname{Ker} f, \Phi, \operatorname{Ker} f^\beta)$ dans l'implication admise montrera que $\operatorname{Ker} f^\beta$ est la somme du fermé $\operatorname{Ker} f$ et du sous-espace vectoriel de dimension finie $\Phi \cap \operatorname{Ker} f$ et la question 4b conclura.

Puisque $B \subset \operatorname{Im} f$, chaque $b \in B$ admet un antécédent par f, d'où[90] une famille $(a_b)_{b\in B} \in E^B$ tel que $\forall b \in B,\ b = f(a_b)$. Notons alors $\Phi := \operatorname{Vect}_{b\in B} a_b$ et montrons l'inclusion[91]

$$E \subset \operatorname{Ker} f + \Phi, \text{ ce qui conclura vu que } B \text{ est fini.}$$

[90] L'axiome du choix est ici inutile puisque B est fini.

[91] On pourrait plus précisément établir les égalités $\operatorname{Ker} f^\beta = \operatorname{Ker} f + \operatorname*{Vect}_{b\in B\setminus\{\beta\}} a_b$. L'implication admise permet d'alléger la rédaction en ne raisonnant plus à β fixé.

Soit $e \in E$. On a alors les égalités

$$f(e) = \sum_{b \in B} f^b(e)\, b = \sum_{b \in B} f^b(e)\, f(a_b) = f\left(\sum_{b \in B} f^b(e)\, a_b\right),$$

d'où l'appartenance $e - \sum_{b \in B} f^b(e)\, a_b \in \operatorname{Ker} f$, ce qui montre celle $e \in \operatorname{Ker} f + \sum_{b \in B} f^b(e)\, a_b \subset \operatorname{Ker} f + \Phi$, *c. q. f. d.*

(d) Le sens direct ne requiert aucune autre hypothèse que la continuité de f. Montrons cependant que le sens réciproque est faux en général. On imposera que E et F admettent chacun une base-suite, mettons $a \in E^{\mathbb{N}}$ et $b \in F^{\mathbb{N}}$ chacune libre (en tant que famille de vecteurs) et formée de vecteurs unitaires (quitte à unitariser ces vecteurs). L'application linéaire[92] φ définie par $a_{n-1} \mapsto nb_n$ pour chaque naturel $n \geq 1$ est alors injective, *i. e.* de noyau nul (*a fortiori* fermé), mais les égalités $\frac{\|\varphi(a_{n-1})\|}{\|a_{n-1}\|} = \frac{n\|b_n\|}{1} = n$ pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ nient la continuité de φ.

3 Compacité & dimension finie

On garde évoqués les espaces vectoriels normés E et F, la partie $A \subset E$ et l'application $f : A \longrightarrow F$.

La norme de E évoquée est toujours notée $\mathcal{N}$ ou avec des doubles-barres, lesquelles pourront également – selon le contexte – dénoter la norme de F.

Le caractère *compact* est un analogue topologique du caractère *de dimension finie* en algèbre linéaire. De nombreux théorèmes se récoltent dans ce cadre (dont le théorème fondamental de l'algèbre), ce qui en fait une notion centrale.

3.1 Compacité séquentielle

Définition (compacité séquentielle)

*La partie A est dite **compacte** si chaque suite à valeurs dans A admet une valeur d'adhérence dans A,* i. e. *si*

$$\forall a \in A^{\mathbb{N}}, \quad \begin{array}{c} \exists x \text{ extractrice} \\ \exists \ell \in A \end{array}, \quad a_{x(n)} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Remarque – La "relation" de tendance étant inchangée par passage à une norme équivalente, le prédicat ci-dessus (d'argument A) l'est également, ce qui montre que

la compacité est inchangée par passage à une norme équivalente.

---

[92] Pour réaliser ce contre-exemple, on pourra imposer $f = [P \mapsto XP]$ dans $E = \mathbb{K}[X] = F$ muni de la base $\left(\frac{X^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et normé par $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \frac{X^n}{n!} \mapsto \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$ (il s'agit de la norme uniforme associée à la base considérée).

Avant de donner quelques exemples, voyons deux restrictions topologiques des compacts. D'une part, ces restrictions permettent de manipuler la définition ci-dessus, d'autre part elles décrivent complètement les compacts de chaque espace vectoriel normé de dimension finie (*cf.* section 3.3), ce qui en donne la pleine intuition dans ce cadre.

Propriété

Chaque compact de E est fermé et borné.

Démonstration Soit[93] K un compact de E.

Soit $k \in K^{\mathbb{N}}$ convergente. Par compacité de K, on peut évoquer une extractrice x et un point $\kappa \in K$ tels que $k_{x(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \kappa$. La suite k convergeant, chacune de ses sous-suites tend vers $\lim k$, d'où la tendance $k_{x(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lim k$ et (par unicité de la limite) l'égalité $\lim k = \kappa$. L'hypothèse $\kappa \in K$ permet alors de conclure $\lim k \in K$.

Raisonnons par contraposée et supposons K non borné. On a alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \in K,\ \|k\| > n$, d'où (par l'axiome du choix) une suite $k \in K^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \|k_n\| > n$. Vu alors la tendance $\|k_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, on a pour chaque extractrice x la tendance $\left\|k_{x(n)}\right\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, donc aucune sous-suite de k n'est bornée – *a fortiori* ne peut converger.

Exemples

1. Pour chaque $e \in E$, chaque suite à valeurs dans le singleton $\{e\}$ est constante et tend vers e, donc admet une sous-suite (elle-même) tendant vers un point de $\{e\}$. Par conséquent,

   chaque singleton est compact.

   Sanity check : chaque singleton de E est fermé et borné.

2. Si E est nul, il est alors compact en tant que singleton, sinon il n'est pas borné, *a fortiori* non compact d'après la propriété précédente. Par conséquent :

   la partie pleine E n'est pas compacte (sauf si E est nul).

   Plus généralement, aucun sous-espace vectoriel de E n'étant borné (sauf cas trivial),

   aucun sous-espace vectoriel de E n'est compact (sauf le sous-espace vectoriel nul).

3. Vu d'une part la validité de chaque énoncé de la forme $\forall a \in \emptyset,\ \cdots$ (tautologique), d'autre part l'égalité $\emptyset^{\mathbb{N}} = \emptyset$,

   la partie vide $\emptyset$ est compacte.

   Sanity check : la partie vide est fermée et bornée.

4. Pour chaque naturel $n \geq 2$, le groupe spécial linéaire $SL_n(\mathbb{K})$ n'est pas borné (il contient la transvection $I_n + \lambda E_{1,2}$ pour chaque scalaire λ), donc n'est pas compact.

[93] Les compacts (en allemand ***K**ompakt*) sont traditionnellement notés avec la lettre K, la lettre C étant plutôt réservée aux **c**onvexes (malgré la graphie allemande).

5. On impose que E soit l'espace vectoriel des suites scalaires bornées muni de la norme uniforme. Lorsque A est formée des suites resp. stationnant à 0, tendant vers 0, convergentes, périodiques, elle n'est pas compacte en tant que sous-espace vectoriel strict. Lorsque A est formée des suites dont 0 est une valeur d'adhérence. (resp. croissant strictement), elle contient la suite $(\lambda, 0, 0, 0, ...)$ (resp. $n \mapsto \frac{-|\lambda|}{n+1}$) pour chaque scalaire λ, donc n'est pas bornée, *a fortiori* n'est pas compacte.
6. Les segments réels sont compacts[94] d'après le théorème de Bolzano-Weiertrass vu en première année. En d'autres termes :

   chaque boule fermée $\underline{\underline{\text{de } \mathbb{R}}}$ *est compacte.*

   Rappelons une preuve expéditive de ce théorème. Chaque suite bornée monotone convergeant, il suffit d'établir le lemme suivant :

   de chaque suite réelle on peut extraire une suite monotone.

   Soit donc a une suite réelle. Si l'ensemble

   $$I := \{i \in \mathbb{N} \; ; \; \forall n \in \left]i, \infty\right|\left[, \; a_n \geq a_i\right\}$$

   est infini, mettons $I = \{i_0 < i_1 < i_2 < \cdots\}$ pour une certaine suite $i \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, la sous-suite $(a_{i_n})_{n \in \mathbb{N}}$ croît alors. Sinon, l'entier $M := 1 + \max I$ fait sens et l'on a alors pour chaque naturel $i \geq M$ la non-appartenance $i \notin I$, laquelle s'écrit $\exists n \in \left]i, \infty\right|\left[, \; a_n < a_i\right.$, ce qui donne sens à l'application

   $$f := \begin{cases} [M, \infty|[& \longrightarrow & [M, \infty|[\\ i & \longmapsto & \min\{n \in]i, \infty|[\; ; \; a_n < a_i\} \end{cases}$$

   dont l'itération fournit une extraction livrant une sous-suite $\left(a_{f^{\circ n}(M)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante.
7. Nous verrons plus généralement (*cf.* section 3.3) que[95]

   si E est $\underline{\underline{\textit{de dimension finie}}}$*, alors chaque fermé borné de E est compact et chaque suite bornée à valeurs dans E admet une valeur d'adhérence.*

   (Le second point découle du premier, une telle suite prenant alors ses valeurs dans une boule fermée, *a fortiori* dans un compact.)
8. (plus difficile) Soit $a \in E^{\mathbb{N}}$ une suite convergente et soit une suite à valeurs dans $K := \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{\lim a\}$. Si cette suite atteint au moins un point de K une infinité de fois, on pourra alors en extraire une suite constante valant partout ce point, donc convergeant dans K, d'où une valeur d'adhérence dans K. Sinon, on peut (par un exercice classique de première année) en extraire une suite injective évitant n'importe quelle partie finie de K, en particulier évitant le point $\lim a$, laquelle sous-suite est alors la forme $\left(a_{i(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ où $i : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}$ est injective ; l'injectivité de i livrant la tendance $i \longrightarrow \infty$ (classique de première

[94] *Sanity check* : chaque segment réel est fermé et borné.
[95] La réciproque est valide, hors programme et sera établie à la section 3.3.

année), on obtient la tendance $a_{i(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lim a$, d'où une valeur d'adhérence dans K. Conclusion :

les termes et la limite de chaque suite convergente de $E^{\mathbb{N}}$ forment une partie compacte de E.

Sanity check : d'une part chaque suite convergente est bornée (et rajouter un point ne change pas le caractère borné), d'autre part les termes de la suite convergente considérée forment (d'après l'exercice ? ? ?chapEvn1) une partie dont l'adhérence vaut K, d'où le caracère fermé de ce dernier.

Remarque – **Culture hors programme**. La compacité se définit plus généralement en termes d'ouverts[96] : on parle alors de compacité *topologique* ou *au sens de Borel-Lebesgue*, à mettre en regard de la compacité *séquentielle* (définie ci-dessus en termes de suites) ou *au sens de Bolzano-Weierstrass*. Dans les espaces vectoriels normés (et même dans les espaces métriques), les deux notions coïncident mais ce ne sera plus le cas en topologie générale.

Apprécions la convenance de la définition topologique à l'aune de l'exemple 8 ci-dessus. Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts recouvrant K. Soit $\iota \in I$ tel que $\lim a \in O_\iota$: puisque $a \longrightarrow \lim a$, la suite a prend alors ses valeurs dans l'ouvert O_ι à partir d'un certain rang N. L'hypothèse livre alors $\forall n \in [0, N|]\,,\ \exists i \in I,\ a_n \in O_i$, d'où une partie *finie*[97] $\Phi \subset I$ telle que $\{a_n\}_{n\in[0,N|]} \subset \bigcup_{\varphi\in\Phi} O_\varphi$. La partie K est finalement recouverte par les ouverts O_i lorsque i décrit l'ensemble fini $\Phi \cup \{\iota\}$.

Proposition (convergence dans un compact)

Soit K un compact de E. Alors chaque suite à valeurs dans K converge ssi elle possède une unique valeur d'adhérence.

Démonstration

Le sens direct est immédiat, l'unique valeur d'adhérence étant alors la limite de la suite considérée.

Soit maintenant $a \in K^{\mathbb{N}}$ possédant une seule valeur d'adhérence, notée ℓ, et supposons par l'absurde que a ne tend pas vers ℓ. Il y a alors une extractrice x et un réel $r > 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ d\left(a_{x(n)}, \ell\right) > r$. D'une part, la suite $\left(a_{x(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ prend ses valeurs dans le compact K, donc possède une valeur d'adhérence, laquelle est aussi valeur d'adhérence de a (puisque $\left(a_{x(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de a), donc vaut ℓ, d'autre part la minoration $\inf_{n\in\mathbb{N}} d\left(a_{x(n)}, \ell\right) \geq r > 0$ empêche la tendance vers ℓ de chaque sous-suite de $\left(a_{x(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$: contradiction.

Proposition (théorème de Heine[98]) (compacité et continuité uniforme)

Imposons A compacte. Chaque application continue sur A y est alors uniformément continue.

[96] *Culture hors programme* : la partie A est compacte ssi de chaque recouvrement de A par une famille d'ouverts on peut extraire un recouvrement *fini*.

[97] Φ comme « **fi**nie »

[98] *Culture historique* : ce théorème a été publié en 1872 par Eduard Heine dans le *Journal de Crelle*.

Démonstration

Imposons f continue et supposons-la par l'absurde non uniformément continue. Il y a alors[99] deux suites $a, b \in A^{\mathbb{N}}$ dont la différence tend vers 0 telles que la suite $(f(a_n) - f(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0. Cette non-tendance permet d'évoquer un réel $r > 0$ et une extractrice x tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left\|f\left(a_{x(n)}\right) - f\left(b_{x(n)}\right)\right\| > r$. Soient alors (par compacité de A) une extractrice y et un point $\alpha \in A$ tels que $a_{x(y(n))} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$. La tendance $a - b \longrightarrow 0$ livre alors celle $b_{x(y(n))} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$, d'où (par continuité de f en α) la tendance $f\left(a_{x(y(n))}\right) - f\left(b_{x(y(n))}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(\alpha) - f(\alpha) = 0$, ce qu'interdisent les comparaisons $\left\|f\left(a_{x(n)}\right) - f\left(b_{x(n)}\right)\right\| > r$.

Autre preuve (hors programme) : soit $\varepsilon > 0$ et définissons

$$\mathcal{O} := \left\{O \text{ ouvert}\,;\, \forall o, \omega \in O \cap A,\ \|f(o) - f(\omega)\| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Pour chaque $a \in A$, la continuité de f en a livre alors un réel $\delta > 0$ tel que[100] $\mathring{\mathcal{B}}(a, \delta) \in \mathcal{O}$, d'où l'inclusion $A \subset \bigcup_{O\in\mathcal{O}} O$. La compacité de A livre alors une partie *finie* $\Phi \subset \mathcal{O}$ telle que $A \subset \bigcup_{O\in\Phi} O$, donnant ainsi sens au réel[101]

$$\delta := \min\left[\{d(O, \Omega)\}_{\overline{O}\cap\overline{\Omega}=\emptyset}^{O,\Omega\in\Phi} \cup \{1\}\right] > 0.$$

Soient enfin $a, \alpha \in A$ tels que $\|a - \alpha\| < \delta$ et soient $O, \Omega \in \Phi$ tels que $(a, \alpha) \in O \times \Omega$: la définition de δ permet alors d'évoquer un $i \in \overline{O} \cap \overline{\Omega}$, d'où la conclusion[102]

$$\|f(a) - f(\alpha)\| \leq \|f(a) - f(i)\| + \|f(i) - f(\alpha)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Remarque – **Réciproque (hors programme)**. On montrera aisément l'uniforme continuité de f si l'on peut minorer $\inf_{a\neq b}^{a,b\in A} d(a, b) > 0$ (la partie A est alors dite ***écartelée***[103]). *Modulo* ce dernier cas peu intéressant, le théorème de Heine *caractérise* les compacts au sens où *chaque application continue sur A y est uniformément continue ssi A est réunion d'un compact et d'un écartelé.*

Exercices d'application

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer alors la compacité des groupes orthogonal $\mathcal{O}_n$ et spécial orthogonal $\mathcal{SO}_n$.*
2. *Imposons f d'image compacte et de graphe fermé. Montrer alors la continuité de f.*

[99] Par le critère séquentiel de continuité uniforme, *cf.* exercice 2a section2.2.

[100] Évoquer δ convenant pour $\frac{\varepsilon}{4}$ et majorer $\|f(o) - f(\omega)\|$ par $\|f(o) - f(a)\| + \|f(a) - f(\omega)\|$.

[101] *Rappel* : on a l'équivalence $d(O, \Omega) > 0 \iff \overline{O} \cap \overline{\Omega} = \emptyset$ pour toutes parties $O, \Omega \subset E$ (le singleton $\{1\}$ n'est là que pour garantir la finitude de δ dans le cas où chaque $O \in \Phi$ rencontre chaque $\Omega \in \Phi$).

[102] Les appartenances $a, i \in \overline{O}$ et la continuité de f livrent la majoration $\|f(a) - f(i)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (*idem* pour $\alpha, i \in \overline{\Omega}$).

[103] Chaque $\delta < \inf_{a\neq b}^{a,b\in A} d(a, b)$ convient alors, indépendamment du $\varepsilon > 0$ évoqué.

3. *Montrer que la distance de chaque compact de E à chaque fermé de E est nulle ssi ces deux parties se rencontrent.*
4. *Soit S un segment réel infini et imposons $E = \mathcal{B}(S, \mathbb{K})$ (muni de la norme uniforme). Montrer alors que sa sphère unité n'est pas compacte.*
5.
   (a) *Soient $K \subset E$ un compact et $r > 0$ un réel. Montrer alors que l'on peut recouvrir K par un nombre fini de boules de rayon r. On pourra admettre l'existence d'une application*[104] *$c : \mathfrak{P}(K) \longrightarrow K$ telle que $c(P) \in P$ pour chaque partie $P \subset K$ non vide.*

   (b) *Soit K un compact de $C(A, F)$ muni de la norme uniforme. Montrer alors l'énoncé*

$$\begin{array}{c}\forall \varepsilon > 0 \\ \forall a \in A\end{array}, \ \exists V \text{ voisinage de } a \text{ dans } A, \ \begin{array}{c}\forall v, w \in V \\ \forall f \in K\end{array}, \ \|f(v) - f(w)\| < \varepsilon.$$

---

1. L'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$ étant de dimension finie, il s'agit d'établir les caractères fermé et borné de $\mathcal{O}_n$ et $\mathcal{SO}_n$. Puisque $\mathcal{SO}_n$ est l'intersection de $\mathcal{O}_n$ avec le fermé $SL_n(\mathbb{R})$, il suffit de montrer que $\mathcal{O}_n$ est un fermé borné. Or d'une part la transposition et la multiplication de $M_n(\mathbb{R})$ sont continues, donc $\mathcal{O}_n$ est fermé comme image réciproque du fermé $\{I_n\}$ par la composée continue $a \mapsto a\,{}^t a$, d'autre part, à $o \in \mathcal{O}_n$ fixé, chaque colonne de o est de norme 1 (pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$) car $n > 0$, donc o est de norme euclidienne $\sqrt{n}$, ce qui montre que $\mathcal{O}_n$ est borné (car inclus dans une sphère).
   Sanity checks : on retrouve la compacité de la paire $\mathcal{O}_1 = \{-1, 1\}$.
2. Soit $a \in A^{\mathbb{N}}$ convergente. On veut alors montrer la convergence de la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui revient (par compacité de $\operatorname{Im} f$) à montrer qu'elle admet au plus une valeur d'adhérence. Soient donc x une extractrice et $\ell \in f(A)$ tels que $f\left(a_{x(n)}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$. La suite $\left(\begin{smallmatrix} a_{x(n)} \\ f\left(a_{x(n)}\right)\end{smallmatrix}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors à valeurs dans le graphe de f et tend vers $\binom{\alpha}{\ell}$, d'où (puisque ce graphe est fermé) l'égalité $\ell = f(\alpha)$, ce qui conclut (la seule valeur d'adhérence possible est $f(\alpha)$).
   Remarque – Cet exercice est une réciproque de l'exemple 8 section 2.1 sous une hypothèse de compacité, laquelle est en général nécessaire : l'inversion de $\mathbb{R}^*$ prolongée par $0 \mapsto 0$ a un graphe fermé mais n'est pas continue.
3. Soient $K \subset E$ un compact et $C \subset E$ un fermé, notons δ la distance $\inf_{k\in K}^{c\in C} d(k, c)$. Si K et C se rencontrent, mettons en un certain point a, on a alors la minoration $\delta \leq d(a, a) = 0$ et la conclusion $\delta = 0$. Supposons réciproquement $\delta = 0$. Le compact K n'est alors pas vide (sinon la distance δ serait infinie), donc la restriction à K de l'application continue "distance à C" atteint sa borne inférieure en un certain $a \in K$. La nullité de la distance $\delta = d(a, C)$ et le caractère fermée de C livrent alors l'appartenance $a \in C$, ce qui montre que K et C ne sont pas disjoints.

[104] Un tel c est appelé une ***application de choix*** sur K car elle nous permet de "choisir" un élément dans chaque partie (non vide) de K : il suffit pour cela d'appliquer l'application de choix c sur une telle partie.

4. Notons[105] $\delta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application $t \mapsto \max\{0, 1 - |1 - 2t|\}$, soit $s \in S^{\mathbb{N}}$ croissant strictement et, pour chaque naturel n notons $\delta_n := t \mapsto \delta\left(\frac{t - s_n}{s_{n+1} - s_n}\right)$

FIG

laquelle est nulle en dehors de $[s_n, s_{n+1}]$ (car δ est nulle en dehors de $[0, 1]$) et appartient à la sphère unité de E vu

les majorations $|\delta_n| \leq \max|\delta| = 1$ et les égalités $\delta_n\left(\frac{s_n + s_{n+1}}{2}\right) = \delta\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$

On a alors pour chaques naturels $p \neq q$ les minorations

$$\|\delta_p - \delta_q\| \geq |\delta_p - \delta_q|\left(\frac{s_p + s_{p+1}}{2}\right) \overset{\frac{s_p + s_{p+1}}{2} \notin [s_q, s_{q+1}]}{=} \left|\delta\left(\frac{1}{2}\right) - 0\right| = 1,$$

ce qui montre que la suite $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne possède aucune valeur d'adhérence, d'où la non-compacité voulue.

Remarque – On montrerait de même à l'aide de la suite $\left(t \mapsto e^{nit}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ que la boule unité de $C([0, 2\pi], \mathbb{C})$ muni de la norme d'indice 2 n'est pas compacte. Ce sont deux applications du théorème de Riesz (*cf.* exercice 1c section 3.3).

5.

(a) Raisonnons par l'absurde et soit $r > 0$ tel qu'aucune famille finie de boules de rayon r ne recouvre K. Soit c une application de choix sur K (livrée par l'énoncé). On définit alors une suite $k \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ par la récurrence[106]

$$\forall n \in \mathbb{N},\ k_n = c\left(K \Bigg\backslash \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathring{\mathcal{B}}(k_i, r)\right).$$

Par compacité de K, la suite k admet une valeur d'adhérence, d'où deux naturels $p < q$ tels que $\|k_q - k_p\| < r$, *i. e.* tels que $k_q \in \mathring{\mathcal{B}}(k_p, r)$. Vu la majoration $p \leq q - 1$ entre entiers, on a alors l'appartenance $k_q \in \bigcup_{i=1}^{q-1} \mathring{\mathcal{B}}(k_i, r)$; or, par définition de la suite k, le terme k_q tombe dans $K \Big\backslash \bigcup_{i=1}^{q-1} \mathring{\mathcal{B}}(k_i, r)$, d'où la contradiction.

Autre solution (expéditive, hors programme) : extraire du recouvrement $K \subset \bigcup_{k \in K} \mathring{\mathcal{B}}(k, r)$ un recouvrement fini.

Remarque – La propriété montrée sur K s'appelle sa ***précompacité***. Nous venons ainsi de montrer que chaque compact est précompact. On pourrait (hors programme) montrer que A est précompacte ssi de chaque suite à valeurs dans A on peut extraire une suite de Cauchy, d'où l'équivalence entre les caractères *compact* d'une part et *complet et précompact* d'autre part.

[105] δ comme « **Dirac** », les applications δ_n étant des analogues continus des Dirac séquentiels.

[106] L'argument de c est bien non vide par hypothèse sur r. Observer en particulier la valeur du premier terme $k_0 = c(K)$.

(b) Soient $\varepsilon > 0$ et $a \in A$. D'après la question précédente, on peut évoquer un ensemble fini I et une famille $k \in K^I$ tel que $\bigcup_{i\in I} \mathring{\mathcal{B}}(k_i, \varepsilon) \subset K$. En notant alors $\kappa := \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & K^I \\ \alpha & \longmapsto & (k_i(\alpha))_{i\in I} \end{array} \right.$, l'application κ est continue par continuité de chaque application "coordonnée" de la famille k, donc on peut évoquer un voisinage V de a tel que $\forall v, w \in V,\ \|\kappa(v) - \kappa(w)\| < \varepsilon$. Soit enfin $f \in K$ et soit $i \in I$ tel que $f \in \mathring{\mathcal{B}}(k_i, \varepsilon)$: on peut alors pour chaques $v, w \in V$ majorer

$$\|f(v) - f(w)\| \leq \underbrace{\|f(v) - k_i(v)\|}_{\leq \|f - k_i\| < \varepsilon} + \underbrace{\|k_i(v) - k_i(w)\|}_{\leq \|\kappa(v) - \kappa(w)\| < \varepsilon} + \underbrace{\|k_i(w) - f(w)\|}_{\leq \|k_i - f\| < \varepsilon} < 3\varepsilon,$$

ce qui conclut (quitte à diviser rétrospectivement ε par 3).

Remarque – **Culture hors programme**. La propriété établie sur la famille $(k)_{k\in K}$ s'appelle son ***équicontinuité***[107]. Par exemple, sont équicontinues à $L > 0$ fixé chaque famille d'applications L-lipschitziennes et à $\mathcal{E}$ fixé chaque suite de $\mathcal{B}(\mathcal{E}, \mathbb{K})$ convergente. Le résultat prouvé admet une réciproque attribuée à Giulio Ascoli (1883, *Lincei*) et à son collègue Cesare Arzelà (1893, *Bologna*).

3.2 Propriétés

Propriétés (stabilité de la compacité)

1. *Chaque fermé relatif de chaque compact est compact.*
2. *Chaque union finie de compacts est compacte.*
3. *Chaque produit cartésien (fini) de compacts est compact.*
4. *Chaque image continue*[108] *de chaque compact est compacte.*

Démonstration Soit K un compact de E.

1. Soit C un fermé relatif de K et soit $c \in C^{\mathbb{N}}$. La suite c est alors à valeurs dans le compact K et l'on peut donc évoquer une extractrice x telle que la suite $\left(c_{x(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans K. Cette suite prenant ses valeurs dans le fermé relatif C, sa limite reste dans C, *c. q. f. d.*
2. On raisonne comme pour les fermés. Il suffit par récurrence de montrer que la réunion de deux compacts reste compacte. Soit donc L un compact de E et soit a une suite à valeurs dans $K \cup L$. Puisque la réunion $a^{-1}(K) \cup a^{-1}(L) = a^{-1}(K \cup L) = \mathbb{N}$ est infinie, l'une des deux parties $a^{-1}(K)$ ou $a^{-1}(L)$ de $\mathbb{N}$ est infinie, mettons $a^{-1}(K)$, d'où une sous-suite à valeurs dans K, de laquelle on extrait (par compacité de K) une sous-suite convergente dans $K \subset K \cup L$.

[107] L'équicontinuité implique l'énoncé obtenu en intervertissant les quantificateurs $\exists V$ et $\forall f$, lequel énonce la continuité de chaque $f \in K$, d'où la terminologie : le *même* voisinage V pour chaque $f \in K$.
[108] Par « image continue » on entend « image directe par une application continue ».

3. Il suffit par récurrence de traiter le cas d'un produit de *deux* compacts. Soit donc L un compact, soit $a \in (K \times L)^{\mathbb{N}}$ et notons[109] $\binom{k}{\ell} \in K^{\mathbb{N}} \times L^{\mathbb{N}}$ les suites "coordonnées" de a. On extrait alors (par compacité de K) une suite $\left(k_{x(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente dans K, puis on extrait (par compacité de L) de $\left(\ell_{x(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $\left(\ell_{x(y(n))}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente dans L. La sous-suite $\left(a_{x(y(n))}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend alors vers $\binom{\lim_{n\to\infty} k_{x(n)}}{\lim_{n\to\infty} \ell_{x(y(n))}}$, donc converge dans $K \times L$.

4. Imposons $A = K$ et f continue, soit $\ell \in f(K)^{\mathbb{N}}$. On a alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \in K,\ \ell_n = f(k)$, d'où (*via* l'axiome du choix) une suite $k \in K^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ell_n = f(k_n)$. On extrait alors une suite $\left(k_{x(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers un certain $\kappa \in K$, d'où (par continuité de f en κ) la tendance $\ell_{x(n)} = f\left(k_{x(n)}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(\kappa)$ et l'appartenance $\lim \ell \in f(K)$.

Remarques

• Le point 2 est *faux* pour une réunion *infinie* : la réunion $]0,1]$ des compacts $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ lorsque n décrit $\mathbb{N}^*$ n'est pas fermée, *a fortiori* non compacte.

• *Culture hors programme* : que devient le point 3 pour un produit *in*fini ? D'une part il s'agirait avant tout de définir une topologie sur un tel produit (ce qui n'est vraiment pas un attendu des concours), d'autre part un théorème publié en 1930 par Andrey Nikolayevich Tykhonov affirme que ce point reste valide. La démonstration de ce théorème *nécessite* toutefois l'axiome du choix, au sens où ce dernier *équivaut*[110] à la compacité de chaque produit de compacts (au sens de Borel-Lebesgue).

• **Extraction diagonale**. Notre preuve du point 3 contient une idée qui, bien qu'originellement tournée vers la topologie des produits *infinis* d'espaces vectoriels normés (hors programme), peut se rencontrer dans la préparation des concours (*cf.* exercice d'entraînement 7). Soit $({}^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'extractions et pour chaque naturel n notons ${}^n X := {}^1 x \circ {}^2 x \circ \cdots \circ {}^n x$. La suite $\Delta := ({}^n X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une extractrice vu à $n \in \mathbb{N}$ fixé les minorations[111]

$$\Delta_{n+1} = {}^{n+1}X_{n+1} \underset{\text{de } {}^{n+1}X}{\overset{\text{définition}}{=}} \left[{}^n X \circ {}^{n+1}x\right]_{n+1} = {}^n X\left({}^{n+1}x\ (n+1)\right)$$
$$\underset{{}^{n+1}x \geq \mathrm{Id}}{\overset{{}^n X \text{ croît et}}{\geq}} {}^n X(n+1) \underset{\text{strictement}}{\overset{{}^n X \text{ croît}}{>}} {}^n X_n = \Delta_n.$$

On parle d'extraction *diagonale* car la suite Δ correspondant à la diagonale d'un tableau où la case d'indice (i,j) contient le terme ${}^i X_j$.

Exemples

1. Avec les compacités des singletons et des segments réels, le point 2 livre

les compacités de chaque ensemble fini de E
et de chaque réunion finie de segments réels.

[109] Rappelons l'isomorphisme canonique d'espaces vectoriels $\left\{\begin{array}{ccc} K^{\mathbb{N}} \times L^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\sim} & (K\times L)^{\mathbb{N}} \\ (k,l) & \longmapsto & \left((k_n, l_n)\right)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}\right.$.

[110] Cette équivalence a été prouvée 1950 par John L. Kelly et publiée dans la revue polonaise *Fundamenta Mathematicae*.

[111] *Rappel* : chaque extractrice x vérifie $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \geq n$.

2. Soit K un compact : son bord $\overline{K} \setminus \mathring{K}$ est alors d'une part fermé, d'autre part inclus dans l'adhérence $\overline{K} = K$ (chaque compact est fermé) qui est compacte, donc est fermé dans un compact. Par conséquent :

   la frontière de chaque compact est compacte.

3. Le disque unité de $\mathbb{C}$ étant l'image par l'application continue $(r, \theta) \mapsto re^{i\theta}$ du compact $[0,1] \times [-\pi, \pi]$, les points 3 et 4 livrent

   la compacité de la boule unité fermée de $\mathbb{C}$ (muni du module complexe).

4. Chaque boule fermée étant l'image continue de la boule unité fermée par une homothétie puis une translation, l'exemple 3 et le point 4 fournissent

   la compacité de chaque boule fermée de $\mathbb{K}$ (muni du module complexe).

5. Nous avons vu, lorsque E est un espace vectoriel normé produit, que ses boules sont les produits de boules de ses facteurs. En particulier, lorsque $E = \mathbb{K}^\Phi$ pour un certain ensemble *fini* Φ, l'exemple 4 et le point 3 livrent la compacité des boules fermées de $\mathbb{K}^\Phi$. Chaque sphère de E étant par ailleurs le bord d'une boule fermée (donc d'un compact), l'exemple 2 donne

   la compacité des boules fermées et sphères de $\mathbb{K}^\Phi$ (pour la norme uniforme).

Application : montrons que *la sphère de E est compacte ssi sa boule unité fermée l'est.*

Notons $\mathbb{S}$ et $\mathbb{B}$ les sphère et boule considérées. La sphère $\mathbb{S}$ étant la frontière de $\mathbb{B}$, la compacité de $\mathbb{B}$ implique celle de $\mathbb{S}$ d'après l'exemple 2. Réciproquement, si $\mathbb{S}$ est compacte, le produit $[0,1] \times \mathbb{S}$ est alors compact (comme produit fini de compacts), donc son image par l'application continue $(\lambda, s) \mapsto \lambda s$ est compacte ; or cette image vaut $\mathbb{B}$, ce qui conclut.

Proposition (compacité & extrémalité)

Si A est compacte et f continue, l'application f est alors bornée.

Si en outre A est non vide et f est à valeurs réelles, l'application f atteint alors ses bornes[112].

Démonstration

Imposons A compacte et f continue. L'image $f(A)$ est alors compacte (d'après une propriété précédente), donc est bornée.

Imposons de plus A non vide et f réelle. La partie $f(A) \subset \mathbb{R}$ est alors un fermé borné (car compact) non vide (car $A \neq \emptyset$), donc sa borne supérieure fait sens et lui appartient, ce qui s'écrit $\exists a \in A,\ f(a) = \sup_A f$. On prouverait de même que $\inf_A f$ est atteint.

Remarques

[112] Cette propriété est essentielle ! Elle caractérise même (hors programme) les compacts non vides.

• Soit f une application bornée de source E à valeurs dans un espace vectoriel normé. On dit parfois que f ***atteint ses bornes*** pour dire que l'application positive $\|f\|$ atteint les siennes. Avec ce vocabulaire, la proposition précédente se reformule[113] :

$\boxed{\textit{chaque application continue sur chaque compact non vide y atteint ses bornes}}$.

• **Compact ou extrémal ? (hors programme)** La proposition précédente est *vitale* : sa conclusion se révèle très prolifique en analyse et est à ce titre très désirable. C'est pourquoi elle aurait pu être prise comme *définition* des compacts, comme le faisait Fréchet en 1906 dans sa thèse lorsqu'il qualifiait d'*extrémales* les parties compactes. On pourrait de fait montrer que, si chaque application continue sur A est bornée, alors A est compact (le gros du travail a déjà été effectué à l'application en fin de section 2.2).

Exemples

1. Soient K et L deux compacts non vides de E. L'application $(a, b) \mapsto a - b$ est alors 1-lipschitzienne sur E^2 (à détailler), *a fortiori* continue, donc atteint sa borne inférieure sur le compact $K \times L$. En particulier, quand L est un singleton, nous venons de montrer que

   la distance de chaque point à chaque compact est atteinte.

2. Soient $O \subset E$ un ouvert et $K \subset O$ un compact. Montrons alors, en abrégeant $\mathbb{B} := \mathring{\mathcal{B}}(0, 1)$, qu'il y a un réel $r > 0$ tel que[114] $K \subset K + r\mathbb{B} \subset O$.

   FIG

   Appelons r la distance du compact K au fermé $E \setminus O$: ces deux parties ne se rencontrant pas, l'exercice 3 section 3.1 montre la minoration $r > 0$. Si l'ouvert O ne incluait pas $K + r\mathbb{B}$, il y aurait alors un couple $(k, b) \in K \times \mathbb{B}$ tel que $k + rb \notin O$, d'où les majorations $r \leq d(k, k + rb) = \|rb\| < r$: contradiction.

3. *Sanity check* : retrouvons le théorème de Heine. Imposons A compacte et f continue. Soit $\varepsilon > 0$. La partie $P := \left\{(a, b) \in A^2 \;;\; \|f(a) - f(b)\| \geq \varepsilon\right\}$ est alors fermée (par continuité de f) dans le compact $A \times A$, donc est compacte. Le réel $\delta := \inf_{(a,b)\in P} \|a - b\|$ est par conséquent atteint en un certain $(\alpha, \beta) \in P$ et est non nul vu les implications

   $$\delta = 0 \Longrightarrow \|\alpha - \beta\| = 0 \Longrightarrow \alpha = \beta \overset{(\alpha,\beta)\in P}{\Longrightarrow} \varepsilon \leq \|f(\alpha) - f(\beta)\| = 0.$$

   Chaque couple $(a, b) \in A^2$ tel que $\|a - b\| < \delta$ ne peut alors appartenir[115] à P, donc vérifie $\|f(a) - f(b)\| < \varepsilon$, ce qui conclut.

Exercices d'application

[113] Bien vérifier la cohérence de cette terminologie avec le cas des applications réelles.
[114] *Culture* : la partie $K + r\mathbb{B}$ s'appelle le ***r-voisinage*** de K.
[115] On aurait sinon les comparaisons $\|a - b\| \leq \inf_{(u,v)\in P} \|u - v\| = \delta$.

1.

   (a) *Montrer que la somme (finie) de chaques compacts de E reste compacte.*

   (b) *Montrer que la somme de chaque fermé de E et de chaque compact de E reste fermée. Cette somme est-elle compacte ?*

   (c) *Donner une condition nécessaire et suffisante simple pour que la somme de chaque fermé borné de E et de chaque compact de E reste compacte. (On pourra admettre que la sphère unité de E est compacte ssi E est de dimension finie.)*

2.

   (a) *Imposons f continue injective et A compacte. Montrer alors que f induit une bijection $A \widetilde{\longrightarrow} f(A)$ continue de réciproque continue*[116].

   (b) *La conclusion tient-elle en remplaçant l'hypothèse « A compacte » par « $f(A)$ compacte » ?*

3. *Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts de E. Montrer alors que l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est compacte et non vide*[117] *(sauf cas pathologique à préciser).*

4. *Imposons d'une part A compacte non vide et stable par f, d'autre part f continue et telle que*

$$\forall a, b \in A,\ a \neq b \Longrightarrow \|f(a) - f(b)\| < \|a - b\|.$$

   On note alors $A_n := f^{\circ n}(A)$ pour chaque naturel n puis l'on définit $K := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

   (a) *Montrer que f admet un unique point fixe.*

   (b) *Montrer que K est un compact non vide fixé par l'application $P \mapsto f(P)$.*

   (c) *En déduire que K est un singleton.*

   (d) *Montrer que, pour chaque $a \in A$, la suite définie par itération de f avec départ a tend vers le point fixe de f.*

1.

   (a) Soit $(K_i)_{i\in I}$ une famille finie de compacts de E. La somme $\sum_{i\in I} K_i$ est alors l'image du compact $\prod_{i\in I} K_i$ par l'application continue $\left\{\begin{array}{ccc} E^I & \longrightarrow & E \\ (a_i) & \longmapsto & \sum_{i\in I} a_i \end{array}\right.$ (addition de E), donc est compacte.

   (b) Soit C un fermé de E, soit K un compact de E, soient $a \in (C+K)^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$ tels que $a \longrightarrow \ell$. On a alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists (c,k) \in C \times K,\ a_n = c + k$, d'où (*via* l'axiome du choix et l'identification $(C \times K)^{\mathbb{N}} \simeq C^{\mathbb{N}} \times K^{\mathbb{N}}$) un couple de suites $\binom{c}{k} \in C^{\mathbb{N}} \times K^{\mathbb{N}}$ telles que $a = c + k$. Par compacité de K,

[116] *Culture* : une telle application bijective est dite ***bicontinue*** et s'appelle aussi un ***homéomorphisme***.

[117] Ce résultat s'appelle le **théorème des compacts emboîtés** et généralise celui des segments emboîtés.

il y a une extractrice x et un $\kappa \in K$ tels que $k_{x(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \kappa$. La suite $c \circ x = a \circ x - k \circ x$ tend alors vers $\ell - \kappa$ et prend ses valeurs dans le fermé C, donc la limite $\ell - \kappa$ reste dans C, d'où l'appartenance $\ell \in C + \kappa \subset C + K$, *c. q. f. d.*.

Lorsque C n'est pas borné et K est non vide, la somme $C + K$ n'est pas bornée, donc non compacte. (Le cas où C est fermé *et borné* est traité à la question suivante.)

Remarque – Nous avons déjà vu (exo ent 4 evn1 ? ? ?) que la somme de fermés n'était pas toujours fermée.

(c) Soit C un fermé borné de E et soit K un compact de E. Quand E est de dimension finie, C est alors compact et la somme de compacts $C + K$ reste compacte d'après la question 1a. En revanche, si E n'est pas de dimension finie, sa sphère unité n'est pas compacte d'après le théorème de Riesz (admis), donc sa somme avec le compact $\{0\}$ n'est pas compacte. Finalement, une condition nécessaire et suffisante simple comme voulu est « E est de dimension finie ».

2.

(a) Notons $g : f(A) \longrightarrow A$ la réciproque de f. Il s'agit de montrer la continuité de g. Soit donc C un fermé de A, *i. e.* (par compacité de A) un compact de A : l'image réciproque $f(C)$ de C par g est alors compacte comme image continue (par f) du compact C, donc est fermée, ce qui conclut.

Remarque – Le préfixe *homéo* signifie *semblable* et est plus lâche que *homo* ou *iso* (signifiant *même* ou *égal*). C'est sans doute cette nuance qui a amené les topologues à parler d'hom*é*omorphismes au lieu d'homo- ou d'isomorphismes d'espaces topologiques. Par exemple, une tasse et un doughnut n'ont pas du tout la même forme, donc sont littéralement non homomorphes mais sont pourtant homéomorphes au sens topologique.

(b) Lorsque $f = \left\{ \begin{array}{ccc} [-\pi, \pi[& \widetilde{\longrightarrow} & \mathbb{U} \\ t & \longmapsto & e^{it} \end{array} \right.$, l'image $\operatorname{Im} f = \mathbb{U}$ est compacte, l'application f est continue et bijective mais sa réciproque g n'est pas continue[118] car l'image $[-\pi, \pi[$ par g du compact $\mathbb{U}$ n'est pas compacte (elle n'est pas fermée).

3. Le compact K_n étant fermé pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est fermée dans le compact K_0, donc est compacte. Étant par ailleurs incluse dans K_N pour chaque naturel N, elle sera vide si la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend une valeur vide, *i. e.* (par décroissance) si elle stationne à $\emptyset$: voici notre cas pathologique.

Excluons à présent ce dernier, ce qui s'écrit $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \in E,\ k \in K_n$. L'axiome du choix permet alors d'évoquer une suite $k \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ k_n \in K_n$. Vu à $n \in \mathbb{N}$ fixé l'inclusion $K_n \subset K_0$, la suite k prend ses valeurs dans le compact K_0 et admet donc une valeur d'adhérence ℓ. Or, pour chaque naturel N, les inclusions $\forall n \in]N, \infty|[\,,\ K_n \subset K_N$ montrent que la suite $(k_n)_{n>N}$ prend ses valeurs dans le fermé K_N ; cette suite admettant par ailleurs ℓ comme

[118] On peut aussi nier le critère séquentiel de continuité à l'aide des deux suites $\left(\pm e^{-\frac{i}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

valeur d'adhérence, cette limite reste dans K_N. L'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ contient par conséquent ℓ, ce qui conclut.

Autre solution (hors programme) : quand l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est vide, le compact $K_0 \subset E$ peut être recouvert par les ouverts $O_n := E \backslash K_n$ (complémentaire du fermé K_n) lorsque n décrit $\mathbb{N}$, donc (par compacité de K_0) est recouvert par un nombre *fini* d'entre eux, d'où (par croissance de la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$) un naturel N tel que $K_0 \subset E \backslash K_N$ et la conclusion $K_N = K_0 \cap K_N = \emptyset$.

4.

(a) L'application $f - \mathrm{Id}$ étant continue, elle atteint sa borne inférieure sur le compact A en un certain point[119] κ : si ce dernier n'était pas fixe par f, on aurait en notant $\kappa' := f(\kappa)$ les majorations

$$\begin{aligned} &\|f(\kappa') - f(\kappa)\| \overset{\kappa\neq\kappa'}{<} \|\kappa' - \kappa\| = \|f(\kappa) - \kappa\|, \\ &\text{d'où } \|f(\kappa') - \kappa'\| < \inf_{a\in A} \|f(a) - a\|, \end{aligned}$$

ce qui est absurde vu l'appartenance $f(\kappa) \in A$.

Soit par ailleurs $a \in A$ fixe par f. On a alors l'égalité $\|f(a) - f(\kappa)\| = \|a - \kappa\|$, donc l'implication $a \neq \kappa \Longrightarrow \|f(a) - f(\kappa)\| < \|a - \kappa\|$ livre par contraposée l'égalité $a = \kappa$.

REMARQUE – **Culture hors programme**. La compacité intervient souvent dans les théorèmes d'existence de point fixes. Citons celui célèbre publié en 1912 par Luitzen Egbertus Jan BROUWER[120] dans les *Mathematische Annalen* ainsi qu'une généralisation publiée en 1930 par Juliusz SCHAUDER[121] dans la revue *Studia Mathematica*, laquelle livre l'existence de solutions à certaines équations différentielles très générales (*cf.* un théorème de Giuseppe PEANO publié en 1880 dans les *Mathematische Annalen*).

(b) À $n \in \mathbb{N}$ fixé, d'une part la partie A_n est compacte en tant qu'image du compact A par l'application continue $f^{\circ n}$, d'autre part appliquer $f^{\circ n}$ à l'inclusion $f(A) \subset A$ (laquelle traduit l'hypothèse « A stable par f ») livre l'inclusion $A_{n+1} \subset A_n$. La suite $(A_N)_{N\in\mathbb{N}}$ décroissante de compacts est par conséquent (et d'après la question 3) d'intersection K compacte.

FIG : "contraction" vers un singleton

On a déjà les inclusions

$$f(K) = f\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(A_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{n+1} \underset{m:=n+1}{\overset{\text{reparamétrage}}{=}} \bigcap_{m\in\mathbb{N}^*} A_m \subset K.$$

Montrons à présent l'inclusion $K \subset f(K)$. Soit $k \in K$, ce qui s'écrit $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists a \in A$, $\left\{ \begin{array}{c} k = f(a) \\ a \in A_n \end{array} \right.$: l'axiome du choix donne alors une suite $a \in A^{\mathbb{N}}$

[119] Nous prouverons l'égalité $\{\kappa\} = K$, d'où la notation κ.

[120] Si E est de dimension finie, chaque application continue de la boule unité fermée de E dans elle-même admet alors un point fixe.

[121] Chaque application continue sur chaque compact convexe non vide de E dans lui-même admet un point fixe.

telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} k = f(a_n) \\ a_n \in A_n \end{cases}$, d'où (par compacité de A) une extractrice x et un point $\alpha \in A$ tels que $a_{x(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$. La continuité de f livre alors la tendance $f\left(a_{x(n)}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(\alpha)$, ce qui s'écrit $k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(\alpha)$, ou encore $k = f(\alpha)$ et l'on montre par ailleurs (comme à la question 3) que la limite α reste dans K, ce qui conclut à l'appartenance $k \in f(K)$.

(c) Montrons l'égalité $K = \{\kappa\}$. Soit $k \in K$. L'application $(a,b) \mapsto d(a,b)$ étant continue sur le compact K^2, elle atteint son maximum en un certain couple $(\alpha,\beta) \in K^2$. L'inclusion $K \subset f(K)$ montrée à la question 4b) livre alors deux points $a, b \in K$ tels que $\binom{\alpha}{\beta} = \binom{f(a)}{f(b)}$: si ces points étaient distincts, l'hypothèse livrerait alors les majorations

$$\sup_{u,v\in K} d(u,v) = \|\alpha - \beta\| = \|f(a) - f(b)\| \overset{a\neq b}{<} d(a,b),$$

d'où la contradiction puisque $a, b \in K$. Il en résulte les majorations

$$d(\kappa,k) \leq \sup_{u,v\in K} d(u,v) = \|f(a) - f(b)\| \overset{a=b}{=} 0,$$

d'où $d(\kappa,k) = 0$, *c. q. f. d.*

(d) Soit $a \in A$ et notons i la suite de ses itérés par f. Si l'on montre la convergence de i, vu les appartenances $\forall n \in \mathbb{N},\ i_n \in A_n$, la limite tombera alors (comme à la question 3) dans l'intersection $K = \{\kappa\}$, ce qui conclura. Puisque i est à valeurs dans le compact A, il suffit de montrer qu'elle admet au plus une valeur d'adhérence : or, pour chaque extractrice x, la limite éventuelle de la suite $\left(i_{x(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tombe (toujours par le même argument) dans $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{x(n)} \subset K = \{\kappa\}$, ce qui conclut à l'unicité voulue.

Autre solution (esquissée) : si i atteint κ, c'est fini. Sinon la suite $\delta := n \mapsto d(i_n,\kappa)$ décroît strictement, donc tend vers $\inf \delta$, supposé non nul par l'absurde. Extraire $i_{x(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ livre alors $0 < \inf\delta = \lim_{n\to\infty} \left\|i_{x(n)} - \kappa\right\| = \|\ell - \kappa\|$ d'où $\ell \neq \kappa$ et $\left\|f\left(i_{x(n)}\right) - \kappa\right\| \underset{n\to\infty}{\overset{f \text{ continue}}{\longrightarrow}} \|f(\ell) - f(\kappa)\| < \|\ell - \kappa\|$, d'où l'absurde $\delta_{x(n)+1} < \inf\delta$ pour n assez grand.

Remarque – Les compacts A_n ont pour avantage, comparé à la dernière solution esquissée, de donner une vision "générale" de la convergence des suites d'itérés en les "enserrant" chacune vers le point fixe κ.

3.3 Topologie en dimension finie

Nous sommes à présent armés pour démontrer le principal résultat sur les espaces vectoriels normés.

Rappelons que la norme de E évoquée est notée $\mathcal{N}$ ou $a \mapsto \|a\|$.

Théorème (équivalence des normes en dimension finie)

> *Quand E est de dimension finie,*
> *ses normes forment une même classe d'équivalence*

Démonstration (non exigible)

Supposons E de dimension finie et soit $\mathfrak{N}$ une norme sur E. On veut montrer $\exists \alpha, \beta > 0,\ \forall a \in E \backslash \{0\}\ ,\ \alpha \mathfrak{N}(a) \leq \|a\| \leq \beta \mathfrak{N}(a)$. Par positivité de $\mathfrak{N}$ et positive homogénéité de $\mathcal{N}$, cela revient à[122] $\exists \alpha, \beta > 0,\ \forall a \in E \backslash \{0\}\ ,\ \alpha \leq \left\| \frac{a}{\mathfrak{N}(a)} \right\| \leq \beta$ ou encore à dire que l'application $\mathcal{N}$ est bornée sur la sphère $\mathbb{S} := \{a \in E\ ;\ \mathfrak{N}(a) = 1\}$ par des valeurs strictement positives. Si l'on montre – pour une certaine topologie judicieusement choisie – que $\mathcal{N}$ est continue et que la sphère $\mathbb{S}$ est compacte, alors $\mathcal{N}$ sera bornée sur $\mathbb{S}$ et y atteindra ses bornes, son minimum ne pouvant être nul puisque $\mathcal{N}$ ne s'annule qu'en le vecteur nul (lequel n'appartient pas à $\mathbb{S}$), ce qui conclura.

Nous allons à présent *imposer* rétrospectivement la norme $\mathfrak{N}$: cela ne changera rien à notre démarche puisque nous aurons alors montré que chaque norme de E est équivalente à $\mathfrak{N}$, d'où une seule classe d'équivalence (celle de la norme $\mathfrak{N}$).

Soit B une partie basique de E (laquelle est *finie* par hypothèse). La conclusion découle alors des cinq points suivants :

1. d'après l'exo???evn1, la bijection $\varphi := \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^B & \xrightarrow{\sim} & E \\ \lambda & \longmapsto & \sum_{b \in B} \lambda_b b \end{array} \right.$ est une isométrie lorsque $\mathbb{K}^B$ est normé par la norme uniforme et E par[123] $\mathfrak{N} := a \mapsto \left\| \varphi^{-1}(a) \right\|_\infty$.
2. vu pour chaque $e \in E$ les majorations[124]
$$\|e\| = \left\| \sum_{b \in B} e_b b \right\| \leq \sum_{b \in B} \underbrace{|e_b|}_{\leq \mathfrak{N}(e)} \|b\| \leq \left(\sum_{b \in B} \|b\| \right) \mathfrak{N}(e),$$
on a à $u, v \in E$ fixés les majorations
$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\| \leq \left(\sum_{b \in B} \|b\| \right) \mathfrak{N}(u - v),$$
donc la norme $\mathcal{N}$ est lipschitzienne – *a fortiori* continue – pour $\mathfrak{N}$;
3. d'après une remarque 5 précédente, la sphère unité de $\mathbb{K}^B$ est compacte pour la norme uniforme ;
4. l'image $\varphi(\mathcal{S}_{\mathbb{K}^B}(0,1))$ de cette sphère unité vaut $\mathbb{S}$ vu à $a \in E$ fixé les équivalences
$$\begin{array}{rcl} a \in \mathbb{S} & \overset{\text{noter } \lambda := \varphi^{-1}(a)}{\iff} & d(\varphi(0), \varphi(\lambda)) = 1 \overset{\varphi \text{ isométrie}}{\iff} d(0, \lambda) = 1 \\ & \iff & \varphi^{-1}(a) \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}^B}(0,1) \iff a \in \varphi(\mathcal{S}_{\mathbb{K}^B}(0,1))\ ; \end{array}$$
5. puisque φ est continue[125], la sphère $\mathbb{S}$ est compacte en tant qu'image continue du compact $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^B}(0,1)$.

[122] Lorsque $a = 0$, l'encadrement se réécrit $0 \leq 0 \leq 0$, ce qui est trivial.
[123] La norme N est la norme uniforme de $\mathbb{K}^B$ "transportée" *via* l'isomorphisme φ.
[124] On note $(e_b)_{b \in B}$ la famille des coordonnées de e dans la base $(b)_{b \in B}$.
[125] *Rappel* : une isométrie est 1-lipschitzienne, *a fortiori* continue.

Remarques

• Dans la démonstration ci-dessus, remplacer les sphères unité par les *boules* unité *fermées* montrerait que

E possède une norme dont la boule unité fermée est compacte.

Sanity check : la compacité de $\mathcal{S}(0,1)$ équivaut à celle de $\overline{\mathcal{B}}(0,1)$ d'après une application section 3.2.

• **Produit fini d'espaces vectoriels normés**. Dans ce cours, nous avons normé les produits finis d'espaces vectoriels normés à l'aide de la norme *uniforme*. Le théorème ci-dessus montre que n'importe quelle autre norme aurait fait l'affaire. (Le choix de celle uniforme était motivé par pure et simple *commodité*, à savoir que les boules "produit" soient les produits de boules.)

Corollaires

Lorsque l'espace vectoriel E est de dimension finie :

1. *aucune des notions topologiques définies dans ce cours et récapitulées ? ? ?chapEvn1 ? ? ? ne dépend de la norme de E évoquée ;*
2. *les compacts de E sont ses fermés bornés ;*
3. *chaque suite bornée de $E^{\mathbb{N}}$ possède une valeur d'adhérence (***théorème de Bolzano-Weiertrass**[126]*) et converge ssi elle possède une unique valeur d'adhérence ;*
4. *chaque application linéaire de source E est continue ;*
5. *si E est de plus un produit fini d'espaces vectoriels normés*[127]*, alors chaque application multilinéaire de source E est continue.*

Démonstration

1. Nous avons vu (à diverses endroits du cours) que chaque notion récapitulée était invariante par passage à une norme équivalente. Or, par le théorème précédent, chaque norme de E équivaut à $\mathcal{N}$, ce qui permet de conclure.
2. L'inclusion $\subset$ a déjà été établie. Imposons à présent A fermée et bornée. D'après une remarque ci-dessus, on peut évoquer une norme sur E dont la boule unité fermée $\overline{\mathbb{B}}$ est compacte ; par le point 1, la partie A est alors fermée et bornée *pour cette norme*. On peut en particulier évoquer un réel $r > 0$ tel que $A \subset r\overline{\mathbb{B}}$: la boule $r\overline{\mathbb{B}}$ étant compacte comme image continue[128] du compact $\overline{\mathbb{B}}$ par l'homothétie de rapport r, le fermé A est inclus dans un compact, donc est compact, ce qui conclut avec le point 1.
3. Soit $a \in E^{\mathbb{N}}$ une suite bornée et soit B une boule fermée contenant chaque terme de a. Puisque B est fermée et bornée, le point 2 montre qu'elle est compacte, donc d'une part la suite $a \in B^{\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence, d'autre part la proposition "convergence dans un compact" (section 3.1) s'applique et permet de conclure.

[126] Tel quel, cet théorème (qui généralise celui vu en première année) n'est pas explicitement au programme – la suite du corollaire si.

[127] Chacun des espaces vectoriels normés facteurs est alors de dimension finie.

[128] *Rappel* : chaque homothétie est continue car lipschitzienne.

4. Établi à la section 2.3.
5. Démontré à la section 2.3.

Remarque – **Inutilité de préciser la norme**. Le point 1 légitime l'abus (courant) consistant à

omettre, en dimension finie, de préciser la norme sous-jacente.

De nombreux exemples ayant été vus en amont de la démonstration du théorème principal, nous conclurons cette section par une digression hors programme sur la dimension infinie.

Lemmes[129] (culture hors programme)

1. *Pour chaque sous-espace vectoriel strict de E de dimension finie, il y a un point de la sphère unité de E à distance 1 de ce sous-espace vectoriel ;*
2. *Si E n'est pas de dimension finie, il y a alors une suite $s \in E^{\mathbb{N}}$ libre telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ d\left(s_n, \operatorname*{Vect}_{i\in[0,n[} s_i\right) = 1 = \|s_n\|\,.$$

Démonstration

1. Soit $V \subsetneq E$ un sous-espace vectoriel strict de dimension finie et soit $a \in E\backslash V$: la distance $d(a,V)$ est alors non nulle (sinon a adhérerait à V, *i. e.* lui appartiendrait car V est fermé en tant que sous-espace vectoriel de dimension finie) et est atteinte d'après l'exercice 1a ci-dessous, ce qui permet d'évoquer un point $v \in V$ tel que $d(a,V) = d(a,v)$ et tel que le réel $\lambda := \frac{1}{d(a,V)}$ fait sens. On a alors les égalités[130]

$$d(\lambda\overrightarrow{va}, V) \overset{\lambda\neq 0}{=} d(\lambda\overrightarrow{va}, \lambda V) \overset{\lambda\geq 0}{=} \lambda\, d(\overrightarrow{va}, V) = \lambda\, d(a-v, V-v) = \lambda\, d(a,V) = 1,$$

ce qui montre que le vecteur unitaire $\frac{\overrightarrow{va}}{\|\overrightarrow{va}\|}$ est à distance 1 de V.

2. L'idée est d'utiliser le lemme 1 pour construire de proche en proche une suite comme voulue, le sous-espace vectoriel considéré à un rang donné étant l'engendré des termes contruits jusqu'alors.

Formellement, comme à l'exercice 5a section 3.1, soit $c : \mathfrak{P}(E) \longrightarrow E$ telle que $c(P) \in P$ pour chaque partie $P \subset E$ non vide[131]. On définit alors une suite comme voulu par la récurrence[132]

$$\forall n \in \mathbb{N},\ s_n = c\left(\ \left\{a \in E\ ;\ d\left(a, \operatorname*{Vect}_{i\in[0,n[} s_i\right) = 1 = \|a\|\right\}\ \right),$$

les inégalités $d\left(s_n, \mathrm{Vect}_{i\in[0,n[}\, s_i\right) \neq 0$ assurant la liberté désirée.

[129] Le premier lemme est un classique.
[130] Les égalités $\lambda V = V = V - v$ résultent de ce que V est un sous-espace vectoriel.
[131] L'axiome du choix permet d'évoquer une telle application, appelée ***application de choix*** sur E.
[132] À $n \in \mathbb{N}$ fixé l'argument de c est bien non vide d'après le lemme 1.

Exemple : dans l'espace vectoriel normé $\mathbb{K}[X]$ muni de la norme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n \mapsto \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$, la base canonique vérifie les propriétés requises. Vue dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{K})$, cette suite devient celle des DIRAC[133]. Un analogue continu serait la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'exercice 4 section 3.1.

Corollaires[134] (culture hors programme)

Imposons que E ne soit pas de dimension finie. Alors :

1. *les compacts de E ne sont pas ses fermés bornés ;*
2. *il y a une suite bornée divergente possédant une unique valeur d'adhérence ;*
3. *il y a un endomorphisme et une forme linéaire de E non continus ;*
4. *il y a un sous-espace vectoriel de E non fermé ;*
5. *il y a une famille de normes de E deux à deux non équivalentes indexée par $\mathbb{R}$.*

Démonstration On note $\mathbb{S}$ la sphère unité de E.

1. Soit $s \in \mathbb{S}^{\mathbb{N}}$ comme au lemme 2. La condition sur les distances montre alors pour chaques naturels $p \neq q$ la minoration $d(s_p, s_q) \geq 1$, d'où l'on tire $\inf_{p\neq q}^{p,q\in\mathbb{N}} d(s_p, s_q) > 0$, de sorte que la suite s n'a pas de valeur d'adhérence, d'où la non-compacité de la sphère $\mathbb{S}$. Cette dernière étant par ailleurs fermée et bornée, on peut conclure.
2. Soit $s \in \mathbb{S}^{\mathbb{N}}$ comme au lemme 2 et notons $\sigma := (s_0, 0, s_1, 0, s_2, 0, s_3, 0...)$. Cette suite est alors bornée (car à valeurs dans $\mathbb{S} \cup \{0\}$), elle possède 0 comme valeur d'adhérence (extraire suivant les termes impairs), elle diverge (sinon la suite s extraite de σ suivant les termes impairs tendrait vers la valeur d'adhérence 0 de σ et cette valeur adhérerait au fermé $\mathbb{S}$, *i. e.* lui appartiendrait) et pour aucun naturel N le point s_N est valeur d'adhérence de σ (chaque terme de σ étant à partir du rang $2N+1$ à distance 1 de s_N). Enfin, la suite σ prenant ses valeurs dans le fermé $\mathbb{S}\cup\{0\}$, ses valeurs d'adhérence restent dans ce fermé, ce qui montre que 0 bien est la seule valeur d'adhérence de σ.
3. Soit $s \in \mathbb{S}^{\mathbb{N}}$ comme ci-dessus, soit T un supplémentaire de $\operatorname{Vect}_{n\in\mathbb{N}} s_n$ (cela utilise encore et requiert l'axiome du choix) et définissons un endomorphisme $\varphi \in L(E)$ nul sur T et tel que $s_n \mapsto n s_n$ pour chaque naturel n. La suite $\left(\frac{\|\varphi(s_n)\|}{\|s_n\|}\right)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ fait alors sens et n'est pas bornée, ce qui montre la non-continuité de φ. En imposant $s_n \mapsto n$ au lieu de $s_n \mapsto n s_n$, on obtient de même une forme linéaire de E non continue.
4. La forme linéaire précédente n'étant pas continue, son noyau n'est pas fermé (*cf.* exercice 4a section 2.3), *i. e.* est un hyperplan non fermé, *a fortiori* un sous-espace vectoriel non fermé.
5. Soit $s \in \mathbb{S}^{\mathbb{N}}$ et T comme ci-dessus, soit N une norme sur T (il y en existe, *cf.* evn1 ? ? ?) et pour chaque réel γ notons
$$N_\gamma := \begin{cases} E = T \oplus \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{K}s_n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t + \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n s_n & \longmapsto & N(t) + \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| \, n^\gamma \end{cases}.$$

[133] Pour chaque naturel n, le DIRAC en n est la suite nulle partout sauf en n où elle vaut 1.

[134] L'hypothèse « de dimension finie » est donc *toujours* nécessaire (pas seulement *en général*) dans les propositions du cours correspondantes.

On vérifiera alors pour chaque réel γ que l'application N_γ fait sens (utiliser la liberté de la suite a) et est une norme sur E. Par ailleurs, étant donnés deux réels $\gamma > \gamma'$, la suite $\left(\frac{N_\gamma(s_n)}{N_{\gamma'}(s_n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(n^{\gamma-\gamma'}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, ce qui montre que les normes N_γ et $N_{\gamma'}$ ne sont pas équivalentes.

Remarque – Tous ces contre-exemples peuvent se réaliser dans l'espace vectoriel normé $\mathbb{K}[X]$ muni de la norme d'indice ∞ en imposant[135] que la suite s du lemme 2 évoquée soit la base canonique $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$:

1. la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans la sphère unité n'a aucune valeur d'adhérence ;
2. la suite $\left(1, 0, X, 0, X^2, 0, X^3, ...\right)$ est bornée, diverge et possède une seule valeur d'adhérence ;
3. l'endomorphisme $P \mapsto XP'$ et la forme linéaire $P \mapsto [XP'](1)$ ne sont pas continus ;
4. l'hyperplan $\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n \ ; \ \sum_{n\in\mathbb{N}} n a_n = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel non fermé ;
5. la famille $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| n^\gamma\right)_{\gamma\in\mathbb{R}}$ est formée d'une infinité de normes deux à deux non équivalentes.

Exercices d'application

Soit $a \in E$ et notons $\mathbb{S}$ la sphère unité de E.

1.
   (a) *Soit V un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Montrer que la distance $d(a, V)$ est atteinte.*
   (b) *En déduire l'impossibilité, lorsque E n'est pas de dimension finie, de recouvrir la boule unité fermée par un nombre fini de boules ouvertes de rayon 1.*
   (c) *En déduire (à l'aide de l'exercice 5a section 3.1) que E est de dimension finie ssi $\mathbb{S}$ est compacte.*
2. *On impose dans cet exercice que l'espace vectoriel E soit de dimension finie.*
   (a) *Soient C un fermé de E. En notant $\delta := d(a, C)$, montrer que le point a adhère à la somme $C + \delta\mathbb{S}$ (sauf cas pathologique à préciser) et en déduire que la distance du point a au fermé C est atteinte.*
   (b) *Retrouver le résultat de la question 1a.*
   (c) *(plus difficile) Discuter les hypothèses de la question 2a.*
3. *On impose dans cet exercice que l'espace vectoriel E soit de dimension finie.*
   (a) *Imposons f continue à valeurs réelles et telle que[136] $f(a) \underset{\|a\|\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Montrer alors que f atteint sa borne inférieure.*

[135] Ce cas singulier permet d'éviter l'utilisation de l'axiome du choix pour évoquer un supplémentaire T ainsi qu'une norme dessus.
[136] Les hypothèses impliquent que A soit non bornée.

(b) *Retrouver les résultats de l'exercice 2.*

4. **Théorème fondamental de l'algèbre**. *Imposons dans cet exercice $E = \mathbb{C}$ et soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant.*

   (a) *Soient $v \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que*
   $$P = 1 + \lambda X^v + X^{v+1} Q.$$
   Montrer alors l'existence d'un complexe c tel que $|P(c)| < 1$.

   (b) *Montrer les implications*
   $$\forall a \in \mathbb{C},\ P(a) \neq 0 \Longrightarrow \exists b \in \mathbb{C},\ |P(b)| < |P(a)|.$$

   (c) *En déduire que P s'annule.*

1.

(a) Soit $v \in V^{\mathbb{N}}$ tel que $d(a, v_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} d(a, V)$ (permis par définition de la distance $d(a, V)$). La suite $\left(\|v_n - a\| \right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente est alors bornée, donc la suite v également vu les majorations $\forall n \in \mathbb{N},\ \|v_n\| \leq \|v_n - a\| + \|a\|$. La suite v admet donc une sous-suite convergente, mettons $v_{x(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ pour un certain $\ell \in V$. La continuité de l'application "distance à a" donne alors la tendance $d\left(a, v_{x(n)}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} d(a, \ell)$, d'où les égalités $d(a, \ell) = \lim_{n\to\infty} d\left(a, v_{x(n)}\right) = \lim_{n\to\infty} d(a, v_n) = d(a, V)$, ce qui conclut.
Remarque – Le résultat est faux en général si V n'est pas de dimension finie. Il suffit que V soit un sous-espace vectoriel non fermé et d'avoir $a \in \overline{V} \backslash V$, par exemple quand $E = C([0, 1])$ muni de la norme uniforme, $V = \mathbb{K}[X]$ et $a \in E \backslash V$ (le sous-espace vectoriel V est alors dense).

(b) Supposons que E n'est pas de dimension finie, soit par l'absurde[137] $C \subset E$ finie que $\overline{\mathcal{B}}(0, 1) \subset \bigcup_{c\in C} \mathring{\mathcal{B}}(c, 1)$, soit $a \in E$ hors du sous-espace vectoriel $V := \operatorname{Vect} C$ (permis car V est de dimension finie et pas E) et soit $v \in V$ tel que $d(a, v) = d(a, V)$ (permis par la question 1a). Puisque V est fermé et ne contient pas a, la distance $d(a, V)$ n'est pas nulle, donc le vecteur unitaire $\frac{\overrightarrow{av}}{\|\overrightarrow{av}\|}$ fait sens. Soit alors $c \in C$ tel que $\frac{\overrightarrow{av}}{\|\overrightarrow{av}\|} \in \mathring{\mathcal{B}}(c, 1)$ (permis par l'inclusion $\mathbb{S} \subset \overline{\mathcal{B}}(0, 1)$ et l'hypothèse), ce qui s'écrit $\left\| \frac{\overrightarrow{av}}{\|\overrightarrow{av}\|} - c \right\| < 1$, *i. e.* $\|\overrightarrow{av} - \|\overrightarrow{av}\| c\| < \|\overrightarrow{av}\|$, ou encore $\|a - (v - \|\overrightarrow{av}\| c)\| < d(a, V)$, d'où la contradiction vu l'appartenance $v - \|\overrightarrow{av}\| c \in V$.

(c) Nous savons déjà que $\mathbb{S}$ est compacte quand E est de dimension finie. Réciproquement, si la sphère $\mathbb{S}$ est compacte, elle est alors précompacte (*cf.* exercice indiqué), donc on peut la recouvrir par un nombre fini de boules de rayon $\frac{1}{2}$, à plus forte raison par un nombre fini de boules ouvertes de rayon 1, d'où (en rajoutant la boule ouverte unité) un recouvrement de $\overline{\mathcal{B}}(0, 1) = \mathbb{S} \cup \mathring{\mathcal{B}}(0, 1)$ par un nombre fini de boules ouvertes de rayon 1 et la question 1b montre (par contraposée) que E est de dimension finie.

[137] C comme « **c**entres »

Remarque – Cette équivalence est attribuée à Frigyes Riesz. Une autre preuve en est donnée plus haut (point 1 des corollaires "culture hors programme").

2.

(a) Soit $c \in C^{\mathbb{N}}$ telle que $d(a, c_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} d(a, C)$ et notons $s_n := c_n + \delta \frac{\overrightarrow{c_n a}}{d(a,c_n)}$ pour chaque naturel n.

FIG

La suite s est est alors à valeurs dans la somme $C + \delta\mathbb{S}$ et vérifie à $n \in \mathbb{N}$ fixé les égalités et tendance

$$\begin{aligned} \|s_n - a\| &= \left\|\delta \frac{\overrightarrow{c_n a}}{\|\overrightarrow{c_n a}\|} - \overrightarrow{c_n a}\right\| = \left\|\left(\frac{\delta}{\|\overrightarrow{c_n a}\|} - 1\right)\overrightarrow{c_n a}\right\| \\ &= \left|\frac{\delta}{\|\overrightarrow{c_n a}\|} - 1\right| \|\overrightarrow{c_n a}\| = \left|\delta - \|\overrightarrow{c_n a}\|\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

ce qui montre l'appartenance $a \in \overline{C + \delta\mathbb{S}}$. Or la sphère $\delta\mathbb{S}$ est compacte (nous sommes en dimension finie), donc sa somme avec le fermé C est fermée (*cf.* exercice 1b section 3.2), d'où l'appartenance $a \in C + \delta\mathbb{S}$, mettons $a = \gamma + \delta\sigma$ pour un certain $(\gamma, \sigma) \in C \times \mathbb{S}$. On conclut en évaluant la distance

$$d(\gamma, a) = \|a - \gamma\| = \|\delta\sigma\| = |\delta| \|\sigma\| = \delta = d(a, C).$$

Tout ce qui précède fait sens dès que δ est *fini*, *i. e.* ssi C est non vide (le cas pathologique à préciser).

Remarque – L'idée originelle de cette preuve était de se ramener au cas $\delta = 0$ immédiat à traiter, la nullité de la distance à chaque fermé équivalant à l'appartenance à ce fermé. La lectrice et le lecteur intéressés pourront plus généralement à $B \subset E$ fixé établir, en notant $\delta := d(A, B)$, la nullité de la distance $d(A + \lambda\mathbb{S}, B + \mu\mathbb{S})$ pour chaques réels λ, μ de somme δ.

(b) Plaçons-nous dans l'espace vectoriel $V + \mathbb{K}a$ normé par la norme de E. Dans cet espace vectoriel normé de dimension finie (qui contient bien le point a), le sous-espace vectoriel V est fermé car de dimension finie, donc le point 2a s'applique.

(c) Imposons E non nul et montrons alors l'existence d'une partie non fermée (non vide) à n'importe quelle distance de a et telle que cette distance n'est pas atteinte. Pour chaque réel $r > 0$, le point a est à distance r de la partie $\{v \in E \ ; \ d(a, v) > r\}$ (laquelle est non vide si $E \neq \{0\}$) mais cette distance n'est pas atteinte car cette partie est disjointe de la sphère $\mathcal{S}(a, r)$.

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel normé qui n'est pas de dimension finie et montrons l'existence d'un fermé (non vide) de $\mathcal{E}$ dont la distance à l'origine n'est pas atteinte. Soit $s \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$ comme au lemme 2 et notons $C := \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[1 + \frac{1}{n}, 2\right] s_n$. Vu à $n \in \mathbb{N}^*$ fixé les égalité et tendance $d\left(0, \left(1 + \frac{1}{n}\right) s_n\right) = 1 + \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, on peut majorer $d(0, C) \leq 1$, Chaque $c \in C$ étant par ailleurs de la forme λs_n pour un certain réel $\lambda > 1$ et un certain naturel n, donc de norme $\lambda > 1$, la distance $d(0, C)$ vaut 1 et n'est pas atteinte.

FIG : le "hérisson" C

Montrer enfin que C est fermé. Soit $c \in C^{\mathbb{N}}$ convergente, soit $P \in \mathbb{N}$ tel que $\forall Q \in [P, \infty[\![$, $d(c_P, c_Q) < 1$ (permis par convergence de c), soit $Q > P$ un entier, soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda, \mu > 1$ tels que $\binom{c_P}{c_Q} = \binom{\lambda s_p}{\mu s_q}$ (permis par les appartenances $c_P, c_Q \in C$ et par définition de C) : si $p > q$, on aura alors l'appartenance $c_Q = \mu s_q \in \mathrm{Vect}_{i\in[0,p[} s_i$, d'où les minorations

$$\begin{aligned} d(c_P, c_Q) &\geq d\left(\lambda s_p, \operatorname*{Vect}_{i\in[0,p[} s_i\right) = d\left(\lambda s_p, \lambda \operatorname*{Vect}_{i\in[0,p[} s_i\right) \\ &= \lambda\, d\left(s_p, \operatorname*{Vect}_{i\in[0,p[} s_i\right) = \lambda > 1, \end{aligned}$$

ce qui contredira l'évocation de N (raisonnement analogue si $p < q$). La suite c prend donc à partir du rang N ses valeurs dans le fermé $\left[1 + \frac{1}{p}, 2\right] s_p$ (image continue du compact $\left[1 + \frac{1}{p}, 2\right]$ par l'application $\|s_p\|$-lipschitzienne $\lambda \mapsto \lambda s_p$), donc sa limite reste dedans, *a fortiori* dans C, *c. q. f. d.*

Remarque – La lectrice et le lecteur désireux d'un contre-exemple "concret" pourront ou bien adapter l'exemple général précédent au cas singulier $\mathcal{E} = \mathbb{K}[X]$ ou bien se placer dans l'espace vectoriel $\mathcal{E} := C^0([0,1], \mathbb{R})$ normé par $f \mapsto \|f\|_\infty + \|f\|_1$ et montrer que l'application partout égale à 1 est à distance 1 du fermé formé par les applications de $\mathcal{E}$ s'annulant en 0 mais que cette distance n'est pas atteinte.

3.

(a) La partie A étant non bornée, elle est non vide et l'on peut évoquer un $\alpha \in A$. Soit alors $r > 0$ un réel tel que

$$\forall a \in A,\ \|a\| > r \Longrightarrow f(a) > f(\alpha).$$

La restriction de f au compact $K := \overline{\mathcal{B}}(0, r)$ atteint alors (par continuité de f) sa borne inférieure, mettons $f(\kappa) = \inf_K f$ pour un certain $\kappa \in K$. Observer au passage l'appartenance $\alpha \in K$, l'implication ci-dessus livrant sinon l'absurde minoration $f(\alpha) > f(\alpha)$.

Montrons pour conclure que f est minimale en κ.

FIG

Soit $a \in A$. Si $a \in K$, on peut alors minorer $f(a) \geq \inf_K f = f(\kappa)$ et l'on a fini. On a sinon $\|a\| > r$ et l'on peut (par évocation de r) minorer

$$f(a) > f(\alpha) \overset{\alpha\in K}{\geq} \inf_K f = f(\kappa), \text{ ce qui conclut.}$$

(b) Observer pour chaque partie P non bornée les minorations et tendance (à $p \in P$ fixé)

$$\|a-p\| \geq |\|p\|-\|a\|| \geq \|p\|-\|a\| \underset{\substack{\|p\| \longrightarrow \infty \\ p \in P}}{\longrightarrow} \infty .$$

Si le fermé C est borné, il est alors compact, donc l'application continue "distance à a" y atteint sa borne inférieure. Dans le cas contraire, l'observation ci-dessus permet d'appliquer la question 3a.

Si le sous-espace vectoriel V est nul, il est compact et l'on conclut comme ci-dessus. Sinon, il n'est pas borné et l'on conclut pareillement.

4.

(a) Soient $r>0$ et θ deux réels. On a alors les égalités

$$\begin{aligned} P\left(re^{i\theta}\right) &= 1+\lambda\left(re^{i\theta}\right)^v + r^v \; r \underbrace{e^{i(v+1)\theta} Q\left(re^{i\theta}\right)}_{\text{borné quand } r \rightarrow 0} \\ &= 1+\lambda r^v e^{iv\theta} + o_{r \rightarrow 0}\left(r^v\right). \end{aligned}$$

Le deuxième terme devient $-|\lambda| r^v$ en imposant son argument valant π, (*i. e.* en imposant rétrospectivement $\operatorname{Arg} \lambda + v\theta = \pi$, ce qui est possible grâce à la non-nullité de ν), le troisième terme se majore en module par $\frac{|\lambda|}{2} r^v$ en imposant r assez petit et, enfin, la somme $1-|\lambda| r^v$ est positive en imposant de plus $r<\frac{1}{\sqrt[v]{|\lambda|}}$. Sous ces restrictions, on peut majorer

$$\begin{aligned} \left|P\left(re^{i\theta}\right)\right| &= \left|1+\lambda r^v e^{iv\theta}+o_{r \rightarrow 0}\left(r^v\right)\right| = \left|1-|\lambda| r^v+o_{r \rightarrow 0}\left(r^v\right)\right| \\ &\leq \left|1-|\lambda| r^v\right|+\left|o_{r \rightarrow 0}\left(r^v\right)\right| \leq 1-|\lambda| r^v+\frac{|\lambda|}{2} r^v = 1-\frac{|\lambda|}{2} r^v \\ &< 1, \text{ ce qui conclut en définissant } b := re^{i\theta}. \end{aligned}$$

(b) Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $P(a) \neq 0$. Le polynôme $P^* := \frac{P(a+X)}{P(a)}$ fait alors sens, vérifie $P^*(0) = \frac{P(a+0)}{P(a)} = 1$ et est de valuation finie non nulle (sinon P serait constant), donc est de la forme $1+\lambda X^v + X^{v+1} Q$ comme à la question 4a. On peut donc évoquer un complexe c tel que $\left|P^*(c)\right|<1$, ce qui s'écrit $|P(a+c)|<|P(a)|$, d'où la conclusion en notant $b := c+a$.

(c) L'application $c \mapsto |P(c)|$ est continue sur $\mathbb{C}$ et vérifie la tendance $|P(c)| \underset{|c| \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \infty$ (*cf.* exemple en fin de section 1.2), donc atteint sa borne inférieure (*cf.* question 3a) en un certain a. Si P ne s'annulait pas en a, la question 4b fournirait alors un complexe b tel que $|P(b)|<|P(a)|=\inf_{\mathbb{C}}|P|$, ce qui contredirait la minimalité de a.

4 Connexité par arcs

On garde évoqués l'espace vectoriel normé E et la partie $A \subset E$. (Les lettres f et F sont libres.)

La norme de E évoquée est toujours notée $\mathcal{N}$ ou avec des doubles-barres.

4.1 Motivations (hors programme)

Un théorème fondamental en analyse réelle est celui *des valeurs intermédiaires*[138] affirmant intuitivement que, dans le plan, une "courbe" reliant deux points séparés par une droite doit "traverser" cette dernière. Formellement : l'image de chaque intervalle réel par chaque application $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue est un intervalle.

L'idée de la "connexité" (le fait d'être "connexe") est de formaliser la notion intuitive d'être "d'un seul tenant" dont nous qualifions volontiers les intervalles et disqualifions les ensembles finis de cardinal au moins 2 (lesquels seront plutôt pensés comme étant "éclatés"). Si l'on souhaite[139]

1. conserver le théorème des valeurs intermédiaires (*i. e.* exiger que la "connexité" soit préservée par image continue),
2. nier la "connexité" de la paire $\{0, 1\}$ (un représentant des ensembles finis de cardinal au moins 2),

alors pour chaque "connexe" C chaque application continue $C \longrightarrow \{0, 1\}$ devra être constante. Cette conséquence peut de fait être prise comme *définition* de la connexité, équivaut *précisément* à la conjonction de nos deux souhaits[140] et permet de décrire les intervalles de $\mathbb{R}$ comme ses parties connexes. Sachant par ailleurs que chaque partie est connexe ssi l'on ne peut la partitionner en deux de ses fermés non vides, on retrouve l'idée originelle "d'un seul tenant". (Aucune affirmation de ce paragraphe n'est immédiate ni bien difficile à établir.)

Une autre façon de formaliser cette idée originelle est de décréter une partie "d'un seul tenant" si l'on peut en "relier" deux points quelconques par un "arc" tracé dans cette partie. Ce décret sera la définition de la connexité *par arcs*, plus restrictive que la connexité tout court mais confortant davantage notre intuition que l'indécomposabilité ci-dessus en termes de fermés relatifs – et surtout au programme.

4.2 Chemins continus

Définition (chemin[141] reliant deux points)

On appelle ***chemin (à valeurs) dans*** *A toute application de but A et de source un segment réel infini*[142].

Soit un chemin dans A dont on note S la source : *son* ***origine*** *est l'image de* $\min S$, *sa* ***fin*** *est l'image de* $\max S$.

Soient $a, \alpha \in A$. On appelle ***chemin dans*** *A* ***de*** *a* ***à*** *α tout chemin dans A d'origine a et de fin α. Lorsque $A = E$, on parle de* ***chemin*** *(tout court)* ***de*** *a* ***à*** *α.*

Exemples

[138] Ce résultat a été publié par Bernard Bolzano en 1817 aux éditions *Gottlieb Haase*.

[139] Ces souhaits sont indépendants : la classe des ensembles satisfait (1) mais pas (2), celle des ensembles ayant au moins trois éléments satisfait (2) mais pas (1).

[140] En d'autres termes, la classe des connexes est maximale pour les propriétés (1) et (2).

[141] Seuls les chemins *continus* sont au programme.

[142] Autoriser la source d'un chemin à être finie ne rajouterait que des chemins constants, lesquels sont déjà pris en en compte dans la définition.

1. **Ligne droite**. Soient $a, b \in E$. L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & a + t\overrightarrow{ab} \end{array} \right.$ est alors un chemin $d(a,b)$-lipschitzien de a à b, appelé ***la ligne droite***[143] ***de*** a ***à*** b. Son image est le segment $[a,b]$.

   FIG

2. **Arc de cercle**. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. L'application 1-lipschitzienne[144] $\left\{ \begin{array}{ccc} [\alpha, \beta] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} \end{array} \right.$ est alors un chemin continu de $e^{i\alpha}$ à $e^{i\beta}$ (dans le plan $\mathbb{C}$), son image est l'arc de cercle de $e^{i\alpha}$ à $e^{i\beta}$ parcouru dans le sens positif.

   FIG

3. **Courbes de Peano (hors programme)**. Il semblerait intuitif d'appeler *courbe* l'image de tout chemin continu. Toutefois, en 1890, Giuseppe PEANO publie dans les *Mathematische Annalen* un article où il démontre que le carré $[0,1]^2$ est une courbe (par la suite nommée en son honneur[145]). Cela a de quoi choquer notre intuition topologique : comment un segment, de longueur finie, pourrait-il recouvrir une surface de "longueur" infinie ? Bien qu'un chemin continu d'image A soit intuitivement un tracé de la partie A sans lever le crayon, gardons bien en tête que *la "vitesse" de tracé n'a aucune raison d'être limitée*, le caractère borné de la vitesse de tracé traduisant en effet le caractère *lipschitzien* du chemin. L'exercice 4 ci-dessous montrant qu'aucun chemin lipschitzien ne saurait recouvrir le carré, notre intuition est sauve.

REMARQUES

• **Indépendance en l'espace sous-jacent**. Un chemin *continu* dans A est un chemin dans A par lequel l'image réciproque de chaque ouvert de A est ouverte. Cette continuité s'exprime donc uniquement en termes d'ouverts de A, ce qui permet d'oublier l'espace vectoriel normé E sous-jacent[146]. On parlera ainsi volontiers et sans plus de précisions de chemins continus dans $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}^*$, $[0,1]$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{U}$, $GL_{18}(\mathbb{C})$, $\mathcal{O}_{42}(\mathbb{R})$...

• **Segment source**. Soit $S \longrightarrow A$ un chemin et notons L la longueur du segment S. Quitte à composer à droite par le paramétrage canonique[147] $\left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \widetilde{\longrightarrow} & S \\ t & \longmapsto & \min S + tL \\ \frac{s - \min S}{L} & \longleftarrow\!\shortmid & s \end{array} \right.$, on pourra toujours au besoin imposer le segment source valoir $S = [0,1]$, *a fortiori* n'importe quel segment infini.

• **Chemins sans recoupements (hors programme)**. Soient $a \neq \alpha$ dans A : si la partie A contient (l'image d')un chemin continu de a à α, elle contiendra alors[148] un tel chemin "sans boucles", *i. e. injectif*.

---

[143] Un tel chemin est dérivable et de vitesse constante $\overrightarrow{ab}$. Il est donc parcouru d'autant plus rapidement que la distance $d(a,b)$ est grande.

[144] L'espace vectoriel $\mathbb{C}$ est ici normé par le module.

[145] Nous construirons une telle courbe de PEANO au chap ? ? ?

[146] On qualifie ainsi la notion de "chemin dans" d'*intrinsèque*.

[147] Sa réciproque fait bien sens : on peut diviser par L car le segment S est infini.

[148] Cette affirmation constitue l'exercice 1.4 de l'ouvrage *Algèbre & théories galoisiennes* de Régine et Adrien DOUADY.

Exercices d'application

1. *Soit F un espace vectoriel normé, soit $B \subset F$, soient $\binom{a}{b}, \binom{a'}{b'} \in A \times B$ tels qu'il y a un chemin continu dans A de a à a' et un chemin continu dans B de b à b'. Montrer alors l'existence d'un chemin continu dans $A \times B$ de $\binom{a}{b}$ à $\binom{a'}{b'}$.*
2. *Soit $n \geq 1$ un naturel. On pourra admettre que le groupe $SL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les matrices de transvections*[149]*.*
   (a) *Montrer l'existence d'un chemin dans $SL_n(\mathbb{K})$ de I_n vers chaque matrice de transvection.*
   (b) *Montrer pour chaque matrice $s \in SL_n(\mathbb{K})$ l'existence d'un chemin continu dans $SL_n(\mathbb{K})$ de s vers I_n.*
   (c) *En déduire pour chaque matrice $g \in GL_n(\mathbb{R})$ l'existence d'un chemin continu dans $GL_n(\mathbb{R})$ de g vers $\pm I_n$ où le signe $\pm$ est celui de* $\det g$.
3. *Pour chaque réel r, notons D_r la demi-droite $\{r\} \times \begin{matrix}\mathbb{R}_+ \\ \mathbb{R}_-^*\end{matrix}$ si $r \begin{matrix}\in \\ \notin\end{matrix} \mathbb{Q}$ du plan $\mathbb{R}^2$ et appelons P le "peigne" $\coprod_{r\in\mathbb{R}} D_r$.*

   FIG : le peigne P

   (a) *Soit i un réel irrationnel, soit $c : [0,1] \longrightarrow P$ un chemin continu d'origine un point de D_i, appelons $\binom{x}{y}$ les applications "coordonnées" de c et notons O^+ la partie de $[0,1]$ où y prend des valeurs positives*[150]*.*
      i. *On suppose que le réel $o := \inf O^+$ fait sens. Établir alors la majoration $y(o) < 0$ et en déduire une contradiction.*
      ii. *Conclure que le chemin c reste à valeurs dans la droite D_i.*
   (b) *En déduire que chaque chemin continu dans P est d'abscisse constante.*
4. *(plus difficile) Montrer l'absence de chemin lipschitzien surjectif sur le carré $[0,1]^2$. On pourra à $n \in \mathbb{N}^*$ fixé faire passer un tel chemin par chaque point du "carré" $\left\{\left(\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right)\right\}_{a,b\in[0,n[}$ et considérer les distances entre des antécédents de ces n^2 points.*

---

1. Soit $\alpha : [0,1] \longrightarrow A$ continu tel que $\binom{\alpha(0)}{\alpha(1)} = \binom{a}{a'}$, soit $\beta : [0,1] \longrightarrow B$ continu tel que $\binom{\beta(0)}{\beta(1)} = \binom{b}{b'}$ et notons γ le chemin $\left\{\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & A \times B \\ t & \longmapsto & (\alpha(t), \beta(t)) \end{array}\right.$ dans $A \times B$. Les applications "coordonnées" de γ étant chacune continues, le chemin γ est continu, son origine est $\gamma(0) = \binom{\alpha(0)}{\beta(0)} = \binom{a}{b}$ et sa fin est $\gamma(1) = \binom{\alpha(1)}{\beta(1)} = \binom{a'}{b'}$, ce qui conclut.

   Remarque – Le résultat se généralise immédiatement par récurrence à n'importe quel produit fini d'espaces vectoriels normés.

[149] *Rappel* : une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ est de transvection si elle s'écrit $I_n + \lambda E_{i,j}$ où $\lambda \neq 0$ est un scalaire et où $i \neq j$ tombent dans $[1, n|]$.

[150] O^+ comme « **o**rdonnée **p**ositive »

2. Abrégeons $G := SL_n(\mathbb{K})$.

(a) Soit $T \in G$ une matrice de transvection, soient $i \neq j$ dans $[1, n|]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $T = I_n + \lambda E_{i,j}$. La ligne droite $t \mapsto I_n + t\lambda E_{i,j}$ est alors un chemin continu de I_n vers T à valeurs dans G (vu à $t \in [0,1]$ fixé l'égalité $\det(I_n + t\lambda E_{i,j}) = 1$).

(b) Soit $s \in SL_n(\mathbb{K})$, soit $(T_i)_{i\in[1,N|]}$ une famille finie de transvections dont s est le produit (permis par la question précédente) et soit $(c_i)_{i\in[1,N|]}$ telle que à $i \in [1, N|]$ fixé c_i est un chemin continu $[0,1] \longrightarrow G$ de I_n vers T_i. Le produit $\prod_{i=1}^N c_i$ est alors un chemin continu de $\prod_{i=1}^N c_i(0) = \prod_{i=1}^N I_n = I_n$ à $\prod_{i=1}^N c_i(1) = \prod_{i=1}^N T_i = s$ dans G (vu à $t \in [0,1]$ fixé les égalités $\det \prod_{i=1}^N c_i(t) = \prod_{i=1}^N \det c_i(t) = \prod_{i=1}^N 1 = 1$).

(c) Soit $g \in GL_n(\mathbb{K})$ et notons $s := \begin{pmatrix} \det g & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}^{-1} g$, de sorte à avoir les égalités $g = \begin{pmatrix} \det g & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} s$ et $\det s = \begin{vmatrix} \det g & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{vmatrix}^{-1} \det g = 1$. L'appartenance $s \in SL_n(\mathbb{K})$ livre alors par la question précédente un chemin c continu dans $SL_n(\mathbb{K})$ de s à I_n ; en évoquant par ailleurs un chemin continu dans $]0, \infty[$ de 1 à $\frac{1}{|\det g|}$, on obtient un chemin $t \mapsto \begin{pmatrix} i(t)\det g & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} c(t)$ continu dans $GL_n(\mathbb{R})$ de $\begin{pmatrix} i(0)\det g & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} c(0) = \begin{pmatrix} \det g & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} s = g$ à $\begin{pmatrix} i(1)\det g & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} c(1) = \frac{\det g}{|\det g|} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} I_n = \frac{\det g}{|\det g|} I_n$, ce qui conclut.

3.

(a)

i. Par définition de la borne inférieure o, l'application y reste strictement négative sur l'intervalle $[0, o[$, *i. e.* (vu le "peigne" P où c prend ses valeurs) l'application x n'y prend aucune valeur rationnelle. La continuité de x (qui résulte de celle de c), le théorème des valeurs intermédiaires et la densité de $\mathbb{Q}$ livrent alors la constance de x sur $[0, o[$, d'où (par continuité de x à gauche en o) l'égalité[151] $x(o) = x(0)$. L'abscisse $x(o)$ est donc irrationnelle, ce qui s'écrit $y(o) < 0$. Or l'application y est positive sur O^+, donc (par continuité de y) reste positive sur l'adhérence $\overline{O^+}$, en particulier en $\inf O^+ = o$, d'où la contradiction.

ii. Il s'agit de montrer que l'application x vaut partout i. La question précédente montrant (par l'absurde) la vacuité de P, on peut majorer $y < 0$, ce qui revient à dire que x ne prend aucune valeur rationnelle, *i. e.* (comme ci-dessus) que x est constante, d'où $x = x(0) = i$, *c. q. f. d.*

(b) Soit par l'absurde $c : [0,1] \longrightarrow P$ continu d'abscisse notée x et non constante. Comme ci-dessus (mais en utilisant cette fois la densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$), l'application x atteint un irrationnel, mettons $c(s) \in D_i$ pour un certain $(s, i) \in [0,1] \times \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Les chemins continus $c_{|[s,1]}$ et $\left\{ \begin{array}{ccc} [-s, 0] & \longrightarrow & P \\ t & \longmapsto & c(-t) \end{array} \right.$

[151] *Attention* : le passage à la limite à gauche en o n'est valide que si $[0, o[$ est non vide ! Dans le cas contraire, le réel o de $[0,1]$ est négatif, *i. e.* nul, et l'on a directement $x(o) = x(0)$.

sont alors chacun continus dans P et d'origine $c(s)$, donc d'abscisse constante $x_{c(s)}$ d'après la question 3a. L'application "abscisse" est par conséquent constante sur les images $c([s,1])$ et $c([0,s])$ de ces chemins, *a fortiori* sur la réunion $c([0,s]) \cup c([s,1]) = c([0,1])$, ce qui contredit l'évocation de c.

4. Soit $s : [0,1] \twoheadrightarrow [0,1]^2$ un chemin surjectif et soit $n \geq 2$ un naturel. Observer alors que les n^2 points du "carré" $\left\{\left(\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right)\right\}_{a,b \in [0,n|[}$ sont chacun à distance au moins $\frac{1}{n}$ des autres. Par surjectivité de s, ces n^2 points possèdent n^2 antécédents dans $[0,1]$. En recouvrant ce dernier par les $N := n^2 - 1$ intervalles $\left[\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right]$ où i parcourt $[1, N|]$, le fait qu'il y a strictement plus d'antécédents que d'intervalles montre que deux antécédents α, β tombent dans le même intervalle[152] et sont donc à distance au plus $\frac{1}{N}$. La borne $\sup_{a \neq b}^{a,b \in [0,1]} \frac{|s(a)-s(b)|}{|a-b|}$ est par conséquent minorée par $\frac{|s(\alpha)-s(\beta)|}{|\alpha-\beta|} \geq \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{N}} = \frac{n^2-1}{n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty$, empêchant s d'être lipschitzienne.
Remarque – Passer par chacun des n^2 points ci-dessus montre que la surface $[0,1]^2$ est de "longueur" aussi grande que voulu (éplucher une pomme[153] pour s'en convaincre intuitivement), contrairement à un segment. En termes dynamiques, nous avons montré que la vitesse d'un coureur parcourant le carré devra excéder $\frac{n^2-1}{n}$ entre deux certains points de $\left(\frac{1}{n}[0,n|[\right)^2$.

4.3 Connexes par arcs, cas des intervalles

Propriété – Définition (composantes connexes par arcs, parties connexes par arcs)

La relation formée des couples $(a, \alpha) \in A^2$ tels qu'il existe un chemin $\underline{\underline{\textit{continu}}}$ *dans A de a à α est une relation d'équivalence sur A. Ses classes d'équivalences sont appelées **les composantes connexes par arcs** de A.*

*La partie A est dite **connexe par arcs**[154] si elle possède une unique composante connexe par arcs (qui vaut alors A),* i. e. *si pour chaques $a, \alpha \in A$ il y a un chemin dans A continu de a à α.*

Démonstration

Notons $\rightsquigarrow$ la relation considérée (appelons-la une *connexion*[155]) et soient $a, \alpha, a' \in A$.

Le chemin $[0,1] \twoheadrightarrow \{a\}$ est continu, prend ses valeurs dans A et va de a à a, d'où la connexion $a \rightsquigarrow a$.

Imposons $a \rightsquigarrow \alpha$, soit[156] $c : [0,1] \longrightarrow A$ un chemin dans A continu de a à α et notons c' le chemin $t \mapsto c(1-t)$. Ce dernier est alors un chemin dans A continu de $c'(0) = c(1) = \alpha$ à $c'(1) = c(0) = a$, d'où la connexion $\alpha \rightsquigarrow a$.

[152] *Culture hors programme* : l'argument combinatoire utilisé s'appelle (depuis Dirichlet) le ***principe des tiroirs***, sa simplicité ne doit pas cacher les nombreux services qu'il rend au mathématicien depuis quatre siècles.
[153] *Culture* : la lectrice et le lecteur trouvant léger l'exemple de la pomme pourront se renseigner sur le mythe de la création de Carthage dont le territoire aurait été délimité par... la peau d'une vache !
[154] *Terminologie* : si l'on appelle ***arc*** l'image de tout chemin continu, la partie A est alors connexe par arcs ssi deux points de A sont toujours "connectables" par un arc inclus dans A.
[155] même si "connect*abilité*" serait plus juste
[156] *Rappel* : on peut imposer le segment source de chaque chemin.

Imposons $\begin{cases} a \rightsquigarrow \alpha \\ \alpha \rightsquigarrow a' \end{cases}$ et soient $\begin{matrix} f : [0,1] \longrightarrow A \\ g : [1,2] \longrightarrow A \end{matrix}$ des chemins continus allant resp. $\begin{matrix} \text{de } a \text{ à } \alpha \\ \text{de } \alpha \text{ à } a' \end{matrix}$. L'application $\begin{cases} [0,2] & \longrightarrow & A \\ t & \longmapsto & \begin{matrix} f(t) & \text{si } t \leq 1 \\ g(t) & \text{si } t \geq 1 \end{matrix} \end{cases}$ est alors continue sur $[0,1[$ (car y coïncide avec l'application continue f), continue sur $]1,2]$ (même argument avec g), est continue à gauche en 1 (car coïncide sur $[0,1]$ avec l'application continue f) et à droite en 1 (même argument avec g), donc est un chemin continu de a à a' dans A, d'où la connexion $a \rightsquigarrow a'$.

FIG chemin "inverse", chemin concaténé

Remarques

• La continuité du chemin $[0,2] \longrightarrow A$ de la preuve ci-dessus peut s'établir plus directement à l'aide de l'exercice 4 section 2.1 vu les continuités de ses restrictions f, α et g aux fermés $[0,1]$, $\{1\}$ et $[1,2]$ en nombre fini.

• Intuitivement, une partie connexe par arcs est "d'un seul tenant", son caractère "d'un seul tenant" étant assuré par la possibilité d'en et d'y relier continûment deux points quelconques.

• *Sanity check* : nous verrons dans la prochaine série de remarques que chaque composante connexe par arcs de A est bien connexe par arcs.

• Demander si une partie donnée est connexe par arcs cache une question plus fine, à savoir *quelles en sont les composantes connexes par arcs.* (De même que demander si une partie donnée d'un groupe fixé en est un sous-groupe cache la détermination du sous-groupe engendré par cette partie.)

• **Caractère intrinsèque de la connexité par arcs**. La définition de la connexité par arcs et des composantes connexes par arcs ne fait intervenir E que dans la topologie "trace" de la partie A considérée. Par conséquent, on oubliera souvent en pratique de préciser l'espace vectoriel normé sous-jacent, sans ambigüité aucune.

• **Invariance topologique de la connexité par arcs**. Dans la définition des composantes connexes par arcs, la norme de E n'intervient que dans la *continuité* des chemins. La continuité étant inchangée par passage à une norme équivalente, il en est de même pour les composantes connexes par arcs. En particulier,

le caractère connexe par arcs est inchangé par passage à une norme équivalente.

• **Connexité par arcs & produit cartésien**. En utilisant l'exercice 1 section 4.2, on montrerait aisément que la connexité par arcs passe au produit cartésien fini, au sens où

dans chaque produit fini d'espaces vectoriels normés,
chaque produit de parties connexes par arcs est connexe par arcs.

• **Réunion de connexes par arcs**. Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes par arcs d'intersection non vide, soit $a \in \bigcap_{i \in I} C_i$, soit $c \in \bigcup_{i \in I} C_i$, soit $i \in I$ tel que $c \in C_i$; vu alors les appartenances $a, c \in C_i$ et la connexité par arcs de C_i, il y a un chemin continu dans $C_i \subset \bigcup_{j \in I} C_j$ d'origine a et de fin c. En conséquence :

est connexe par arcs la réunion de chaque famille de connexes par arcs d'intersection non vide[157]*.*

Exemples Soit $n \geq 1$ un naturel.

1. chaques complexes unitaires $u, v \in \mathbb{U}$ étant reliables par un arc de cercle,

   le cercle $\mathbb{U}$ unité de $\mathbb{C}$ est connexe par arcs.

2. Pour chaques $a, b \in A$, la ligne droite de a à b est à valeurs dans le segment $[a, b]$, donc dans A si ce dernier est convexe. Par conséquent :

   chaque convexe de E est connexe par arcs.

   En particulier, *la partie pleine E, la partie vide $\emptyset$, chaque singleton et chaque boule sont connexes par arcs.*

3. Soit $\circledast \in A$ telle que A est étoilée en $\circledast$ et soient $a, a' \in A$: puisque A inclut les segments $[\circledast, a]$ et $[\circledast, a']$, on a les connexions $a \rightsquigarrow \circledast$ et $\circledast \rightsquigarrow a'$, d'où (par transitivité de $\rightsquigarrow$) la connexion $a \rightsquigarrow a'$. Conclusion :

   chaque partie étoilée de E est connexe par arcs.

   Sanity check : chaque convexe non vide de E est étoilé.

4. Reprenons les notations de l'exercice 3 section 4.2 et montrons que le "peigne" $P := \coprod_{r \in \mathbb{R}} D_r$ a pour composantes connexes par arcs les demi-droites D_r pour r décrivant $\mathbb{R}$ (il ne sera donc pas connexe par arcs). Une telle demi-droite étant connexe par arcs (car convexe), il s'agit d'établir l'absence de chemin continu dans P dont l'image rencontre deux telles demi-droites (distinctes), ce qui revient à montrer que chaque chemin continu dans P est d'abscisse constante. Or cela a été prouvé dans l'exercice en question.

5. Imposons A finie. Si $\operatorname{Card} A \leq 1$, alors A est vide ou est un singleton, donc est connexe par arcs (*cf.* exemple 2). Soient sinon $a \neq b$ dans A, soit c un chemin continu dans A d'origine a, notons $\varepsilon := \min_{\alpha \neq \beta}^{\alpha, \beta \in A} d(\alpha, \beta)$ (lequel est majoré par $d(a, b)$), et soit[158] $\delta > 0$ un réel tel que $\forall t, t' \in [0, 1], \ |t - t'| \leq \delta \implies \|c(t) - c(t')\| < \varepsilon$: par définition d'ε, la dernière majoration équivaut à l'égalité $c(t) = c(t')$, donc le chemin c est constant sur chaque intervalle de longueur δ, *i. e.* est constant, donc ne peut atteindre le point b. Conclusion :

   aucune partie finie n'est connexe par arcs
   (à l'exception du vide et des singletons).

   En corollaire, toujours quand A est finie, ses seules parties connexes par arcs sont ses singletons (et le vide), ce qui montre que

   les composantes connexes par arcs de chaque partie finie (non vide) *sont ses singletons.*

[157] La réunion de deux singletons distincts n'étant pas connexe par arcs, l'hypothèse « d'intersection non vide » est nécessaire en général.

[158] Permis par uniforme continuité de c, laquelle découle du théorème de Heine.

6. La partie $\mathbb{R}^*$ (de $\mathbb{R}$) n'est pas connexe par arcs : il y aurait sinon un chemin continu $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^*$ reliant -1 et 1 et le théorème des valeurs intermédiaires fournirait alors un zéro à ce chemin – contradiction. Montrons toutefois que

   l'espace épointé $E \setminus \{0\}$ est connexe par arcs
   dès que E inclut un plan réel.

   Soient $a, b \in E \setminus \{0\}$. Si $0 \notin [a,b]$, la ligne droite de a à b est valeurs dans $E \setminus \{0\}$ et on a terminé. Dans le cas contraire, les vecteurs a et b sont colinéaires et on peut évoquer un troisième vecteur $c \in E \setminus \mathbb{R}a$: les couples $\binom{a}{c}$ et $\binom{b}{c}$ étant alors $\mathbb{R}$-libres, les segments $[a,c]$ et $[c,b]$ ne contiennent pas 0, d'où un chemin continu (en ligne "brisée") dans $E \setminus \{0\}$ de a vers b.

   FIG

   En particulier, la partie $\mathbb{C}^*$ (de $\mathbb{C}$) est connexe par arcs.

7. L'exercice 2 section 4.2 montre que

   d'une part le groupe spécial linéaire $SL_n(\mathbb{K})$ est connexe par arcs,
   d'autre part le groupe $GL_n^+(\mathbb{R})$ et la partie $GL_n^-(\mathbb{R})$ sont connexes par arcs.

8. Quand $E = M_n(\mathbb{R})$, les matrices de dilatation ne forment pas une partie connexe par arcs[159] : chaque matrice de dilatation étant inversible,il y aurait sinon un chemin continu dans $GL_n(\mathbb{R})$ reliant I_n à $I_n - 2E_{1,1}$, d'où (en composant à gauche par det) un chemin continu dans $\mathbb{R}^*$ reliant -1 et 1, contredisant le théorème des valeurs intermédiaires. Ce raisonnement s'adaptant à chaque partie de $GL_n(\mathbb{R})$ contenant deux matrices de déterminants de signes opposés[160],

   le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{R})$ réel n'est pas connexe par arcs.

   Plus précisément, l'exemple 7 montrant la connexité par arcs des parties $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$ dont la réunion $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs,

   les composantes connexes par arcs de $GL_n(\mathbb{R})$ sont $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$.

9. Montrons que $GL_n(\mathbb{C})$ est "étoilé par arcs en I_n", au sens où chaque matrice complexe inversible est "connectable" dans $GL_n(\mathbb{C})$ à la matrice identité. Il en résultera (grâce la transitivité de $\rightsquigarrow$) que

   le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{C})$ complexe est connexe par arcs.

   Soit $g \in GL_n(\mathbb{C})$, trigonalisons $g = PTP^{-1}$ où $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $T \in M_n(\mathbb{C})$ est triangulaire à diagonale inversible, pour chaques $i \neq j$ dans $[1,n|]$ notons $c_{i,j}$ la ligne droite de $t_{i,j}$ à 0 et, pour chaque $i \in [1,n|]$, soit $c_{i,i} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}^*$ un chemin continu de $t_{i,i}$ (qui est non nul car T est inversible) à 1 (permis car $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs) : le chemin "produit" $\left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & M_n(\mathbb{C}) \\ t & \longmapsto & (c_{i,j}(t))_{i,j \in [1,n|]} \end{array} \right.$ est

[159] *Sanity check* : lorsque $n = 1$, les matrices de dilatation sont les matrices inversibles, $GL_1(\mathbb{R})$ s'identifie à $\mathbb{R}^*$ et l'on retrouve l'exemple 6.

[160] La preuve précédente est en substance *exactement* celle du théorème des valeurs intermédiaires que nous verrons à la section 4.4.

alors continu (car chaque application "coordonnée" est continue), à valeurs dans les matrices triangulaires inversibles (car $c_{i,j} = 0$ pour chaques $i < j$ dans $[1, n|]$ et car $c_{i,i}$ ne s'annule pour aucun $i \in [1, n|]$), est d'origine T et de fin I_n, d'où la connexion $T \rightsquigarrow I_n$. En composant par l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ continue (car linéaire et de source de dimension finie), on obtient un chemin continu de $PTP^{-1} = g$ à $PI_nP^{-1} = I_n$, *c. q. f. d.*

10. (plus long) Imposons A formée du graphe de l'application $f := \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \cos \frac{1}{t} \end{array} \right.$.
Comme à l'exemple ? ? ?egChapEvn1Sect*Points adhérents, adhérence, parties denses* Eg4 ? ? ?, on décrit l'adhérence $\overline{A} = A \amalg S$ où $S := \left[\binom{0}{-1}, \binom{0}{1} \right]$. Montrons alors que les composantes connexes par arcs de $\overline{A}$ sont A et S.

FIG

Tout d'abord, d'une part le segment S est connexe par arcs (car convexe), d'autre part, pour chaques $a, b \in A$, le chemin $\left\{ \begin{array}{ccc} [x_a, x_b] & \longrightarrow & A \\ t & \longmapsto & \binom{t}{f(t)} \end{array} \right.$ est continu (comme f) et va de $\binom{x_a}{f(x_a)} = \binom{x_a}{y_a} = a$ à b (calcul analogue), donc A est connexe par arcs. Il s'agit par conséquent d'établir l'impossibilité de relier continûment dans $\overline{A}$ deux points de A et S resp., par exemple $\binom{0}{0}$ et $\binom{1}{\cos 1}$.

Soit par l'absurde $c : [0, 1] \longrightarrow \overline{A}$ un chemin continu de $\binom{0}{0}$ à $\binom{1}{\cos 1}$ dont on note $\binom{x}{y}$ les applications "coordonnées" (chacune continue). L'image $\{x(t)\}_{t \in [0,1]}$ contient alors (par le théorème des valeurs intermédiaires) chaque valeur de $[x(0), x(1)] = [0, 1]$, en particulier le réel $\frac{1}{n\pi}$ pour chaque naturel $n > 0$, ce qui donne sens à la suite[161]

$$n \mapsto \tau_n := \min \left\{ t \in [0, 1] \ ; \ x(t) = \frac{1}{n\pi} \right\}.$$

Observer au passage que, la suite $\left(x_{c(\tau_n)} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ restant strictement positive, la suite $(c(\tau_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ prend ses valeurs dans $\overline{A} \backslash S = A$, *i. e.* dans le graphe de f, d'où pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ les égalités

$$y(\tau_n) = y_{c(\tau_n)} = f\left(x_{c(\tau_n)} \right) = f\left(\frac{1}{n\pi} \right) = \cos n\pi = (-1)^n .$$

Or, à $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, l'image $\{x(t)\}_{t \in [0, \tau_n]}$ inclut l'intervalle $[x(0), x(\tau_n)] = \left[0, \frac{1}{n\pi}\right]$, donc contient $\frac{1}{(n+1)\pi}$, d'où (par minimalité de τ_{n+1}) l'appartenance $\tau_{n+1} \in [0, \tau_n]$. La suite $\tau \in [0, 1]^{\mathbb{N}^*}$ est par conséquent décroissante, donc converge dans $[0, 1]$, d'où (par continuité de y sur $[0, 1]$) la convergence de la suite $n \mapsto y(\tau_n) = (-1)^n$: contradiction.

Remarques

• **Connexes par arcs, ouverts, fermés**. Il n'y a aucun lien direct entre les caractères connexe par arcs et ouvert (resp. fermé) :

1. le convexe $[0, 1[$ de $\mathbb{R}$ est connexe par arcs mais n'est ni ouvert ni fermé (comme chaque intervalle semi-ouvert borné) ;

[161] Chaque borne inférieure considérée est un minimum par continuité de x.

2. ni l'ouvert $\mathbb{R}^*$ ni le fermé $[-2,-1]\cup[1,2]$ ne sont connexes par arcs (chaque chemin réel continu de -1 à 1 devant s'annuler).

• **Connexes par arcs & adhérence**. Dans l'exemple 10 ci-dessus (réalisable dans chaque plan réel de E), la partie A est connexe par arcs (dans le plan $\mathbb{R}^2$) mais son adhérence ne l'est pas. Par ailleurs, si E est nul ou est une droite réelle, ses connexes sont ses intervalles, lesquels sont préservés par l'application "adhérence". Conclusion :

la connexité par arcs n'est pas préservée par adhérence (sauf si $\dim_{\mathbb{R}} E \leq 1$).

• **Caractère maximal des composantes connexes par arcs**. Notons les classes d'équivalence pour la relation $\rightsquigarrow$ à l'aide de barres horizontales. Soit $a\in A$, soient $c,c'\in\overline{a}$ et soit γ un chemin continu de c à c' dans A (permis car $\overline{c}=\overline{c'}$). Chaque point de $\operatorname{Im}\gamma$ est alors la fin d'un chemin continu d'origine c (restreindre γ), donc est "connectable" à c, *i. e.* appartient à la classe $\overline{c}=\overline{a}$, ce qui montre que le chemin γ est à valeurs dans $\overline{a}$ et, par conséquent, que la classe $\overline{a}$ est connexe par arcs. Soit par ailleurs C une partie de A connexe par arcs incluant $\overline{a}$ et soit $c\in C$: puisque $a\in\overline{a}\subset C$, on a la connexion $a\rightsquigarrow c$, d'où l'appartenance $c\in\overline{a}$ et l'inclusion $C\subset\overline{a}$. Finalement :

les composantes connexes par arcs de A
sont ses plus grandes parties connexes par arcs.

• **Description "interne" des composantes connexes par arcs**. Soit $a\in A$. Les images des chemins continus dans A d'origine a sont alors d'intersection non vide (chacune contient a) et chacune connexes par arcs, donc leur réunion est connexe par arcs. Par ailleurs, la composante $\overline{a}$ est le plus grand connexe par arcs de A contenant a et chacun de ses points est (par définition de $\rightsquigarrow$) l'image de 1 par un chemin continu $[0,1]\longrightarrow A$ d'origine a, d'où les inclusions

$$\bigcup_{\substack{c \text{ chemin continu}\\ \text{dans } A \text{ d'origine } a}} \operatorname{Im} c \subset \begin{array}{c}\text{composante connexe par}\\ \text{arcs de } A \text{ contenant } a\end{array} \subset \{\text{fin de } c\}^{c \text{ chemin continu}}_{\text{dans } A \text{ d'origine } a}.$$

La fin de chaque chemin appartenant à son image, ces inclusions bouclent et sont donc des égalités.

• **Composantes connexes par arcs d'ouverts**. Imposons A ouverte, soit C une composante connexe par arcs de A, soit $c\in C$ et soit $r>0$ un réel tel que $\mathring{\mathcal{B}}(c,r)\subset A$ (permis car $c\in C\subset A=\mathring{A}$) : la boule $\mathring{\mathcal{B}}(c,r)$ est alors connexe par arcs (car convexe) et contient c, d'où (par maximalité de C) l'inclusion $\mathring{\mathcal{B}}(c,r)\subset C$ et le caractère ouvert de C. On montrerait de même que les autres composantes connexes par arcs de A sont ouvertes : leur réunion[162] $A\setminus C$ est donc ouverte, ce qui montre que C est relativement fermée dans A. Par conséquent :

chaque composante connexe par arcs de chaque partie <u>ouverte</u>
est ouverte (tout court) et relativement fermée.

Culture hors programme : le caractère ouvert de la partie considérée est nécessaire en général. Dans l'exemple 10, la composante connexe par arcs A de la partie $\overline{A}=A\amalg S$

[162] *Rappel* : la partie A est partitionnée par ses composantes connexes par arcs.

n'est pas relativement fermée[163] (elle a pour adhérence relative $A \amalg S$). La lectrice et le lecteur intéressés pourront par ailleurs, dans le plan $\mathbb{C}$, établir que la réunion des demi-droites $\mathbb{R}_+^* e^{in}$ pour n décrivant $\mathbb{N}$ est dense et d'intérieur vide, que ses composantes connexes par arcs sont ces demi-droites et que chacune d'entre elles est d'intérieur vide[164].

Théorème (connexes par arcs de $\mathbb{R}$)

Les connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont ses convexes, i. e. *ses intervalles.*

Démonstration

Chaque intervalle est connexe par arcs car convexe. Soit réciproquement I un connexe par arcs de $\mathbb{R}$, soient $a, b \in I$ et soit $c : [0,1] \longrightarrow I$ un chemin continu de a à b : l'image $\operatorname{Im} c$ inclut alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, le segment $[c(0), c(1)] = [a, b]$, d'où la convexité de I.

Application **(ouverts de $\mathbb{R}$)** : soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. Chaque ensemble muni d'une relation d'équivalence étant partitionné par ses classes d'équivalences, la partie O est réunion de ses composantes connexes par arcs. Chacune de ces dernières étant d'une part un intervalle (par le théorème précédent), d'autre part ouverte (par une remarque précédente), l'ouvert O est réunion disjointe d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. On montrera au chap ? ? ? que l'ensemble de ces intervalles ouverts est dénombrable, au sens d'être en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

On se gardera cependant de vouloir ordonner "naturellement" ces intervalles : l'application $\Omega \mapsto \coprod_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1+\Omega}{2^n}$ stabilise en effet l'ensemble des ouverts inclus dans $[0,1]$ et nous laissons à la lectrice et au lecteur le plaisir (hors programme) de découvrir la complexité[165] des itérés de l'ouvert $]0,1[$ par cette application.

Remarque – **Connexes par arcs & intersection**. La convexité étant préservée par intersection, la connexité par arcs le sera si E est une droite réelle d'après le théorème précédent. Elle l'est également quand E est nul, chacune de ses parties (à savoir $\emptyset$ et E) étant alors connexe par arcs. Soit sinon $\binom{a}{b}$ libre dans E et notons $\binom{a'}{b'} := \binom{-a}{-b}$: les réunions $[a, b] \cup [b, a']$ et $[a, b'] \cup [b', a']$ sont alors chacune connexes par arcs (comme réunion de connexes par arcs ayant un point en commun) mais leur intersection $\{a, a'\}$ n'est pas connexe par arcs (comme partie de cardinal 2 vu que a n'est pas nul). Total :

la connexité par arcs n'est pas préservée par intersection (sauf si $\dim_{\mathbb{R}} E \leq 1$).

FIG

[163] Ceci montre au passage que le caractère fermé (contrairement à celui ouvert) ne passe pas aux composantes connexes par arcs.

[164] Ce contre-exemple s'adapte à l'espace vectoriel normé E en considérant l'"oursin" $\bigcup_{a \in A}]0, a]$ où l'on a imposé A dense et d'intérieur vide dans la sphère unité de E. Une telle partie A peut s'obtenir à partir d'une partie dense et d'intérieur vide dans un hyperplan affine (formée par exemple de vecteurs de norme rationnelle) et en envoyant ce dernier sur la sphère unité de E (privée d'un point) à l'aide d'une projection stéréographique.

[165] On effleure ici les très hors programme nombres ordinaux qui permettent justement de mettre un peu d'"ordre" dans cette complexité.

Exercices d'application

1. *Quelles sont dans $\mathbb{R}$ les composantes connexes par arcs de $\mathbb{Q}$? de $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$?*
2. *Déterminer les composantes connexes par arcs dans $\mathbb{R}^2$ des parties respectives formées des couples dont*
   (a) *chaque coordonnée est rationnelle ;*
   (b) *aucune coordonnée n'est rationnelle ;*
   (c) *au moins une coordonnée est rationnelle ;*
   (d) *au plus une coordonnée est rationnelle ;*
   (e) *exactement une coordonnée est rationnelle.*
3. *Soit $n \geq 1$ un naturel et soit $r \in [0, n|]$.*
   (a) *Montrer que les matrices idempotentes de $M_n(\mathbb{C})$ de trace r forment une partie connexe par arcs.*
   (b) *Même question en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$.*
4. *Soit $C \subset E$ un convexe tel que $C \subset A \subset \overline{C}$.*
   (a) *(plus difficile) Montrer pour chaque $a \in A$ l'existence d'un chemin continu dans A de fin a et d'origine un point de C.*
   (b) *En déduire que A est connexe par arcs.*
   (c) *Le résultat tient-il en remplaçant l'hypothèse « C convexe » par « C connexe par arcs » ?*

---

1. Soient a, b reliables dans $\mathbb{Q}$ par un chemin continu : si $a \neq b$, ce chemin atteindra (par le théorème des valeurs intermédiaires) chaque point de l'intervalle $]a, b[$, donc atteindra (par densité de $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ dans $]a, b[$) un irrationnel, ce qui sera absurde. Par conséquent, les composantes connexes par arcs de $\mathbb{Q}$ sont ses singletons.

   Raisonnement analogue en échangeant partout les parties denses $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$.

   Remarque – *Culture.* Les parties $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ sont dites ***totalement discontinues***.

2.
   (a) Soient $\binom{a}{b}$ et $\binom{\alpha}{\beta}$ dans $\mathbb{Q}^2$, soit c un chemin continu les reliant dans $\mathbb{Q}^2$. L'application continue "abscisse de c" a alors pour image un intervalle réel inclus dans $\mathbb{Q}$ (même argument qu'à l'exercice 1), donc est un singleton, d'où l'égalité $a = \alpha$ (et l'on montrerait de même celle $b = \beta$). Finalement, les composantes connexes par arcs de $\mathbb{Q}^2$ sont ses singletons.
   (b) Raisonnement analogue[166] en échangeant partout les parties denses $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$.

[166] Les parties $\mathbb{Q}^2$ et $(\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})^2$ sont donc totalement discontinues.

(c) Soit $\binom{a}{b} \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \in \mathbb{Q}$: la ligne droite de $\binom{a}{b}$ à $\binom{a}{0}$ prend alors ses valeurs dans l'espace considéré (car est d'abscisse constante a rationnelle), de même pour la ligne droite de $\binom{a}{0}$ à $\binom{0}{0}$ (car est d'ordonnée constante 0 rationnelle). Un raisonnement analogue tiendrait en supposant $b \in \mathbb{Q}$ au lieu de $a \in \mathbb{Q}$. Finalement, $\mathbb{R}^2 \Big\backslash (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2$ est connexe par arcs.

(d) Raisonnement analogue en remplaçant le rationnel 0 par l'irrationnel $\sqrt{2}$.

(e) Établissons que les composantes connexes par arcs de la partie considérée sont ses singletons. L'idée est de remarquer que, pour chaques rationnels $p, q \in \mathbb{Q}^*$, la partie considérée ne rencontre pas la droite d'équation $y = px + q$, ce qui constitue autant d'"obstacles" aux chemins continus dans cette partie. Nous utiliserons uniquement les droites de pentes $p = \pm 1$.

Soient P et Q deux points du plan $\mathbb{R}^2$ et soit c un chemin de P à Q dans la partie considérée. Si l'on trouve un rationnel q tel que les points P et Q soient d'une part et d'autre de la droite d'équation $y = x + q$, l'application continue $t \mapsto x_{c(t)} + q - y_{c(t)}$ devra alors s'annuler par le théorème des valeurs intermédiaires, d'où un point d'une part sur la droite d'équation $y = x + q$, d'autre part dont l'une exactement des coordonnées est rationnelle – ce qui est impossible puisque la différence q de ces coordonnées est rationnelle. Par conséquent[167], l'application $t \mapsto (x_P + t - y_P)(x_Q + t - y_Q)$ est positive sur $\mathbb{Q}$, *a fortiori* sur $\mathbb{R}$ (par continuité), donc les racines de cette application polynomiale de degré 2 sont confondues, ce qui s'écrit $y_P - x_P = y_Q - x_Q$. Un raisonnement analogue avec les droites de pentes -1 livrerait les égalités $y_P + x_P = y_Q + x_Q$. Additionner et soustraire ces deux égalités fournit alors $\binom{2x_P}{2y_P} = \binom{2x_Q}{2y_Q}$, d'où l'égalité $P = Q$, *c. q. f. d.*

3.

(a) Notons C la partie considérée et montrons qu'elle est "étoilée par arcs en $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$", au sens où chacun de ses éléments y est continûment reliable à $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui conclura. Soit donc $p \in C$, soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tels que $p = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ (permis car p est un projecteur de trace[168] r) et soit c un chemin continu dans $GL_n(\mathbb{C})$ de P à I_n (permis car $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs). Le chemin continu $t \mapsto c(t) \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} c(t)^{-1}$ est alors à valeurs dans C (conjuguer le projecteur $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ par $c(t)$ donne un projecteur de même trace r) et va de $c(0) \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} c(0)^{-1} = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = p$ à $c(1) \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} c(1)^{-1} = I_n \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} I_n = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui conclut.

(b) D'une part le raisonnement précédent s'adapte si $\det P > 0$ en utilisant la connexité par arcs de $GL_n^+(\mathbb{R})$, d'autre part la conclusion reste valide si $r = n$ (auquel cas le singleton $P_r = \{I_n\}$ est connexe par arcs). Dans les

[167] Notre preuve, qui en substance utilise juste la continuité des deux applications $(a, b) \mapsto a \pm b$, permet d'éviter les pénibles discussions de cas sur les positions relatives des points P et Q.

[168] *Rappel* : pour chaque corps K, chaque projecteur $p \in M_n(K)$ a pour trace $(\operatorname{rg} p) 1_K$.

cas contraires, on se ramène au cas $\det P > 0$ en remplaçant[169] P par $Q := P\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ vu les égalités $\det Q = \det P \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} = -\det P$ et[170]

$$\begin{aligned} Q\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} &= P\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\overset{r\leq n}{=} P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = p. \end{aligned}$$

4.

(a) Soit $a \in A$, soit $c \in C^{\mathbb{N}}$ tendant vers a (permis car $a \in A \subset \overline{C}$), soit $t \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ croissant strictement de 0 à 1 (on a alors l'égalité $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [t_n, t_{n+1}[= [0,1[$) et notons[171] ℓ le chemin dans C de fin a tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \lambda \in [t_n, t_{n+1}[\,,\ \ell(\lambda) = \frac{t_{n+1}-\lambda}{t_{n+1}-t_n} c_n + \frac{\lambda - t_n}{t_{n+1}-t_n} c_{n+1}.$$

FIG observer $\ell(t_n) = c_n$

Le chemin ℓ est alors à $n \in \mathbb{N}$ fixé continu sur $]t_n, t_{n+1}[$ (comme restriction d'une ligne droite) et est continu en t_n (car tend vers $c_n = \ell(t_n)$ à droite et (si $n > 0$) à gauche en t_n), donc est continu sur la réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [t_n, t_{n+1}[= [0,1[$. Il suffit donc pour conclure de montrer da continuité en 1.

Soit $\varepsilon > 0$ un réel, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(a, c_n) < \varepsilon$ pour chaque naturel $n > N$ (permis car $c \longrightarrow a$), soit $\lambda \in [t_N, 1] = \bigcup_{n\geq N}^{n\in\mathbb{N}} [t_n, t_{n+1}[$ et soit $n \geq N$ un naturel tel que $\lambda \in [t_n, t_{n+1}[$: la boule $\mathring{\mathcal{B}}(a, \varepsilon)$ contient alors les points c_n, c_{n+1} et est convexe, donc inclut le segment $[c_n, c_{n+1}]$, *a fortiori* le point $\ell(\lambda)$, d'où la majoration $\|\ell(\lambda) - \ell(1)\| < \varepsilon$, ce qui conclut.

(b) Soient $a, a' \in A$ et soient $c, c' \in C$ reliables continûment dans A resp. à a, a' (permis par la question précédente) : la connexité par arcs de C permet alors de relier continûment c et c' dans C (donc dans A), d'où par transitivité un chemin continu de a à a', *c. q. f. d.*

(c) Supposons cette fois C connexe par arcs et remplaçons dans la définition de ℓ la ligne droite (de c_n à c_{n+1}) par un chemin continu dans C : notre preuve s'adapte alors très bien, à l'exception (détail en toute fin !) de l'appartenance[172] $\ell(\lambda) \in [c_n, c_{n+1}]$. Et pour cause : l'adhérence de chaque connexe par arcs étant comprise entre un connexe par arcs (lui-même) et son adhérence, elle serait (si l'on pouvait effectivement affaiblir l'hypothèse comme indiqué) connexe par arcs, ce qui contredirait une remarque

[169] En termes de base, l'idée est la suivante : étant donnée une base diagonalisant le projecteur p, opposer son dernier vecteur donne encore une base diagonalisant p avec une matrice de passage de déterminant négatif.

[170] *Attention* : si l'on n'exclut pas le cas $r = n$, le produit $\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ pourra valoir I_n et non p !

[171] Le chemin ℓ décrit le recollement de l'infinité des lignes droites $[c_n, c_{n+1}]$ qui "convergent" vers $\{a\}$. Ses valeurs sont bien dans C par convexité de ce dernier.

[172] En effet, n'étant *a priori* plus des lignes droites, les chemins de c_n à c_{n+1} pourraient partir "très loin" de a quand $n \to \infty$.

du cours affirmant que la connexité par arcs n'est pas préservée par adhérence.

4.4 Théorème des valeurs intermédiaires

Proposition[173] (théorème des valeurs intermédiaires)

Imposons A connexe par arcs et soit f une application <u>continue</u> *de source A à valeurs dans un espace vectoriel normé. L'image directe $f(\overline{A})$ est alors connexe par arcs.*

Démonstration : soient $i, \iota \in \operatorname{Im} f$, soient $a, \alpha \in A$ tels que $\begin{pmatrix} i \\ \iota \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(a) \\ f(\alpha) \end{pmatrix}$, soit $c : [0,1] \longrightarrow A$ continu de a à α. La composée $f \circ c$ est alors un chemin continu $[0,1] \longrightarrow \operatorname{Im} f$ de $f(c(0)) = f(a) = i$ à $f(c(1)) = f(\alpha) = \iota$, ce qui conclut.

Exemples Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *Sanity checks* :
   (a) Le cercle $\mathbb{U}$ est l'image du connexe par arcs $\mathbb{R}$ par l'application continue $t \mapsto e^{it}$, donc est connexe par arcs.
   (b) L'image $\mathbb{R}^*$ du groupe $GL_n(\mathbb{R})$ par l'application continue det n'étant pas connexe par arcs, ce groupe n'est pas connexe par arcs[174].
   (c) Quand $A = E = \mathbb{R}$, l'image continue de chaque segment est un segment (d'après le théorème des valeurs intermédiaires vu en première année), lequel est bien connexe par arcs.
   (d) Imposons A finie et connexe par arcs : pour chaque $\alpha \in A$, l'image directe de A par l'application continue "distance à $\{\alpha\}$" est alors un connexe par arcs fini de $\mathbb{R}$ contenant $d(\alpha, \alpha) = 0$, *i. e.* un intervalle réel fini contenant 0, à savoir $\{0\}$, d'où les égalités $\forall a \in A,\ d(a, \alpha) = 0$, *i. e.* (par séparation) les égalités $\forall a \in A,\ a = \alpha$, d'où l'inclusion $A \subset \{\alpha\}$. Finalement, A est de cardinal au plus 1.

2. Dans les hypothèses du théorème ci-dessus, l'application $a \mapsto (a, f(a))$ est continue et a pour l'image le graphe de f, ce qui montre que[175]

   le graphe de chaque application continue de source connexe par arcs est connexe par arcs.

3. Dans les hypothèses du théorème ci-dessus, si le connexe par arcs $\operatorname{Im} f$ est de plus fini, il est alors de cardinal au plus 1 (*cf.* exemple 5 section 4.3), ce qui montre que

   chaque application continue de but fini (non vide) et de source connexe par arcs est constante.

[173] En termes concis : *la connexité par arcs est préservée par image continue.*
[174] Nous avions en fait utilisé *exactement* le même argument à l'exemple 8 section 4.3.
[175] *Sanity check* : on retrouve la connexité par arcs de la partie A de l'exemple 10 section 4.3.

4. Pour chaque réel $r > 0$ et chaque point $c \in E$, l'application $a \mapsto c + r\frac{a}{\|a\|}$ est continue et sa source $E\setminus\{0\}$ est connexe par arcs (sauf si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si E est une droite). Il s'ensuit que

   chaque sphère de E est connexe par arcs (sauf si E est une droite réelle).

5. Si le complémentaire de la sphère unité de E était connexe par arcs, son image par l'application "norme" serait un connexe par arcs de $\mathbb{R}_+$; or cette image vaut $\mathbb{R}_+\setminus\{1\}$ dès que E est non nul. Par conséquent :

   le complémentaire de la sphère unité de E
   n'est pas connexe par arcs (sauf si E est nul).

6. Le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ est l'image du connexe par arcs $\mathbb{R}$ par l'application continue $t \mapsto \left(\begin{smallmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cot t\end{smallmatrix}\right)$, donc est connexe par arcs[176]. Nous utiliserons ce résultat au chapitre ? ? ? pour établir fixé la connexité par arcs du groupe $SO_n(\mathbb{R})$.
7. Imposons A connexe par arcs et soit $B \subset E$ connexe par arcs : la somme $A+B$ est alors l'image du connexe par arcs $A\times B$ par l'addition $(a,b)\mapsto a+b$ continue, donc est connexe par arcs. Le raisonnement tiendrait en remplaçant « addition » par « multiplication » en rajoutant des hypothèses convenables :

   est connexe par arcs la somme de chaque
   famille finie de parties connexes par arcs
   et, si E est de plus une algèbre à multiplication continue, alors
   est connexe par arcs le produit de chaque
   famille finie de parties connexes par arcs

8. *Sanity check* : les parties $\mathbb{C}^*$ et $SL_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs, donc leur produit $GL_n(\mathbb{C})$ par la multiplication continue $(\lambda, s)\mapsto \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & I_{n-1}\end{pmatrix} s$ est connexe par arcs. Le même raisonnement avec les parties $\mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{R}_-^*$) et $SL_n(\mathbb{R})$ nous ferait retrouver la connexité par arcs de la partie $GL_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $GL_n^-(\mathbb{R})$).
9. Dans l'ensemble P des matrices idempotentes de $M_n(\mathbb{K})$, l'exercice 3 section 4.3 montrait que les $n+1$ parties maximales de trace constante étaient chacune connexes par arcs. Soit par ailleurs C une composante connexe par arcs de P : l'image continue $\operatorname{tr} C$ est alors un connexe par arcs (non vide) de la partie finie $[0,n|]$, *i. e.* est un singleton, ce qui montre que C est incluse dans l'une des $n+1$ parties précédentes. Ces dernières sont par conséquent les composantes connexes par arcs de P.
10. Imposons A connexe par arcs, soient $F,G\subset A$ fermés (relatifs) tels que $A = F\amalg G$ et imposons $\binom{f_{|F}}{f_{|G}} = \binom{0}{1}$. Un exemple section 2.1 montre alors la continuité de f, donc son image $f(A)$ est un connexe par arcs de la partie finie $\{0,1\}$, *i. e.* vaut $\{0\}$ ou $\{1\}$ ou $\emptyset$, d'où l'une des inclusions $\substack{A\subset F\\ A\subset G}$ et l'égalité $\{F,G\} = \{\emptyset, A\}$. Finalement :

    aucune partie connexe par arcs n'est la réunion
    disjointe de deux de ses fermés non vides.

[176] *Culture* : les groupes $\mathbb{U}$ et $SO_2(\mathbb{R})$ étant homéomorphes, la connexité par arcs de l'un équivaut à celle de l'autre.

En termes contraposés, plus affirmatifs[177] :

dans chaque connexe par arcs, chaque
partie ouverte et fermée est vide ou pleine.

Culture hors programme : nous venons de montrer que *chaque partie connexe par arcs est connexe* (au sens de la section 4.1), la réciproque étant valide quand A est *ouvert* (chacune de ses composantes connexes par arcs étant alors ouverte et fermée dans A) mais fausse en général[178], par exemple lorsque A vaut le "peigne" étudié plus haut ou encore l'adhérence dans le plan du graphe de $t \mapsto \sin \frac{1}{t}$ (deux bons exercices).

11. Soit $B \subset E$ telle que $d\left(\overline{A}, \overline{B}\right) > 0$. Le caractère disjoint des fermés $\overline{A}$ et $\overline{B}$ permet alors de calculer l'adhérence relative

$$\underset{A \amalg B}{\operatorname{Adh}} A = \overline{A} \cap (A \cup B) = \left(\overline{A} \cap A\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) \subset A \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = A,$$

d'où le caractère fermé de A dans $A \amalg B$. On montrerait de même que B est fermé dans $A \amalg B$ et l'exemple 10 impose alors, si $A \amalg B$ était connexe par arcs, la vacuité de l'une des parties A ou B. Conclusion[179] :

la réunion de chaque paire de parties non vides
d'adhérences disjointes n'est pas connexe par arcs .

FIG

Sanity check : la réunion $[-2, -1] \cup [1, 0]$ n'est pas connexe par arcs, aucune partie finie de cardinal au moins 2 n'est connexe par arcs.

Remarques

• **Connexes par arcs & intérieur**. Pour chaques $a, b \in E$ tels que $d(a, b) > 2$, la réunion $\mathring{\mathcal{B}}(a, 1) \cup [a, b] \cup \mathring{\mathcal{B}}(b, 1)$ est connexe par arcs mais son intérieur vaut $\mathring{\mathcal{B}}(a, 1) \cup \mathring{\mathcal{B}}(b, 1)$ dès que E inclut un plan réel et n'est alors pas connexe par arcs d'après l'exemple 11 (les adhérences $\overline{\mathcal{B}}(a, 1)$ et $\overline{\mathcal{B}}(b, 1)$ des réunis sont disjointes).

FIG "haltère"

Par ailleurs, si E est nul ou est une droite réelle, ses connexes sont ses intervalles, lesquels sont préservés par l'application "intérieur". Total :

la connexité par arcs n'est pas préservée par intérieur (sauf si $\dim_{\mathbb{R}} E \leq 1$).

• **Connexes par arcs & frontière**. Chaque segment infini de $\mathbb{R}$ est connexe par arcs et a une frontière non connexe par arcs (car formée de deux éléments). Par ailleurs, si E n'est pas une droite réelle, la "bande sphérique" formée des vecteurs

[177] En particulier, à l'exception des cas triviaux $\emptyset$ et E, *l'espace vectoriel normé E n'admet aucune partie ouverte et fermée.*

[178] La lectrice et le lecteur intéressés par ces subtilités topologiques (bien loin des concours) pourront consulter avec profit l'ouvrage *Counterexamples in Topology* de Lynn Arthur Steen et J. Arthur Seebach, Jr publié en 1970 (puis 1978).

[179] Il serait immédiat de généraliser ce résultat à chaque famille d'au moins deux parties (non vides) dont chaque distance mutuelle est non nulle.

de norme appartenant à $[1,2]$ est connexe par arcs (image continue par $(\lambda, s) \mapsto \lambda s$ du produit de connexes par arcs $[1,2] \times \mathcal{S}(0,1)$) et a pour frontière $\mathcal{S}(0,1) \cup \mathcal{S}(0,2)$ (utiliser l'égalité $\mathcal{N}^{-1}(I \setminus J) = \mathcal{N}^{-1}(I) \setminus \mathcal{N}^{-1}(J)$ avec $I := [1,2]$ et $J :=]1,2[$) qui n'est pas connexe par arcs (réunion finie de fermés disjoints). Conclusion[180] :

FIG bande sphérique

la connexité par arcs n'est pas préservée par frontière (sauf si E est nul).

L'exercice 5c ci-dessous montre cependant que chaque fermé est connexe par arcs si sa frontière est connexe par arcs.

Applications

1. Appelons ***homéomorphisme*** toute bijection continue de réciproque continue. Montrons alors l'absence d'homéomorphisme entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ ainsi qu'entre[181] $\mathbb{R}$ et $\mathbb{U}$, de trois façons différentes.

   (a) Chaque bijection continue $h : \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ induit par restriction une bijection $\mathbb{C} \setminus \{0\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \setminus \{h(0)\}$ continue de source connexe par arcs et de but non connexe par arcs, ce qui contredit le théorème des valeurs intermédiaires. Il n'y a donc aucune telle bijection, *a fortiori* aucun homéomorphisme entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$. Raisonnement et conclusion inchangés en remplaçant partout $\mathbb{C}$ et 0 resp. par $\mathbb{U}$ et 1.

   (b) Chaque injection continue[182] $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{R}$ induit par restriction une injection continue $u : \mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{R}$ dont l'image est un connexe par arcs compact non vide (car $\mathbb{U}$ est connexe par arcs, compact et non vide), *i. e.* un segment S. Pour chaque $s \in S$, la restriction de u au connexe par arcs $\mathbb{U} \setminus \left\{u^{-1}(s)\right\}$ est alors continue, donc son image $S \setminus \{s\}$ est connexe par arcs, d'où l'appartenance $s \in \{\min S, \max S\}$, ce qui montre que $S = u(\mathbb{U})$ est un singleton, contredisant l'infinitude de $\mathbb{U}$ et l'injectivité de u.

   (c) Chaque injection continue $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{R}$ induit par restriction une injection continue $u : \mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{R}$ et la composée de u à droite par la bijection continue $\left\{ \begin{array}{ccc}]-1,1] & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{U} \\ t & \longmapsto & e^{\pi i t} \end{array} \right.$ livre une injection continue $]-1,1] \hookrightarrow \mathbb{R}$ tendant en -1 et en 1 vers $u(-1)$, ce qui contredit sa stricte monotonie.

   Remarque – Les deux dernières preuves montrent un peu plus que demandé (ni $\mathbb{C}$ ni $\mathbb{U}$ ne peuvent s'injecter continûment dans $\mathbb{R}$), la dernière recourt exclusivement à des outils d'analyse réelle (de première année).

2. Donnons une troisième preuve du théorème de Darboux[183]. Soit I un intervalle réel infini, soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable, notons $T := \left\{(i,j) \in I^2 \ ; \ i < j\right\}$ (lequel "triangle" est connexe par arcs car convexe), $F := \left\{ \begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \binom{a}{b} & \longmapsto & \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \end{array} \right.$ (laquelle est continue car f est continue) et $C := \operatorname{Im} F$ (laquelle image est

[180] On peut également si l'on dispose d'un hyperplan fermé H évoquer un point $a \in E \setminus H$ et considérer la "bande hyperplane" $H + [0,1]\, a$.

[181] On dit que $\mathbb{R}$ n'est ***homéomorphe*** ni à $\mathbb{C}$ ni à $\mathbb{U}$.

[182] Remarque – Chaque homéomorphisme est injectif et continu.

[183] Deux autres preuves sont données au chapitreCOnveité ? ? ?

connexe par arcs, *i. e.* est un intervalle, comme image continue du connexe par arcs T). L'image $\operatorname{Im} f'$ inclut alors l'intervalle C (d'après les égalités des accroissements finis) et est incluse dans son adhérence $\overline{C}$ (chaque nombre dérivé étant limite d'un taux d'accroissement), donc est un intervalle[184], *c. q. f. d.*

3. Soit $r : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ continue telle que $\forall c \in \mathbb{C}^*, \ r(c)^2 = c$. Chaque image par l'application $c \mapsto \frac{r(-c)}{r(c)}$ étant alors de carré -1, cette application continue est à valeurs dans la paire $\{-i, i\}$; étant par ailleurs de source $\mathbb{C}^*$ connexe par arcs, elle est constante. En notant ε sa valeur constante (de carré $(\pm i)^2 = -1$), on a alors à $c \in \mathbb{C}^*$ fixé les égalités

$$r(c) = r(-(-c)) = \varepsilon\, r(-c) = \varepsilon^2\, r(c) = -r(c)\,, \text{ d'où } r(c) = 0,$$

contredisant l'inclusion $\operatorname{Im} r \subset \mathbb{C}^*$. Il n'y a par conséquent aucune racine carrée continue sur $\mathbb{C}^*$, aucun moyen d'exprimer *globalement*[185] et *continûment* les racines du binôme $X^2 - a = (X - r(a))(X + r(a))$ pour chaque complexe $a \neq 0$ (on peut toutefois le faire localement ou non continûment).

Exercices d'application

1. *Dans l'espace vectoriel $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$ muni de la norme uniforme, déterminer les composantes connexes par arcs des parties formées resp. par les applications*
   (a) *tendant vers 0 en ∞ ;*
   (b) *convergeant en ∞ ;*
   (c) *croissantes ;*
   (d) *strictement croissantes ;*
   (e) *s'annulant une infinité de fois ;*
   (f) *périodiques.*
2. *Soit $n \geq 1$ un naturel et étudier la connexité par arcs de la partie de $GL_n(\mathbb{K})$ formée des matrices diagonales.*
3. *Imposons que E soit de dimension finie et que A soit un sous-espace vectoriel de E. Montrer alors que le complémentaire $E \setminus A$ est connexe par arcs ssi*[186] *A n'est pas un hyperplan réel de E.*
4. *Montrer l'absence d'application*[187] *$\alpha : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\forall c \in \mathbb{C}^*, \ c = |c|\, e^{i\alpha(c)}$.*
5.
   (a) *Soient F, G deux fermés de E tels que $F \cup G$ et $F \cap G$ sont connexes par arcs. Montrer alors que F et G sont connexes par arcs.*

[184] Chaque partie de $\mathbb{R}$ comprise entre un intervalle et son adhérence s'obtient en effet à partir de l'intervalle considéré en rajoutant (peut-être) l'une ou l'autre de ses bornes. *Sanity check* : utiliser l'exercice 4 section 4.3.

[185] *Culture* : voici typiquement un exemple d'énoncé *local* (existence d'une racine carrée continue) dont la version *globale* n'est pas valide.

[186] *Culture* : la condition nécessaire et suffisante donnée se réécrit $\operatorname{codim}_{\mathbb{R}} A \neq 1$.

[187] α comme « **argument** »

(b) *Discuter les hypothèses.*

(c) *Montrer la connexité par arcs de chaque fermé dont la frontière est connexe par arcs. Discuter les hypothèses.*

---

1. Montrons que chaque partie considérée est connexe par arcs : elle n'inclura alors qu'une seule composante connexe par arcs (elle-même).

   (a) La partie considérée est un sous-espace vectoriel, donc connexe par arcs.

   (b) *Idem.*

   (c) La partie considérée est convexe[188], donc connexe par arcs.

   (d) *Idem.*

   (e) La partie considérée est étoilée[189] en 0, donc connexe par arcs.

   (f) *Idem.*

2. Dans le cas complexe $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la partie considérée est l'image par l'application continue $\lambda \mapsto \operatorname{Diag} \lambda$ du connexe par arcs $\mathbb{C}^{*n}$ (puissance cartésienne finie du connexe par arcs $\mathbb{C}^*$), donc est connexe par arcs.

   Dans le cas réel $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, les matrices diagonales $I_n \in GL_n^+(\mathbb{R})$ et $I_n - 2E_{1,1} \in GL_n^-(\mathbb{R})$ n'étant pas dans la même composante connexe par arcs de $GL_n(\mathbb{R})$ (*cf.* exemple 8 section 4.3), la partie considérée n'est pas connexe par arcs.

   Remarque – La bijection $\Delta : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\sim} & \{\text{matrices diagonales de } M_n(\mathbb{K})\} \\ \lambda & \longmapsto & \operatorname{Diag} \lambda \end{cases}$ étant un isomorphisme d'espaces vectoriels normés qui préserve les normes uniformes, les composantes connexes par arcs de la partie considérée sont les images réciproques par Δ de celles de son image réciproque $\mathbb{K}^{*n}$. Nous laissons à la lectrice et au lecteur le soin de montrer que les 2^n composantes connexes par arcs de $\mathbb{R}^{*n}$ sont les $\prod_{i=1}^n \mathbb{R}^*_{\varepsilon_i}$ où ε parcourt $\{-,+\}^n$. En d'autres termes, deux matrices a, b diagonales sont reliables continûment dans $GL_n(\mathbb{R})$ ssi $\forall i \in [1,n|]\,,\ a_i b_i > 0$.

3. Si $\dim_{\mathbb{R}} A = \dim_{\mathbb{R}} E$, le sous-espace A est alors plein et son complémentaire est vide, *a fortiori* connexe par arcs.

   Si $\dim_{\mathbb{R}} A = \dim_{\mathbb{R}} E - 1$, soit[190] alors φ une forme linéaire non nulle de noyau A : si ${}^cA$ était connexe par arcs, son image $\mathbb{R}^*$ par φ (laquelle est continue car E est de dimension finie) serait alors connexe par arcs, ce qui serait absurde.

   Supposons enfin $\dim_{\mathbb{R}} A \leq \dim_{\mathbb{R}} E - 2$ et soit S un sous-espace vectoriel supplémentaire de A, de sorte à avoir les égalités $A \oplus S = E$ et ${}^cA = A + (S \setminus \{0\})$. Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel S étant alors de dimension $\dim_{\mathbb{R}} E - \dim_{\mathbb{R}} A \geq 2$, l'espace épointé $S \setminus \{0\}$ est connexe par arcs (*cf.* exemple 6 section 4.3) ; le sous-espace vectoriel A étant par ailleurs connexe par arcs, la somme $A + (S \setminus \{0\})$ est connexe par arcs (*cf.* exemple 7 section 4.4), *c. q. f. d.*

   Remarque – Lorsque E n'est plus de dimension finie, tout ce qui précède pourrait s'adapter et la condition nécessaire et suffisante simple deviendrait « A n'est pas un hyperplan réel *fermé*[191] » (afin de garantir la continuité du φ ci-dessus).

---

[188] Même si elle n'est pas un sous-espace vectoriel, l'opposé de Id décroissant strictement.

[189] Même si elle n'est pas convexe, le milieu du segment $[1 - \sin, 1 + \sin]$ ne s'annulant jamais.

[190] *Rappel* : les hyperplans de E sont les noyaux de formes linéaires non nulles.

[191] La lectrice et le lecteur intéressés trouveront plus de détails à l'exercice d'entraînement 8.

4. Nous proposons trois preuves. Soit par l'absurde un tel α.

(a) L'application $r := c \mapsto \sqrt{|c|}e^{i\frac{\alpha(u)}{2}}$ est continue et vérifie $\forall c \in \mathbb{C}^*,\ r(c)^2 = c$, ce qu'exclut l'application 3 ci-dessus.

(b) La restriction $\alpha_{|\mathbb{U}}$ est d'une part continue et réelle, d'autre part injective vu à $u \in \mathbb{U}$ fixé les égalités $u = |u|\, e^{i\alpha(u)} = e^{i\alpha(u)}$, ce qu'exclut l'application 1b ci-dessus.

(c) L'application $\theta := \left\{ \begin{array}{ccc} [0, 2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \alpha\left(e^{it}\right) \end{array} \right.$ est continue et tend en 2π (par continuité de α) vers $\alpha\left(e^{i2\pi}\right) = \alpha\left(e^{i0}\right) = \theta(0)$; étant par ailleurs injective vu à $t, u \in [0, 2\pi[$ fixés les implications

$$\begin{aligned} \theta(t) = \theta(u) \quad & \Longrightarrow \quad e^{i\theta(t)} = e^{i\theta(u)} \Longrightarrow e^{i\alpha\left(e^{it}\right)} \underset{\text{de } \theta}{\overset{\text{définition}}{=}} e^{i\alpha\left(e^{iu}\right)} \\ & \underset{\text{sur } \alpha}{\overset{\text{hypothèse}}{\Longrightarrow}} \quad e^{it} = e^{iu} \Longrightarrow t = u \ \ [2\pi] \overset{|t-u|<2\pi}{\Longrightarrow} t = u, \end{aligned}$$

elle croît strictement, d'où la comparaison stricte $\theta(0) < \lim_{2\pi} \theta$ et la contradiction.

Remarque – Nous venons de montrer l'absence d'argument continu défini globalement sur $\mathbb{C}^*$. Rappelons au passage que l'application $c \mapsto 2 \arctan \frac{\operatorname{Re} c}{|c| + \operatorname{Im} c}$ est un argument continu sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$:

FIG

5.

(a) Soient $a, b \in F$, soit c un chemin continu dans $F \cup G$ de a à b (permis car $F \cup G$ est connexe par arcs) et notons $\Gamma := c^{-1}(G)$, laquelle partie est fermée dans $[0, 1]$ (comme préimage continue du fermé G). Si Γ est vide, le chemin c est à valeurs dans $(F \cup G) \setminus G \subset F$ et on a terminé ; imposons donc le contraire, ce qui donne sens au réel $m := \min \Gamma$.

FIG

La restriction $c_{|[0,m[}$ est alors à valeurs dans F et le point $c(m) = \lim_{m^-} c$ reste dans F (si $m > 0$ par continuité de c et car F est fermé, sinon car $c(0) = a \in F$) , d'où l'appartenance $c(m) \in F \cap G$. On montrerait de même en notant $M := \max \Gamma$ l'appartenance $c(M) \in F \cap G$: la connexité par arcs de $F \cap G$ permet alors de relier $c(m)$ à $c(M)$ dans $F \cap G$, *a fortiori* dans F, d'où avec les restrictions $c_{|[0,m]}$ et $c_{|[M,1]}$ un chemin continu dans F de a à b, ce qui conclut.

(b) Les implications considérées étant tautologiques lorsque E est nul (chacune de ses parties étant alors connexe par arcs), on imposera E non nul pour la discussion, ce qui permet d'évoquer un vecteur $u \in E$ non nul. Montrons alors que chaque hypothèse est en général nécessaire, l'équivalence étant fausse en général

i. si $F \cup G$ n'est pas connexe par arcs (imposer $F = \{0, u\}$ et $G = \{0, 2u\}$),

ii. si $F \cap G$ n'est pas connexe par arcs (imposer $F = [0, u] \amalg [2u, 3u]$ et $G = \{0\} \amalg [u, 2u]$),

iii. si F ou G n'est pas fermé (imposer $F = [0, u[\amalg \{2u\}$ et $G = [u, 2u] \amalg \{3u\}$),

iv. pour un nombre fini de fermés supérieur à 3 (imposer $\binom{F}{G} = \binom{\emptyset}{E}$ et rajouter $\{0, nu\}$ pour autant de naturels $n \geq 1$ que l'on souhaite avoir de fermés).

Élargir les hypothèses permettrait toutefois d'établir la généralisation suivante : si $\mathcal{F}$ dénote un ensemble de fermés tel que, pour chaque partition $\mathcal{F} = \mathcal{G} \amalg \mathcal{H}$, les réunion et intersection de $\cup\mathcal{G}$ et $\cap\mathcal{H}$ sont connexes par arcs, alors chaque $F \in \mathcal{F}$ est connexe par arcs (remplacer $\mathcal{G}$ par $\{F\}$ et utiliser la question 5a).

(c) Soit F un fermé tel que $\operatorname{Fr} F$ est connexe par arcs et notons $G := E \Big\backslash \mathring{F}$. Le complémentaire G de l'ouvert $\mathring{F}$ est alors fermé, l'intersection $F \cap G = \overline{F} \cap \left({}^c\mathring{F}\right) = \overline{F} \Big\backslash \mathring{F} = \operatorname{Fr} F$ est connexe par arcs et la réunion $F \cup G \supset \mathring{F} \cup \left({}^c\mathring{F}\right) = E$ est connexe par arcs, donc le point 5a s'applique et livre la connexité par arcs de F (ainsi que de ${}^c\mathring{F}$).

Pour discuter les hypothèses, on impose de nouveau que E soit non nul.

Le résultat tombe en défaut sans l'hypothèse « $\operatorname{Fr} F$ connexe par arcs », le caractère fermé ne suffisant pas en général à assurer la connexité par arcs (imposer F réunion de deux fermés non vides disjoints).

Le résultat tombe en défaut sans l'hypothèse « F fermé » : pour chaque forme linéaire continue[192] $\varphi \neq 0$, la partie $E \setminus \operatorname{Ker} \varphi$ n'est pas connexe par arcs (sinon composer à gauche par φ un chemin continu d'un point de l'hyperplan $\varphi^{-1}(\{1\})$ à un point de l'hyperplan $\varphi^{-1}(\{-1\})$ livrerait une application $[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^*$ continue prenant deux valeurs de signes opposés) mais sa frontière $\operatorname{Ker} \varphi$ est connexe par arcs (comme sous-espace vectoriel).

5 Le point des compétences

Formulaire

On fixe deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F, une partie $A \subset E$ et une application $f : A \longrightarrow F$.

1. Tendances & limites

[192] *Culture hors programme* : l'existence d'une forme linéaire continue non nulle sur E (*i. e.* d'un hyperplan fermé) découle d'un théorème attribué d'une part à Hans Hanh (et publié en 1927 dans le *Journal de Crelle*), d'autre part à Stefan Banach (et publié en 1929 dans la revue *Studia Mathematica*). Le dit théorème de Hanh-Banach équivaut à une certaine forme de l'axiome du choix.

On notera θ l'une des applications $\mathrm{Id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ e & \longmapsto & e \end{array} \right.$ ou $\mathcal{N} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ e & \longmapsto & \|e\| \end{array} \right.$.

• **Tendance en un point adhérant à la source.** Soient $\alpha \in \overline{A}$ et $\ell \in F$. On dit que f ***tend vers*** ℓ ***en*** α si

$$f \underset{\alpha}{\longrightarrow} \ell \overset{\text{déf.}}{\iff} \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall a \in A,\ \|a - \alpha\| < \delta \Longrightarrow \|f(a) - \ell\| < \varepsilon.$$

On dit aussi que « $f(a)$ ***tend vers*** ℓ ***quand*** a ***tend vers*** α », tendance alors notée $f(a) \underset{a \to \alpha}{\longrightarrow} \ell$.

• **Tendances étendues**. Plus généralement, on va définir chacune des douze tendances du tableau suivant (où la lettre a est partout muette) :

source \ but	(cas $\ell \in F$) $f(a)$ tend vers ℓ	(cas $F = \mathbb{R}$) $f(a)$ tend vers ∞	(cas $F = \mathbb{R}$) $f(a)$ tend vers $-\infty$
quand a tend vers α (cas $\alpha \in \overline{A}$)	$f \underset{\alpha}{\longrightarrow} \ell$	$f \underset{\alpha}{\longrightarrow} \infty$	$f \underset{\alpha}{\longrightarrow} -\infty$
quand a tend vers ∞ (cas $A \subset \mathbb{R}$ non majorée)	$f \underset{\infty}{\longrightarrow} \ell$	$f \underset{\infty}{\longrightarrow} \infty$	$f \underset{-\infty}{\longrightarrow} \infty$
quand a tend vers $-\infty$ (cas $A \subset \mathbb{R}$ non minorée)	$f \underset{-\infty}{\longrightarrow} \ell$	$f \underset{\infty}{\longrightarrow} -\infty$	$f \underset{-\infty}{\longrightarrow} -\infty$
quand $\|a\|$ tend vers ∞ (cas A non bornée)	$f(a) \underset{\|a\| \to \infty}{\longrightarrow} \ell$	$f(a) \underset{\|a\| \to \infty}{\longrightarrow} \infty$	$f(a) \underset{\|a\| \to \infty}{\longrightarrow} -\infty$

À cette fin, pour chaque couple (i, j), la définition de la tendance située à la case (i, j) dans le tableau suivant s'obtient en substituant la i-ième case de la colonne tout à droite aux « $\cdots$ » de la j-ième case de la ligne tout en bas :

$f(a) \underset{a \to \alpha}{\longrightarrow} \ell$	$f(a) \underset{a \to \alpha}{\longrightarrow} \infty$	$f(a) \underset{a \to \alpha}{\longrightarrow} -\infty$	$\exists \delta > 0,\ \forall a \in A,$ $\|a - \alpha\| < \delta \Longrightarrow$
$f(a) \underset{a \to \infty}{\longrightarrow} \ell$	$f(a) \underset{a \to \infty}{\longrightarrow} \infty$	$f(a) \underset{a \to \infty}{\longrightarrow} -\infty$	$\exists M,\ \forall a \in A,$ $a > M \Longrightarrow$
$f(a) \underset{a \to -\infty}{\longrightarrow} \ell$	$f(a) \underset{a \to -\infty}{\longrightarrow} \infty$	$f(a) \underset{a \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$	$\exists M,\ \forall a \in A,$ $a < M \Longrightarrow$
$f(a) \underset{\|a\| \to \infty}{\longrightarrow} \ell$	$f(a) \underset{\|a\| \to \infty}{\longrightarrow} \infty$	$f(a) \underset{\|a\| \to \infty}{\longrightarrow} -\infty$	$\exists M,\ \forall a \in A,$ $\|a\| > M \Longrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0,\ \cdots$ $\|f(a) - \ell\| < \varepsilon$	$\forall N,\ \cdots\ f(a) > N$	$\forall N,\ \cdots\ f(a) < N$	but \ source

(les quantifications « $\exists M$ » (colonne de droite) et « $\forall N$ » (ligne du bas) portent indifféremment sur les entiers ou les réels).

• **Limite finie en un point adhérent à la source.** Soit $\alpha \in \overline{A}$. S'il y a un point de F vers lequel f tend en α, un tel point est alors unique, est appelé ***la limite de*** f ***en*** α et est noté

$$\lim_{\alpha} f := \text{l'unique } \ell \text{ tel que } f \underset{\alpha}{\longrightarrow} \ell \text{ (si cela fait sens).}$$

On parle aussi de « ***la limite de*** $f(a)$ ***quand*** a ***tend vers*** α », limite alors notée $\lim_{a\to\alpha} f(a)$.

• **Limites étendues.** Soit plus généralement[193] $\alpha \in \overline{A} \amalg \{-\infty, \infty\}$. S'il y a un point[194] de $F \amalg \{-\infty, \infty\}$ vers lequel $f(a)$ tend quand $\theta(a)$ tend vers α, un tel point est alors unique, est appelé ***la limite de*** $f(a)$ ***quand*** $\theta(a)$ ***tend vers*** α et est noté

$$\lim_{\theta(a)\to\alpha} f(a) := \text{l'unique } \ell \text{ tel que } f(a) \underset{\theta(a)\to\alpha}{\longrightarrow} \ell \text{ (si cela fait sens).}$$

Quand $\theta = \mathrm{Id}$, on parle plus simplement de « ***la limite de*** f ***en*** α », notée alors $\lim_\alpha f$.

• **Critère séquentiel de tendance.** Sous réserve que fassent sens les tendances suivantes, on a pour chaques $\begin{array}{c} \alpha \in \overline{A} \amalg \{-\infty, \infty\} \\ \ell \in F \amalg \{-\infty, \infty\} \end{array}$ l'équivalence

$$\left(f(a) \underset{\theta(a)\to\alpha}{\longrightarrow} \ell \right) \Longleftrightarrow \left(\forall a \in A^{\mathbb{N}},\ \left[\theta(a_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha \Longrightarrow f(a_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \right] \right).$$

• **Tendances dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.** Imposons que F soit un produit fini[195] $\prod F_i$ d'espaces vectoriels normés et, pour chaque i, notons f_i la i-ième application "coordonnée[196]" de f. On a alors pour chaque $\alpha \in \overline{A} \amalg \{-\infty, \infty\}$ et chaque $\ell \in \prod F_i$ l'équivalence

$$f(a) \underset{\theta(a)\to\alpha}{\longrightarrow} \ell \Longleftrightarrow \forall i,\ f_i(a) \underset{\theta(a)\to\alpha}{\longrightarrow} \ell_i.$$

• Imposons F de dimension finie et soit $B \subset F$ une partie basique. Pour chaque vecteur de base $\beta \in B$, notons f^β la β-ième application "coordonnée[197]" de f selon B. L'application f admet alors une limite finie en α ssi l'application "coordonnée" f^β admet une limite finie en α pour chaque $\beta \in B$.

• **Opérations algébriques sur les tendances.** Soient $\begin{array}{c} g : A \longrightarrow F \\ \lambda : A \longrightarrow \mathbb{K} \end{array}$ et $\begin{array}{c} \alpha \in \overline{A} \amalg \{-\infty, \infty\} \\ L, M \in F \amalg \{-\infty, \infty\} \\ \Lambda \in \mathbb{K} \amalg \{-\infty, \infty\} \end{array}$ tels que $\left\{ \begin{array}{l} f(a) \underset{\theta(a)\to\alpha}{\longrightarrow} L \\ g(a) \underset{\theta(a)\to\alpha}{\longrightarrow} M \\ \lambda(a) \underset{\theta(a)\to\alpha}{\longrightarrow} \Lambda \end{array} \right.$. Alors :

1. **(somme)** si $\{L, M\} \neq \{-\infty, \infty\}$, on a la tendance $f(a) + g(a) \underset{\theta(a)\to\alpha}{\longrightarrow} L + M$;
2. **(homothété)** si Λ et L sont finis, on a la tendance $\lambda(a) \cdot f(a) \underset{\theta(a)\to\alpha}{\longrightarrow} \Lambda \cdot L$;

[193] Le cas $\theta = \mathcal{N}$ correspond à la dernière ligne du tableau précédent. Quand $\theta = \mathrm{Id}$, les cas $\alpha \in \overline{A}$, $\alpha = \infty$ et $\alpha = -\infty$ correspondent resp. à ses deuxième, troisième et quatrième lignes.

[194] Les cas où ce point tombe dans F, vaut ∞ et vaut $-\infty$ correspondent resp. à la deuxième, troisième et quatrième colonne du tableau précédent.

[195] L'ensemble indexant est sous-entendu afin d'alléger les écritures : la lettre i est ainsi partout *muette*.

[196] définie par la composée de f à gauche par la i-ième projection canonique $\prod F_\iota \twoheadrightarrow F_i$

[197] définie par la composée de f à gauche par la projection sur la droite $\mathbb{K}\beta$ parallèlement à $\bigoplus_{b\neq\beta}^{b\in B} \mathbb{K}b$.

3. si F est en outre une algèbre à multiplication continue, *i. e.* telle que $\sup_{\|a\|=1=\|b\|}^{a,b\in F} \|ab\| < \infty$, alors
   (a) **(produit)** si $\{|L|, |M|\} \neq \{0, \infty\}$, on a la tendance $f(a)\, g(a) \underset{\theta(a)\to\alpha}{\longrightarrow} LM$;
   (b) **(inverse[198])** si $L \in \operatorname{Int} F^\times$, on a la tendance $\frac{1}{f(a)} \underset{\theta(a)\to\alpha}{\longrightarrow} \frac{1}{L}$;
   (c) **(quotient)** si $M \in \operatorname{Int} F^\times$, on a la tendance $\frac{f(a)}{g(a)} \underset{\theta(a)\to\alpha}{\longrightarrow} \frac{L}{M}$.

   Ces trois dernières tendances auront en particulier lieu si F est une algèbre *de dimension finie*[199].

• **Composition des tendances.** Soit G un espace vectoriel normé, soient $\begin{array}{l} \blacksquare \in F \amalg \{-\infty, \infty\} \\ L \in G \amalg \{-\infty, \infty\} \end{array}$ et g une application à valeurs dans G donnant sens à $g \circ f$. On a alors l'implication[200]

$$\left\{ \begin{array}{l} f \underset{\theta(a)\to\alpha}{\longrightarrow} \blacksquare \\ g \underset{\blacksquare}{\longrightarrow} L \end{array} \right. \Longrightarrow g(f(a)) \underset{\theta(a)\to\alpha}{\longrightarrow} L.$$

2. Continuité

• **Continuité ponctuelle.** Soit $a \in A$. La tendance $f \underset{a}{\longrightarrow} f(a)$ équivaut alors aux implications $\forall \overrightarrow{a} \in A^{\mathbb{N}},\ a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \Longrightarrow f(a_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a)$. Dans ce cas, l'application f est dite ***continue en*** a.

• **Continuité globale.** Soit D une partie de la source de f. L'application f est alors dite ***continue sur*** D si elle est continue en chaque point de D. L'ensemble des applications continues $D \longrightarrow F$ est noté $C^0(D, F)$ ou

$$C(D, F) := \{\varphi : D \longrightarrow F\ ;\ \forall d \in D,\ \varphi \text{ continue en } d\}.$$

On qualifie f de ***continue*** (tout court) si elle est continue sur sa source.

• **Opérations algébriques & continuité.** La partie $C(A, F)$ de F^A en est un sous-espace vectoriel. C'en sera même une sous-algèbre si F est en outre une algèbre à multiplication continue.

• **Composition & continuité.** Dès qu'elle fait sens, chaque composée d'applications continues est continue.

• **Densité & continuité.** Soit $D \subset E$ dense et soient $\varphi, \psi \in C(E, F)$ coïncidant sur D. Les applications φ et ψ sont alors égales.

• **Images réciproques & continuité.** Si l'application f est continue, alors :

---

[198] *Rappel* : pour chaque anneau R (*ring*), on note $R^\times$ la partie formée par les éléments inversibles de R.

[199] On a alors (hors-programme) l'égalité $\operatorname{Int} F^\times = F^\times$.

[200] *Mnémonique* : dans $g(f(a))$, mettre $f(a)$ dans une "boîte noire" en l'encadrant $\boxed{f(a)}$, ce qui donne $g(\blacksquare)$.

1. l'image réciproque par f de chaque ouvert de F est ouverte dans A ;
2. l'image réciproque par f de chaque fermé de F est fermée dans A.

• **Continuité uniforme.** L'application f est dite ***uniformément continue*** si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall a, b \in A,\ \|a - b\| < \delta \Longrightarrow \|f(a) - f(b)\| < \varepsilon.$$

Chaque application uniformément continue est continue.

• **Continuité au sens de Lipschitz.** L'application f est dite ***lipschitzienne*** si

$$\exists L > 0,\ \forall a, b \in A,\ \|f(a) - f(b)\| \leq L\,\|a - b\|.$$

Par exemple, est lipschitzienne l'application "distance à A" $\left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ e & \longmapsto & \inf_{a \in A} d(a, e) \end{array}\right.$.
Chaque application lipschitzienne est uniformément continue.

• **Continuité des application linéaires.** Quand f est linéaire, on a l'équivalence

$$\boxed{f \text{ est continue} \overset{\text{si } f \text{ est}}{\underset{\text{linéaire}}{\Longleftrightarrow}} \exists C > 0,\ \forall a \in E,\ \|f(a)\| \leq C\,\|a\|}.$$

L'ensemble des applications linéaires continues de E vers F est noté

$$L_c(E, F) := L(E, F) \cap C(E, F).$$

• **Continuité en dimension finie des applications multilinéaires.** Imposons que E soit un produit fini d'espaces vectoriels normés chacun de dimension finie. Chaque application multilinéaire de source E est alors continue. En particulier, on a l'implication

$$\boxed{E \text{ est de dimension finie} \Longrightarrow L_c(E, F) = L(E, F)}.$$

• **Continuité en dimension finie des applications polynomiales.** Soit $N \in \mathbb{N}$.

Si E est une algèbre de dimension finie,	chaque application $E^N \longrightarrow E$ polynomiale à N indéterminées est alors continue.

En particulier, le déterminant det est continu sur $M_N(\mathbb{K})$ (identifié à $\mathbb{K}^{N^2}$).

3. Compacité

• La partie A est dite ***compacte*** (ou est appelée un ***compact*** de E) si chaque suite à valeurs dans A admet une valeur d'adhérence dans A.

• Si A est compacte, alors chaque suite de $A^{\mathbb{N}}$ converge ssi elle possède une seule valeur d'adhérence.

• Si E est de dimension finie, chaque suite de $E^{\mathbb{N}}$ bornée converge ssi elle possède une seule valeur d'adhérence.

- Chaque compact de E est fermé et borné. Réciproquement,

$$\boxed{\text{si } E \text{ est } \underline{\underline{\text{de dimension finie}}}, \text{ ses compacts sont alors ses fermés bornés}}.$$

- Sont compacts :

1. chaque fermé (relatif) de chaque compact,
2. chaque produit fini de compacts,
3. l'image directe $f(A)$ si A est compact et f continue.

- **Théorème de Heine.** Si A est compact, chaque application continue sur A y est alors *uniformément* continue.

- **Théorème des bornes atteintes.**

$$\boxed{\text{Si } A \text{ est un } \underline{\underline{\text{compact}}}\ \underline{\underline{\text{non vide}}}, \begin{array}{c}\text{atteint alors ses bornes chaque} \\ \text{application } A \longrightarrow \mathbb{R}\ \underline{\underline{\text{continue}}}.\end{array}}$$

4. Connexité par arcs

- Soient $a, \alpha \in A$. On appelle ***chemin continu dans** A **de** a **à** α* toute application continue $c : [0,1] \longrightarrow A$ telle que $\binom{c(0)}{c(1)} = \binom{a}{\alpha}$. Lorsque $A = E$, on parle de ***chemin continu*** (tout court) ***de** a **à** α*.

- La relation formée des couples $(a, \alpha) \in A^2$ tels qu'il existe un chemin continu dans A de a à α est une relation d'équivalence sur A. Ses classes d'équivalences sont appelées ***les composantes connexes par arcs*** de A.

- La partie A est dite ***connexe par arcs*** si elle possède une unique composante connexe par arcs (qui vaut alors A), *i. e.* si pour chaques $a, \alpha \in A$ il y a un chemin dans A continu de a à α.

Par exemple, est connexe par arcs chaque partie étoilée, en particulier chaque convexe.

- Les connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont ses intervalles.

- Si A est connexe par arcs et f continue, l'image directe $f(A)$ est alors connexe par arcs.

En particulier, quand $E = \mathbb{R}$, on retrouve le théorème des valeurs intermédiaires.

5. Normes équivalentes

- **Équivalence des normes en dimension finie.** (démonstration non exigible)

$$\boxed{\text{Quand } E \text{ est } \underline{\underline{\text{de dimension finie}}}, \text{ ses normes forment une seule classe d'équivalence.}}$$

- Toutes les notions suivantes sont invariantes par passage à une norme équivalente :

1. la "relation" de *tendance fonctionnelle* en un point donné (entre applications et points) ;

2. la *continuité en* un point donné, la *continuité sur* une partie donnée, la *continuité* tout court (d'une application) ;
3. la *continuité uniforme* et le caractère *lipschitzien* (d'une application) ;
4. la *compacité* (d'une partie) ;
5. les *composantes connexes par arcs* (d'une partie) ;
6. le caractère *connexe par arcs* (d'une partie).

Exercices d'entraînement

On évoque pour ces exercices un espace vectoriel normé E dont la norme est notée $e \mapsto \|e\|$.

1. ★ *Notons V l'espace vectoriel des séries scalaires absolument convergentes*
   (a) *Montrer que l'application $\sum a_n \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ est une norme sur V.*
   (b) *Les vecteurs-séries de V de somme 1 forment-ils une partie ouverte ? fermée ? bornée ? compacte ? connexe par arcs ?*
   (c) *Montrer que les vecteurs-séries de V dont le terme général stationne à 0 forment une partie dense de V. Cette partie est-elle dense dans l'espace vectoriel $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ muni de la norme uniforme ?*
2. ★★*Soit $c \in \mathbb{C}$, notons $f := z \mapsto z^2 + c$ et $R := 2 + |c|$*
   (a) *Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| \geq R$. Montrer alors les minorations $\forall n \in \mathbb{N},\ |f^{\circ n}(a)| \geq (n+1) R$.*
   (b) *En déduire la compacité de l'ensemble des complexes a tels que la suite $(f^{\circ n}(a))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.*
3. ★★*Soient $\mathcal{A}$ une algèbre à multiplication continue et N un naturel, soient $\begin{array}{c} p \in \mathbb{K}_N[X]^{\mathbb{N}} \\ a \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \end{array}$ et $\begin{array}{c} \pi \in \mathbb{K}_N[X] \\ \alpha \in A \end{array}$ tels que $\left\{ \begin{array}{c} p \longrightarrow \pi \\ a \longrightarrow \alpha \end{array} \right.$. Montrer alors la tendance $p_n(a_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi(\alpha)$.*
4. ★★*Soit K un compact convexe non vide de E.*
   (a) *Soit $f : K \longrightarrow K$ affine continue. En considérant la moyenne des itérés d'un point de K, montrer que f admet un point fixe.*
   (b) *Soit un ensemble fini d'applications affines de $C(K, K)$ commutant deux à deux. Montrer alors l'existence d'un point fixe par chaque élément de cet ensemble.*
5. ★★*Soit K un compact de E, soit $f : E \longrightarrow E$ continue stabilisant K, dont la restriction à K est injective et telle que chaque point de K a un voisinage sur lequel la restriction de f est injective. Montrer alors l'existence d'un ouvert O incluant K sur lequel f est injective.*
6. ★★*Imposons E de dimension finie et soit K un compact de E. Montrer alors que les endomorphismes de E stabilisant K forment une partie compacte de $L(E)$ ssi K engendre E.*
7. ★★*Imposons $E = \left\{ a \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} ;\ \sum |a_n|^2 \text{ converge} \right\}$ normé par $a \mapsto \sqrt{\sum_{i\in\mathbb{N}} |a_i|^2}$ et soit $\mu \in E$. (On admettra que la norme imposée est bien une norme sur E. Le choix de la lettre μ vient de ce que la suite μ va nous servir à **m**ajorer.) Montrer alors que la partie $\left\{ a \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} ;\ \forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leq \mu_n \right\}$ est un compact de E. (On pourra utiliser une extraction diagonale.)*
8. ★★★*Soit H un $\mathbb{R}$-hyperplan de E. Montrer alors que $E \backslash H$ n'est pas connexe par arcs ssi H est fermé. (On pourra utiliser les exercices 4a section 2.3 et 4 section 4.3.)*

9. ★★★*Imposons E non de dimension finie, notons $\mathbb{S}$ sa sphère unité (dont on admettra la non-compacité), soit $K \subset E$ un compact et soit $c \in C := E \setminus K$.*
   (a) *Montrer l'existence d'un vecteur unitaire de E ne valant $\frac{\overrightarrow{ck}}{\left\|\overrightarrow{ck}\right\|}$ pour aucun $k \in K$.*
   (b) *Soit $s \in \mathbb{S}$ comme à la question 9a. Montrer alors que la demi-droite $c+\mathbb{R}_+ s$ reste incluse dans C.*
   (c) *En déduire que C est connexe par arcs.*
   (d) *Discuter les hypothèses.*
10. ★★★*Imposons E de dimension finie et soit A un convexe dense de E.*
   (a) *Montrer que l'intersection de A avec chaque $\mathbb{R}$-hyperplan de E est dense dans cet hyperplan.*
   (b) *En déduire l'égalité $A = E$.*
   (c) *Discuter les hypothèses.*
   (d) *Chaque convexe dense est-il nécessairement un sous-espace vectoriel ?*

Solutions des exercices d'entraînement

1.

(a) L'application considérée (notons-la N) fait sens par définition de la convergence absolue. Soient $v, w \in V$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $N(v) = 0$, on a alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$ les majorations $|v_n| \leq \sum_{i=0}^{n} |v_i| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |v_i| = 0$, d'où la nullité de la série v, ce qui montre que N sépare les points de V. On a par ailleurs les égalités (montrant que N est positivement homogène)

$$\begin{aligned} N(\lambda v) &= \sum_{n=0}^{\infty} |[\lambda v]_n| = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda v_n| = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda| |v_n| \\ &\underset{a \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n}{\overset{\text{linéarité de}}{=}} |\lambda| \sum_{n=0}^{\infty} |v_n| = |\lambda| N(v) \end{aligned}$$

et les majorations "triangulaires"

$$\begin{aligned} N(v+w) &= \sum_{n=0}^{\infty} |[v+w]_n| = \sum_{n=0}^{\infty} |v_n + w_n| \underset{a \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n}{\overset{\text{croissance de}}{\leq}} \sum_{n=0}^{\infty} (|v_n| + |w_n|) \\ &\underset{a \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n}{\overset{\text{additivité de}}{=}} \sum_{n=0}^{\infty} |v_n| + \sum_{n=0}^{\infty} |w_n| = N(v) + N(w). \end{aligned}$$

(b) Notons A la partie considérée. Il s'agit de l'image réciproque du singleton $\{1\}$ par la forme linéaire $\Sigma := v \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} v_n$. La suite $u := (1, 0, 0, 0...)$ tombant dans A, le translaté $A - u := \operatorname{Ker} \Sigma$ est un hyperplan vectoriel de V, donc est d'intérieur vide (comme sous-espace vectoriel strict) et non borné (en tant que sous-espace vectoriel non nul). Ces deux caractères étant préservés par translation, ils sont également portés par la partie A, laquelle n'est donc ni ouverte ni compacte.

D'autre part, les comparaisons triangulaires $\forall v \in V, \left|\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |v_n|$ affirment précisément le caractère 1-lipschitzien de Σ, d'où la continuité de cette application affine. L'image réciproque A par Σ du fermé convexe $\{1\}$ est donc fermée et convexe, *a fortiori* connexe par arcs.

Remarque – En résumé, la partie $A = \Sigma^{-1}(\{1\})$ d'une part est un hyperplan affine (car Σ est une forme linéaire), donc est d'intérieur vide (*a fortiori* non ouverte), non bornée[201] (donc non compacte) et convexe (donc connexe par arcs), d'autre part est fermée par continuité de Σ.

(c) Notons P la partie considérée (P comme « **p**olynômes »). Il s'agit bien d'une partie de V car chaque série n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls converge absolument. Soit alors $v \in V$, soit $\varepsilon > 0$ un réel, soit $M \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=M}^{\infty} |v_n| < \varepsilon$ (permis car $\sum v_n$ converge absolument) et notons p la série dont le terme général coïncide avec v sur $[0, M][$ et est nul ailleurs.

[201] Puisque V n'est pas de dimension 0 ou 1 (il contient chaque suite nulle à partir d'un certain rang), chacun de ses hyperplans inclut une droite, donc est non borné.

La série p est alors un vecteur de P et vérifie les majorations

$$\begin{aligned} d(p,v) &= N(p-v) = \sum_{n=0}^{\infty} |p_n - v_n| = \sum_{n=0}^{M-1} \underbrace{|p_n - v_n|}_{=0} + \sum_{n=M}^{\infty} \underbrace{|p_n - v_n|}_{=|v_n|} \\ &= \sum_{n=M}^{\infty} |v_n| < \varepsilon, \text{ d'où la densité voulue.} \end{aligned}$$

Montrons en revanche que P n'est pas dense dans $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Notons u la série $\sum 1$ (grossièrement divergente), soit $p \in P$ et soit $M \in \mathbb{N}$ tel que $p_M = 0$: on a alors les minorations

$$d(p,u) = \|p-u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |p_n - u_n| \geq |p_M - u_M| = |0-1| = 1,$$

ce qui montre que u n'adhère pas à P (ni même à l'ensemble des séries dont le terme général s'annule).

2.

(a) Abrégeons $a_n := |f^{\circ n}(a)|$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et montrons les minorations voulues $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |a_{n-1}| \geq Rn$ par récurrence.

De l'hypothèse $|a| > R$ découle la minoration $|a_0| \geq R$, d'où l'initialisation.

Soit ensuite $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $|a_{n-1}| \geq Rn$. On a alors, en notant $r := |c| = R - 2$, les minorations

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left|a_{n-1}^2 + c\right| \geq \left|\left|a_{n-1}^2\right| - r\right| \geq |a_{n-1}|^2 - r \geq |a_{n-1}|^2 \\ &\geq R^2 n^2 = Rn^2 R \geq 2n^2 R \overset{?}{\geq} (n+1) R \end{aligned}$$

où la dernière minoration (qui conclurait) découle de la positivité de R et de la minoration $2n^2 \geq n+1$, laquelle se réécrit $(2n+1)(n-1) \geq 0$, ce qu'on a puisque $n \geq 1$.

(b) Soit a un tel complexe. La question 2a et la tendance $nR \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ montrent alors qu'aucun terme de la suite $(f^{\circ n}(a))_{n\in\mathbb{N}}$ n'est hors de la boule $B := \overline{\mathcal{B}}(0,R)$, donc a appartient à l'intersection $I := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [f^{\circ n}]^{-1}(B)$. Réciproquement, si a tombe dans cette intersection, alors – par définition de I – la suite $(f^{\circ n}(a))_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans B, donc est bornée.

Il s'agit par conséquent de montrer que I est bornée et fermée (l'espace vectoriel normé $\mathbb{C}$ étant de dimension finie). Le caractère borné découle de l'inclusion $I \subset \left[f^{\circ 0}\right]^{-1}(B) = \mathrm{Id}^{-1}(B) = B$. Le caractère fermé de I découle d'une part de celui à $n \in \mathbb{N}$ fixé de chaque $[f^{\circ n}]^{-1}(B)$, préimage continue du fermé B par l'application polynomiale $f^{\circ n}$ (de degré 2^n), d'autre part de celui de chaque intersection de fermés.

Remarque – L'ensemble des complexes considéré porte le nom de Gaston Julia et Pierre Fatou qui l'ont étudié dans des articles publiés entre 1917 et 1920. Il est source de figures fractales facilement trouvables en ligne (et animées) dont nous laissons la lectrice et le lecteur apprécier la beauté.

3. Observer tout d'abord que, l'espace $\mathbb{K}_N[X]$ étant de dimension finie, la tendance $p_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi$ a lieu pour chacune de ses normes, ce qui lève l'ambigüité de cette hypothèse. Soit ensuite $n \in \mathbb{N}$ et majorons

$$\|p_n(a_n) - \pi(\alpha)\| \leq \|p_n(a_n) - \pi(a_n)\| + \|\pi(a_n) - \pi(\alpha)\|.$$

La multiplication de $\mathcal{A}$ étant continue, l'application polynomiale π est continue, ce qui montre avec l'hypothèse $a \longrightarrow \alpha$ que[202] le second terme $\|\pi(a_n) - \pi(\alpha)\|$ tend vers 0 quand $n \to \infty$.

Montrons à présent que le premier terme tend aussi vers 0 quand $n \to \infty$, ce qui conclura. Réécrivons-le $\|p_n(a_n) - \pi(\alpha)\| = \|z_n(a_n)\|$ où la suite $z := (p_m - \pi)_{m\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 dans $\mathbb{K}_N[X]$.

Notons K le compact formé des termes et de la limite de la suite a. Vu que chaque polynôme induit une application continue sur $\mathcal{A}$, *a fortiori* sur K, et que chaque application continue sur le compact K y est bornée, l'on dispose d'une injection $i : \mathbb{K}_N[X] \hookrightarrow \mathcal{B}(K, \mathbb{K})$ où l'espace but est muni de la norme uniforme. Cette injection induit alors (*cf.* exoEvn1 ? ? ?) une norme $\mathfrak{N} := P \mapsto \|i(P)\|_\infty$ sur $\mathbb{K}_N[X]$, ce qui permet de conclure en majorant

$$\|z_n(a_n)\| = \|\ [i(z_n)](a_n)\ \| \leq \|i(z_n)\|_\infty = \mathfrak{N}(z_n) \overset{\text{car } z\longrightarrow 0}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} 0.$$

4.

(a) Soit $a \in K$ (permis car K est non vide), notons β la suite des isobarycentres $n \mapsto \frac{1}{n}\sum_{i\in[0,n[[} f^i(a)$, laquelle fait sens (car f stabilise K) et prend ses valeurs dans K (par convexité de ce dernier), ce qui permet (par compacité de K) d'en évoquer une valeur d'adhérence, mettons $\ell = \lim_{n\to\infty} \beta_{x(n)}$ pour une certaine extractrice x. On alors à $n \in \mathbb{N}^*$ fixé les égalités

$$\begin{aligned} f(\beta_n) &= f\left(\frac{1}{n}\sum_{i\in[0,n[[} f^i(a)\right) \overset{f \text{ est}}{\underset{\text{affine}}{=}} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(f^i(a)\right) \overset{\text{reparamétrage}}{\underset{j:=i+1}{=}} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f^j(a) \\ &= \beta_n + \frac{f^n(a) - a}{n} \overset{K \text{ borné et}}{\underset{\text{stable par } f}{=}} \beta_n + o_{n\to\infty}(1)\ ; \end{aligned}$$

remplacer n par $x(m)$ et appliquer $\lim_{m\to\infty}$ livre alors (avec la continuité de f) l'égalité $f(\ell) = \ell$, d'où un point fixe comme désiré.

(b) Pour chaque naturel n notons F_n l'énoncé

$$\forall \begin{matrix} C \subset E \text{ compact} \\ \text{convexe non vide} \end{matrix}, \forall \mathcal{F} \subset C^0(C, C),$$
$$\left\{\begin{array}{l} \forall f \in \mathcal{F},\ f \text{ est affine} \\ \mathcal{F} \text{ fini et } \operatorname{Card}\mathcal{F} = n \\ \forall f, g \in \mathcal{F},\ f \circ g = g \circ f \end{array}\right. \Longrightarrow [\exists c \in C,\ \forall f \in \mathcal{F},\ f(c) = c].$$

et montrons $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_n$ par récurrence (F_0 est tautologique). Il en résultera la conclusion en remplaçant C par K (la preuve qui suit éclairera

[202] Utiliser le critère séquentiel de continuité.

a posteriori le choix d'inclure la quantification $\forall C$ dans l'énoncé de récurrence).

La question 4a établit précisément F_1.

Soit ensuite $n \in \mathbb{N}^*$ tel que F_n, soit $C \subset E$ un compact convexe non vide, soit $\mathcal{F} \subset C^0(C, C)$ fini de cardinal $n+1$ formé d'applications affines commutant deux à deux, soit $f \in \mathcal{F}$ et notons $\Phi := \mathcal{F} \setminus \{f\}$. La partie $\operatorname{Fix} \varphi$ est alors pour chaque $\varphi \in \Phi$ d'une part stable par f (car f commute avec φ), d'autre part fermée (resp. convexe) comme image réciproque du fermé (resp. convexe) $\{0\}$ par l'application continue (resp. affine) $\varphi - \mathrm{Id}$, donc l'intersection Γ de ces fermés est stable par f, convexe et fermée dans le compact C, *a fortiori* compacte. Elle est par ailleurs non vide d'après l'hypothèse F_n appliquée à l'ensemble Φ. La question 4a livre alors un point de Γ fixe par f, *i. e.* un point de C fixe par chaque élément de $\Phi \cup \{f\} = \mathcal{F}$, ce qui conclut à F_{n+1}.

REMARQUE – Il serait aisé de lever l'hypothèse de finitude en utilisant (hors programme) la compacité au sens de BOREL-LEBESGUE. Le théorème établi a été publié (sous des formes plus générales) en 1936 par Andreï Andreïevitch MARKOV dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences de l'URSS* et en 1938 par Shizuo KAKUTANI dans les *Proceedings of the Imperial Academy* (de Tokyo).

5. D'après le cours (exemple 2 section 3.2), si O désigne un ouvert répondant à la question, il y a alors un réel $r > 0$ tel que $K \subset K + \mathring{\mathcal{B}}(O, r) \subset O$ et l'ouvert $K + \mathring{\mathcal{B}}(O, r)$ répond aussi à la question. Nous allons donc montrer qu'un tel ouvert convient.

Supposons par l'absurde que f n'est injective sur $K + \mathring{\mathcal{B}}(O, r)$ pour aucun réel $r > 0$. On a alors les existences $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists a, b \in K + \mathring{\mathcal{B}}\left(O, \frac{1}{n}\right),\ \begin{cases} f(a) = f(b) \\ a \neq b \end{cases}$, ou encore $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \begin{array}{l} \exists a, b \in E \\ \exists k, \ell \in K \end{array},\ \begin{cases} \|a - k\| < \frac{1}{n} \\ \|b - \ell\| < \frac{1}{n} \end{cases}$ et $\begin{cases} f(a) = f(b) \\ a \neq b \end{cases}$. On peut alors évoquer (grâce à l'axiome du choix) quatre suites $a, b \in E^{\mathbb{N}}$ et $k, \ell \in K^{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \begin{cases} \|a_n - k_n\| < \frac{1}{n} \\ \|b_n - \ell_n\| < \frac{1}{n} \end{cases}$ et $\begin{cases} f(a_n) = f(b_n) \\ a_n \neq b_n \end{cases}$. Par compacité de K^2, on peut évoquer une extractrice x et un couple $\binom{\kappa}{\lambda} \in K^2$ tel que $\binom{k_{x(n)}}{\ell_{x(n)}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \binom{\kappa}{\lambda}$. Les majorations précédentes montre alors la tendance $\binom{a_{x(n)}}{b_{x(n)}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \binom{\kappa}{\lambda}$ et les égalités $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f\left(a_{x(n)}\right) = f\left(b_{x(n)}\right)$ livrent (avec la continuité de f sur K) l'égalité $f(\kappa) = f(\lambda)$, d'où (par injectivité de $f_{|K}$) celle $\kappa = \lambda$. Alors, pour chaque voisinage V de $\kappa = \lambda$, étant donné un $N \in \mathbb{N}$ tel que $a_N, b_N \in V$ (il y en a vu la tendances $\binom{a_{x(n)}}{b_{x(n)}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \binom{\kappa}{\lambda}$), les conditions $\begin{cases} f(a_N) = f(b_N) \\ a_N \neq b_N \end{cases}$ nient l'injectivité de $f_{|V}$, ce qui est contraire aux hypothèses.

6. L'espace vectoriel normé $L(E)$ étant de dimension finie (le carré de celle de E), sa topologie est sans ambigüité et la compacité de la partie $\mathcal{F} := \{f \in L(E)\ ;\ f(K) \subset K\}$ considérée revient à son caractère fermé borné.

Montrons tout d'abord que $\mathcal{F}$ est fermé sans conditions. Pour chaque suite $f \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ convergente, on a les stabilités $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(K) \subset K$, *i. e.* les appartenances $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in K,\ f_n(k) \in K$, *i. e.* $\forall k \in K,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \operatorname{eval}_k(f_n) \in K$ où l'évaluation en k est continue pour chaque $k \in K$ (car linéaire et de source l'espace vectoriel $L(E)$ de dimension finie, d'où (après passage à la limite) les appartenances $\forall k \in K,\ \mathrm{eval}_k(\lim f) \in \overline{K}$, *i. e.* (le compact K étant fermé) l'inclusion $[\lim f](K) \subset K$, *i. e.* l'appartenance $\lim f \in \mathcal{F}$.

Il s'agit donc de montrer l'équivalence $[\mathcal{F}$ borné$] \iff [\mathrm{Vect}\, K = E]$

Soit S un supplémentaire dans E de $\mathrm{Vect}\, K$ et, pour chaque naturel n, notons f_n l'endomorphisme de E nul sur $\mathrm{Vect}\, K$ et valant $n\,\mathrm{Id}$ sur S (c'est un élément de $\mathcal{F}$). La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ est alors bornée ssi S est nul, d'où (par contraposée) l'implication $[\mathcal{F}$ borné$] \Longrightarrow [\mathrm{Vect}\, K = E]$.

Supposons réciproquement $\mathrm{Vect}\, K = E$, ce qui permet d'évoquer une base $\mathcal{K}$ de E formée d'éléments de K, soit $R > 0$ tel que $K \subset \mathcal{B}(0, R)$ (permis car le compact K est bornée), soit $f \in \mathcal{F}$, notons $M := \mathrm{Mat}_{\mathcal{K}} f$ et soit κ un "élément" de la base $\mathcal{K}$. Puisque f stabilise K, on peut majorer $\|f(\kappa)\| \leq R$; cette norme valant par ailleurs la borne supérieure des modules des coefficients de la colonne de M correspondant au vecteur de base κ, on peut (en désévoquant κ) conclure $\|M\|_\infty \leq R$. En normant $L(E)$ par $\varphi \mapsto \|\mathrm{Mat}_{\mathcal{K}}\, \varphi\|_\infty$, nous venons de montrer que la partie $\mathcal{F}$ est bornée par R.

7. Notons A la partie considérée. Chaque suite $a \in A$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n|^2 \leq \mu_n^2$, la convergence de la série $\sum \mu_n^2$ assure celle de $\sum |a_n|^2$, d'où l'inclusion $A \subset E$.

Soit ensuite $({}^n a)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$. Pour chaque naturel N, la suite $({}^n a_N)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans le compact $\overline{\mathcal{B}}(0, \mu_N)$ de $\mathbb{K}$, d'où une extractrice x et un scalaire $\lambda \in \overline{\mathcal{B}}(0, \mu_N)$ tels que ${}^{x(n)}a_N \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$. On en déduit (*via* l'axiome du choix) une suite $(x_N)_{N\in\mathbf{N}}$ d'extractrices et une suite λ de scalaires vérifiant pour chaque naturel N la majoration $|\lambda_N| \leq \mu_N$ et la tendance ${}^{x_N(n)}a_N \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_N$ (observer au passage l'appartenance $\lambda \in A$). Notons alors $\delta := n \mapsto [x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_n](n)$ la suite obtenue à partir de x par extraction diagonale, de sorte à avoir pour chaque naturel N la tendance ${}^{\delta(n)}a_N \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_N$. Montrons alors la convergence ${}^{\delta(n)}a \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$, ce qui conclura.

Soit $\varepsilon > 0$, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n>N} \mu_n^2 < \varepsilon$ (permis par convergence de la série $\sum \mu_n^2$) et soit $\nu \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{i=0}^N \left|{}^{\delta(n)}a_i - \lambda_i\right|^2 < \varepsilon$ pour chaque naturel $n > \nu$ (permis vu les tendances $\forall i \in [0, N|],\ {}^{\delta(n)}a_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_i$) : on a alors à $n \in \mathbb{N}$ fixé les majorations

$$\left|{}^{\delta(n)}a_i - \lambda_i\right| \leq \left|{}^{\delta(n)}a_i\right| + |\lambda_i| \underset{\text{et } \lambda\in A}{\overset{{}^{\delta(n)}a\in A}{\leq}} \mu_i + \mu_i = 2\mu_i, \text{ d'où (si de plus } n > \nu)$$

$$\left\|{}^{\delta(n)}a - \lambda\right\|^2 = \underbrace{\sum_{i=0}^N \left|{}^{\delta(n)}a_i - \lambda_i\right|^2}_{<\ \varepsilon \text{ car } n>\nu} + \underbrace{\sum_{i>N} \overbrace{\left|{}^{\delta(n)}a_i - \lambda_i\right|^2}^{\leq (2\mu_i)^2 = 4\mu_i^2}}_{\leq\ 4\sum_{i>N}\mu_i^2\ <\ 4\varepsilon} < 5\varepsilon, \text{ ce qui conclut.}$$

8. Soit φ une forme $\mathbb{R}$-linéaire non nulle de noyau H. Étant non nulle, elle est surjective, d'où les égalités $\varphi(E \backslash H) = \varphi(E) \backslash \varphi(H) = \mathbb{R} \backslash \{0\} = \mathbb{R}^*$.

Si l'hyperplan H est fermé et de complémentaire connexe par arcs, la forme φ est alors continue (*cf.* exercice 4a section 2.3) et l'image $\mathbb{R}^*$ par φ

du connexe par arcs $E \backslash H$ n'est pas connexe par arcs, ce qui contredit le théorème des valeurs intermédiaires. (*Autre preuve* : la partie $E \backslash H = \varphi^{-1}\left(\mathbb{R}_+^*\right) \amalg \varphi^{-1}\left(\mathbb{R}_-^*\right)$ partitionnée en deux ouverts relatifs non vides ne saurait être connexe par arcs.)

Supposons à présent H non fermé : il est alors dense (*cf.* exo ? ? ?chapEvn1), donc chacun de ses translatés est dense. En particulier, étant donné un $a \in E \backslash H$, l'hyperplan affine $A := H + a$ est dense et inclus dans $E \backslash H$, d'où les inclusions $A \subset E \backslash H \subset \overline{A}$ avec A convexe, ce qui permet de conclure (avec l'exercice 4 section 4.3) à la connexité par arcs de $E \backslash H$.

9.

(a) L'application $\sigma := \left\{ \begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & \mathbb{S} \\ k & \longmapsto & \frac{\overrightarrow{ck}}{\left\|\overrightarrow{ck}\right\|} \end{array} \right.$ fait sens (aucun dénominateur $\left\|\overrightarrow{ck}\right\|$ ne s'annule car $c \notin K$), est continue (comme quotient d'applications lipschitziennes) et de source compacte, donc est d'image compacte. La sphère $\mathbb{S}$ étant par ailleurs non compacte (c'est le théorème de Riesz admis par l'énoncé), l'application σ ne saurait être surjective, d'où un $s \in \mathbb{S}$ non atteint par σ, ce qui conclut.

(b) Pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $k := c + \lambda s \in K$, on a les égalités $\left\|\overrightarrow{ck}\right\| = \|\lambda s\| = |\lambda| \, \|s\| \underset{\lambda>0}{\overset{s\in\mathbb{S}}{=}} \lambda$ et $\sigma(k) = \frac{\overrightarrow{ck}}{\left\|\overrightarrow{ck}\right\|} \overset{\lambda\geq 0}{=} \frac{\lambda s}{\lambda} = s \notin \operatorname{Im}\sigma$, ce qui est absurde. On en déduit les non-appartenances $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \ c + \lambda k \notin K$, ce qui est l'inclusion désirée (chaque vecteur $c + \lambda k$ reste dans E).

(c) Soit $R > 0$ un réel tel que $K \subset \overline{\mathcal{B}}(0, R)$ (permis car le compact K est borné). Nous allons relier c par un chemin continu dans C à un point de la sphère $\mathcal{S}(0, R)$, ce qui conclura puisque cette dernière est connexe par arcs (E n'est pas de dimension réelle 1).

Si $\|c\| > R$, la ligne droite de c à Rc convient alors car prend ses valeurs dans $E \backslash \overline{\mathcal{B}}(0, R) \subset E \backslash K = C$.

Supposons à présent $\|c\| < R$. L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & \|c + \lambda s\| \end{array} \right.$ est alors continue (composée d'applications lipschitziennes), prend une valeur moindre que R (car $\|c\| < R$), et tend vers ∞ en ∞, donc atteint R par le théorème des valeurs intermédiaires en un certain ρ. La ligne droite de c à $c + \rho s$ prend alors ses valeurs dans la demi-droite $c + \mathbb{R}_+ s \subset C$ et relie c à un point de $\mathcal{S}(0, R)$ (par évocation de ρ), ce qui conclut.

(d) Lorsque E est de dimension finie, sa sphère unité $\mathbb{S}$ est compacte ; lorsqu'il est de plus non nul, la partie $E \backslash \mathbb{S}$ n'est pas connexe par arcs (*cf.* exemple 5 section 4.4). Cependant, en dimension nulle, chaque partie est compacte et connexe par arcs. *Conclusion* : chaque espace vectoriel normé est de dimension nulle ou infinie ssi le complémentaire de chacun de ses compacts est connexe par arcs.

10.

(a) Soit H un hyperplan réel de E, soit φ une forme $\mathbb{R}$-linéaire de noyau H (alors continue car sa source E est de dimension finie), soit $h \in H$, soit $\varepsilon >$

0 un réel, soit $a \in A \cap \mathring{\mathcal{B}}(h, \varepsilon)$ (permis par densité de A) dont on note $a' := 2h - a$ le symétrique par rapport à h. Si $a' \in H$, on a alors terminé ; nous pouvons donc imposer $\delta := d(a', H) > 0$, *i. e.* $r := \min\{\delta, \varepsilon\} > 0$, et évoquer (par densité de A) un $b \in A \cap \mathring{\mathcal{B}}(a', r)$.

FIG

La majoration $r \leq d(a', H)$ montre alors que la boule $\mathring{\mathcal{B}}(a', r)$ ne rencontre par H, donc la forme φ ne s'y annule pas, *i. e.* (par continuité) y garde un signe constant – celui de $\varphi(a') = \varphi(2h - a) \underset{\text{linéaire}}{\overset{\varphi \text{ est}}{=}} 2\varphi(h) - \varphi(a) \overset{H \subset \operatorname{Ker} \varphi}{=} -\varphi(a)$. L'application continue $f := t \mapsto \varphi\left(a + t\,\overrightarrow{ab}\right)$ prend donc en 0 et 1 des valeurs de signes opposés, donc s'annule, d'où par le théorème des valeurs intermédiaires un $h' \in H \cap [a, b]$, mettons $h' = \lambda a + \mu b$ pour certains $\lambda, \mu \in [0, 1]$ de somme 1. On a alors d'une part l'appartenance $h' \in [a, b] \subset A$ (par convexité de A), d'autre part les majorations

$$\|h' - h\| = \|\lambda a + \mu b - (\lambda + \mu) h\| = \|\lambda(a - h) + \mu(b - a') + \mu(a' - h)\|$$
$$\leq \lambda \underbrace{\|a - h\|}_{<\varepsilon \text{ car } a \in \mathring{\mathcal{B}}(h, \varepsilon)} + \mu \underbrace{\|b - a'\|}_{<\varepsilon \text{ car } b \in \mathring{\mathcal{B}}(a', r)} + \mu \underbrace{\|a' - h\|}_{=\|a - h\| < \varepsilon} < 3\varepsilon, \text{ ce qui conclut.}$$

(b) On raisonne par récurrence sur $\dim_{\mathbb{R}} E$. Pour chaque naturel n, notons P_n l'énoncé

$$\forall V \text{ espace vectoriel normé de dimension réelle } n,$$
$$\forall C \subset V \text{ convexe dense, } C = V$$

et montrons $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n$ par récurrence (d'où la conclusion en remplaçant $\binom{V}{C}$ par $\binom{E}{A}$).

Dans chaque espace vectoriel normé nul, chaque partie dense est non vide, *a fortiori* pleine, d'où l'énoncé P_0.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n, soit V un espace vectoriel normé de dimension réelle $n + 1$, soit C un convexe dense de V, soit $v \in V$, soit H un hyperplan de V contenant v. L'intersection $H \cap C$ est alors convexe (comme intersection de convexes) et est dense dans H d'après la question 10a, donc l'hypothèse P_n s'applique à l'espace vectoriel normé H (qui est bien de dimension n) et livre l'égalité $H = H \cap C$, d'où l'appartenance $v \in H = H \cap C \subset C$, ce qui conclut à l'inclusion $V \subset C$ et à P_{n+1}.

FIG

(c) Vu la validité de l'énoncé P_0, on imposer $E \neq \{0\}$ pour discuter les hypothèses.

Sans l'hypothèse de densité, les boules unités sont deux contre-exemples convexes. Sans l'hypothèse de convexité, les vecteurs de norme rationnelle forment un contre-exemple dense.

Sans l'hypothèse « E de dimension finie », la preuve ci-dessus achoppe en deux poins : la récurrence finie ne tient plus et surtout la continuité de φ fait défaut (on va pouvoir passer "à travers" l'hyperplan). De fait, chaque hyperplan dense est un contre-exemple, comme $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K} \exp$ (vu dans $C(S, \mathbb{K})$).

(d) D'après la question précédente, il faut chercher en dimension infinie. Par exemple, dans $C([0,1],\mathbb{K})$, l'enveloppe convexe de $\mathbb{K}[X]$ et de exp est convexe (c'est une enveloppe convexe) et dense (car inclut la partie dense $\mathbb{K}[X]$) mais n'est pas un sous-espace vectoriel (car ne contient pas $2\exp$)

FIG Conv(plan+point au-dessus)