evn1
normes suites adhérence intérieur
(reliquat)

Marc SAGE

1er mars 2018

Table des matières

1 Cours evn1

1.1 Algèbres normées

Définition (algèbre normée) (hors programme)

Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre. On appelle ***norme d'algèbre*** *sur $\mathcal{A}$ tout norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{A}$ telle que*[1]

$$\forall a, b \in \mathcal{A},\ \|ab\| \leq \|a\| \|b\| .$$

Étant donnée une telle norme N, on dit que $(\mathcal{A}, N)$ est une ***algèbre normée*** *ou encore que l'algèbre $\mathcal{A}$ est* ***normée par*** *N.*

Remarques

- Dans chaque algèbre normée non nulle, quitte à diviser la norme de cette algèbre par $\|1\|$, on pourra au besoin imposer $\|1\| = 1$, égalité faisant parfois partie des axiomes d'une algèbre normée.
- Le programme parle explicitement d'applications polynomiales dans les espaces vectoriels normés ? ? ?que dans ev ddf ? ? ?, ce qui ne saurait faire sens en-dehors d'une *algèbre*. Il exige également de connaître la continuité du produit, laquelle équivaut (nous le verrons au chapitre ? ? ?) à la *sous-multiplicativité* de la norme de l'algèbre sous-jacente (*modulo* équivalence de normes).
- Soit une algèbre normée et soit i un idempotent non nul de cette algèbre. Vu les majorations $\|i\| = \left\|i^2\right\| \leq \|i\|^2$, la norme $\|i\|$ est ou bien nulle (exclu car $i \neq 0$) ou bien au moins 1. Conclusion :

dans chaque algèbre normée, chaque idempotent non nul est de norme au moins 1.

Exemples

1. Le module de $\mathbb{K}$ en est une norme d'algèbre (sur le corps $\mathbb{R}$ comme sur le corps $\mathbb{K}$).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Est alors une norme d'algèbre sur $M_n(\mathbb{K})$ l'application $a \mapsto n \|a\|_\infty$ vu à $a, b \in M_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in [1, n|]$ fixés les majorations[2]

$$\left|[ab]_{i,j}\right| = \left|\sum_{x=1}^{n} a_{i,x} b_{x,j}\right| \leq \sum_{x=1}^{n} |a_{i,x}| |b_{x,j}| \leq \sum_{x=1}^{n} \|a\|_\infty \|b\|_\infty = n \|a\|_\infty \|b\|_\infty , \text{ desquelles l'on tire } n \|ab\|_\infty \leq n \|a\| \ n \|b\| .$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. La norme euclidienne sur $M_n(\mathbb{K})$ est alors d'algèbre vu à $a, b \in M_n(\mathbb{K})$ fixés les majorations[3]

$$\begin{aligned} \|ab\|^2 &= \sum_{i,j \in [1,n|]} [ab]_{i,j}^2 = \sum_{i,j \in [1,n|]} \left(\sum_{x=1}^{n} a_{i,x} b_{x,j}\right)^2 \underset{\text{Schwarz}}{\overset{\text{Cauchy-}}{\leq}} \sum_{i,j \in [1,n|]} \sum_{x=1}^{n} a_{i,x}^2 \sum_{y=1}^{n} b_{y,j}^2 = \sum_{i,j,x,y \in [1,n]} a_{i,x}^2 b_{y,j}^2 \\ &= \sum_{y,j \in [1,n|]} \sum_{i,x \in [1,n|]} a_{i,x}^2 b_{y,j}^2 = \left(\sum_{i,x \in [1,n|]} a_{i,x}^2\right) \sum_{y,j \in [1,n|]} b_{y,j}^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 . \end{aligned}$$

1.2 Egs normes non équival, généralisaion à un segment

Imposons $E = C(S, \mathbb{K})$, $S = [0, 1]$ et soient $\alpha > \beta \geq 1$ deux réels. On a alors pour chaque naturel n, en abrégeant $f_n := t \mapsto \left(\frac{t - \min S}{L}\right)^n$, les égalités

$$\|f_n\|_\alpha^\alpha = \int_{\min S}^{L + \min S} t^{n\alpha} dt \underset{u := \frac{t - \min S}{L}}{\overset{\text{reparamétrage}}{=}} L \int_0^1 u^{n\alpha} du = \frac{L}{n\alpha + 1},$$

$$\text{d'où la tendance } \frac{\|f_n\|_\alpha}{\|f_n\|_\beta} = L^{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}} \frac{(n\beta + 1)^{\frac{1}{\beta}}}{(n\alpha + 1)^{\frac{1}{\alpha}}} \underset{n \to \infty}{\overset{\text{car } \alpha, \beta > 0}{\sim}} \text{Cste} \cdot n^{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty,$$

laquelle montre que les normes d'indices respectifs α et β ne sont pas équivalentes

[1] En d'autres termes, une norme d'algèbre est une norme d'espace vectoriel *sous-multiplicative*.

[2] On note $[M]_{i,j} = m_{i,j}$ le coefficient d'indice (i, j) de chaque matrice M.

[3] Les deux égalités entourant $\sum_{i,j,x,y \in [1,n]} a_{i,x}^2 b_{y,j}^2$ résultent de réindexations du domaine de sommation resp. à i, j fixés et à y, j fixés.

1.3 Equivalence des normes $f \mapsto \int_S |\lambda f|$

Soit $s \in \mathring{S}$, soient $\lambda, \mu \geq 0$ dans $C(S, \mathbb{K})$ dont les zéros sont en nombre fini et telles que $\frac{\mu}{\lambda} \underset{s}{\longrightarrow} \infty$. L'application $\varepsilon \mapsto \int_s^{s+\varepsilon} \lambda$ est alors dérivable au voisinage de 0 (car $s \in \mathring{S}$ et λ continue) de dérivée $\lambda > 0$ (sauf en un nombre fini de points), donc croît strictement ; cette application fixant par ailleurs 0, le théorème des valeurs intermédiaires permet de définir une suite réelle $\varepsilon \longrightarrow 0$ décroissant strictement telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{V_{n+1}} \lambda = \frac{1}{2} \int_{V_n} \lambda$ (en abrégeant $V_n := [s, s + \varepsilon_n]$). Observer que la tendances $\varepsilon \longrightarrow 0$ et $\frac{\mu}{\lambda} \underset{s}{\longrightarrow} \infty$ livrent celle $\inf_{V_n} \frac{\mu}{\lambda} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Notons enfin à $n \in \mathbb{N}$ fixé f_n l'application valant 1 sur V_{n+1}, nulle hors de V_n et affine par trois morceaux sur V_n. On a alors pour chaque naturel n les comparaisons[4]

$$\int_S |\mu f_n| \geq \int_{V_{n+1}} \mu f_n = \int_{V_{n+1}} \frac{\mu}{\lambda} \lambda 1 \geq \inf_{V_{n+1}} \frac{\mu}{\lambda} \int_{V_n} \lambda \text{ et } \int_S |\lambda f_n| = \int_{V_n} \lambda f_n \leq \int_{V_n} \lambda, \text{ d'où}$$

$$\text{les minorations et tendance } \frac{\int_S |\mu f_n|}{\int_S |\lambda f_n|} \geq \inf_{V_{n+1}} \frac{\mu}{\lambda} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \text{ vu les tendances } \varepsilon \longrightarrow 0 \text{ et } \frac{\mu}{\lambda} \underset{s}{\longrightarrow} \infty.$$

Question ouverte : est-ce que les normes N_λ et N_μ ne sont pas équivalentes si $\frac{\mu}{\lambda}$ *pas bornée* ?

1.4 exemples fermés / ouverts

Exemples

1. Chaque point $a \in E$ est centre de la boule ouverte $\mathring{\mathcal{B}}(a, 1) \subset E$, d'où l'inclusion $E \subset \mathring{E}$. Celle réciproque étant immédiate, on en déduit
$$\operatorname{Int} E = E.$$
2. Chaque boule ouverte étant non vide, l'inclusion $\mathring{\mathcal{B}}(a, r) \subset A$ est irréalisable quand $A \neq \emptyset$. Le prédicat $\exists r > 0$, $\mathring{\mathcal{B}}(a, r) \subset \emptyset$ (de symbole libre a) est donc contradictoire et l'ensemble des $a \in E$ le vérifiant est vide, ce qui s'écrit
$$\operatorname{Int} \emptyset = \emptyset.$$

Exemples

1. Chaque $l \in E$ étant la limite de la suite valant constamment l, on a l'inclusion $E \subset \overline{E}$. L'inclusion réciproque étant claire, on en déduit l'égalité
$$\operatorname{Adh} E = E.$$
2. Quand A est vide, le prédicat « $\exists a \in A^{\mathbb{N}}$, $a \longrightarrow l$ » (de symbole libre l) est une quantification existentielle sur l'ensemble vide (car aucune suite ne prend ses valeurs dans $\emptyset$), donc est contradictoire, donc l'ensemble des l le satisfaisant est vide :
$$\operatorname{Adh} \emptyset = \emptyset.$$

1.5 axiomatique ouverts

1. Le caractère ouvert du vide est une quantification universelle sur $\emptyset$, donc est tautologique. L'énoncé $\exists r > 0$, $\mathring{\mathcal{B}}(o, r) \subset E$ étant par ailleurs vérifié pour chaque $o \in O$ (n'importe quel $r > 0$ convient), la partie E est ouverte.

[4] Même si s est une borne de S, le même raisonnement tiendrait en changeant au besoin de côté.

2. Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de E. Soit $a \in \bigcup_{i\in I} O_i$, soit $i \in I$ tel que $a \in O_i$, soit $r > 0$ tel que $\mathring{\mathcal{B}}(a,r) \subset O_i$ (légitime car O_i est ouvert). Puisque O_i est inclus dans $\bigcup_{\iota\in I} O_\iota$, cette dernière réunion contient $\mathring{\mathcal{B}}(a,r)$, ce qui conclut[5].

3. Une récurrence immédiate permet de se restreindre au cas de *deux* ouverts. Soient donc O et Ω deux ouverts de E, soit $a \in O \cap \Omega$, soient $r, \rho > 0$ tel que $\begin{cases} \mathring{\mathcal{B}}(a,r) \subset O \\ \mathring{\mathcal{B}}(a,\rho) \subset \Omega \end{cases}$. En notant $R := \min\{r,\rho\}$ (bien observer $R > 0$), la boule $\mathring{\mathcal{B}}(a,R)$ est alors incluse d'une part dans $\mathring{\mathcal{B}}(a,r)$, donc dans O, d'autre part dans $\mathring{\mathcal{B}}(a,\rho)$, donc dans Ω, ce qui montre l'inclusion $\mathring{\mathcal{B}}(a,R) \subset O \cap \Omega$, d'où la conclusion[6].

1.6 propriétés des intérieurs

DEM

1. Tout d'abord, le centre de chaque boule incluse dans A appartenant à A, chaque point intérieur à A lui appartient, ce qui montre l'inclusion $\mathring{A} \subset A$.

   Montrons ensuite que $\mathring{A}$ est ouvert. Soit $i \in \mathring{A}$, soit $r > 0$ tel que $\mathring{\mathcal{B}}(i,r) \subset A$ et montrons l'inclusion $\mathring{\mathcal{B}}(i,r) \subset \mathring{A}$ (ce qui conclura). Soit $i \in \mathring{\mathcal{B}}(i,r)$: cette boule ouverte étant voisinage de chacun de ses points, il y une boule ouverte $\mathcal{B}$ telle que $i \in \mathcal{B} \subset \mathring{\mathcal{B}}(i,r)$, en particulier telle que $i \in \mathcal{B} \subset A$, d'où l'appartenance $i \in \mathring{A}$ désirée.

   Soit enfin O un ouvert inclus dans A. Soit $o \in O$ et soit $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(o,r) \subset O$. De l'inclusion $O \subset A$ découle alors celle $\mathcal{B}(o,r) \subset A$, d'où l'appartenance $o \in \mathring{A}$ et l'inclusion $O \subset \mathring{A}$.

2. Les propriétés « être ouvert » et « être inclus dans A » passant à la réunion, la réunion des ouverts inclus dans A d'une part est un ouvert inclus dans A, d'autre part contient chacun de ces fermés, donc vaut $\operatorname{Int} A$ d'après le point (1).

3. Soit $B \subset E$ tel que $A \subset B$. L'intérieur $\mathring{A}$ est alors un ouvert inclus dans A, *a fortiori* contenant B, donc est inclus dans le plus grand tel ouvert $\mathring{B}$.

4. L'intérieur $\mathring{A}$ est inclus dans A d'après le point (1). Si on a l'égalité $A = \mathring{A}$, le membre de droite est alors ouvert (par le point (1)), donc le membre de gauche A aussi. Réciproquement, si A est ouvert, alors A est le plus grand fermé inclus dans A, d'où (par le point (1)) l'égalité $\mathring{A} = A$; en particulier, vu que $\mathring{A}$ est ouvert, on a sans hypothèse sur A l'égalité $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$.

1.7 Densité en termes d'ouverts

$$
\begin{aligned}
A \text{ est dense} \quad & \iff E \subset \overline{A} \iff \forall e \in E,\ e \in \overline{A} \\
& \underset{\text{en termes de voisinages}}{\overset{\text{description de l'adhérence}}{\iff}} \forall e \in E,\ (\forall V \text{ voisinage de } e,\ A \cap V \neq \emptyset) \\
& \iff \forall e \in E,\ (\forall V \text{ voisinage de } e),\ A \cap V \neq \emptyset \\
& \underset{\text{en termes d'ouverts}}{\overset{\text{description des voisinages}}{\iff}} \forall e \in E,\ (\forall O \text{ ouvert contenant } e,\ \forall V \supset O),\ A \cap V \neq \emptyset \\
& \iff \underbrace{\forall e \in E,\ \forall O \text{ ouvert contenant } e}_{\text{revient à quantifier } \forall O \neq \emptyset \text{ ouvert, } \forall e \in O},\ \underbrace{\forall V \supset O,\ A \cap V \neq \emptyset}_{\text{équivaut à } A \cap O \neq \emptyset} \\
& \iff \forall O \neq \emptyset \text{ ouvert},\ \underbrace{\forall e \in O,\ A \cap O \neq \emptyset}_{\substack{\text{la quantification peut être} \\ \text{omise car } O \text{ est non vide}}} \\
& \iff \forall O \text{ ouvert non vide},\ A \cap O \neq \emptyset, \text{ ce qui conclut.}
\end{aligned}
$$

[5] *Sanity check* : la réunion vide dans $\mathsf{P}(E)$ est la partie vide $\emptyset$, laquelle est bien ouverte d'après le point (1).

[6] L'union vide est la partie pleine E, laquelle est ouverte d'après le point (1).

2 Exos evn1

2.1 EG de norme sur $\mathbb{K}^2$

1. Soit $\binom{a}{b} \in \mathbb{K}^2$. La borne supérieure $N\binom{a}{b}$ fait alors sens vu à $s \in S$ fixé les majorations $\frac{|as+b|}{\varphi(s)} \leq \frac{|a||\max S|+|b|}{\inf \varphi}$. On a ensuite pour chaque scalaire λ les égalités[7]

$$N\left(\lambda\binom{a}{b}\right) = N\binom{\lambda a}{\lambda b} = \sup_{s\in S} \frac{|(\lambda a)\, s + (\lambda b)|}{\varphi(s)} = \sup_{s\in S} \frac{|\lambda|\, |as+b|}{\varphi(s)} \overset{|\lambda|\geq 0}{=} |\lambda| \sup_{s\in S} \frac{|as+b|}{\varphi(s)} = |\lambda|\, N\binom{a}{b},$$

d'où le caractère positivement homogène de N. Supposons par ailleurs l'égalité $N\binom{a}{b} = 0$: la fonction positive $s \mapsto \frac{|as+b|}{\varphi(s)}$ est alors de borne supérieure nulle, donc est nulle, d'où la nullité du numérateur $s \mapsto as+b$; le segment S étant infini, la nullité de cette fonction affine $s \mapsto as+b$ équivaut à celle du couple $\binom{a}{b}$, ce qui montre que N sépare les points. Pour conclure aux comparaisons triangulaires, il suffit pour chaque $\binom{\alpha}{\beta} \in \mathbb{K}^2$ d'observer à $s \in S$ fixé les majorations

$$\frac{|(a+\alpha)\, s + (b+\beta)|}{\varphi(s)} = \frac{|(as+b) + (\alpha s+\beta)|}{\varphi(s)} \overset{\varphi>0}{\leq} \frac{|as+b|}{\varphi(s)} + \frac{|\alpha s+\beta|}{\varphi(s)} \overset{\varphi>0}{\leq} N\binom{a}{b} + N\binom{\alpha}{\beta}.$$

Généralisons. Soient n un naturel et λ une fonction réelle bornée définie sur S. Chaque injection linéaire $i : \mathbb{K}^n \hookrightarrow C(S, \mathbb{K})$ induit alors sur l'espace $\mathbb{K}^n$ une norme $a \mapsto \sup_S |\lambda\ i(a)|$. L'exercice correspondait au cas $(n, \lambda, i) = \left(2, \frac{1}{\varphi}, a \mapsto \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i\right)$ et nous laissons la lectrice et le lecteur se convaincre que les vérifications de ce cas particulier se transposent immédiatement au cas général

2.2 normes et sev

1. ★★★*Soit V un sous-espace vectoriel de $C(S, \mathbb{K})$ de dimension finie. Montrer alors l'énoncé*

$$\begin{matrix} \exists N \in \mathbb{N} \\ \exists C > 0 \end{matrix},\ \exists s \in S^N,\ \forall f \in V,\ \|f\|_\infty \leq C \sum_{i=1}^{N} |f(s_i)|.$$

(On pourra raisonner par récurrence.)

2. Si l'on trouve un s tel que $f \mapsto \sum_i |f(s_i)|$ soit une norme sur $\mathcal{V}$, l'équivalence (valide car V est de dimension finie) de cette norme avec celle uniforme donnera un réel C comme voulu. Montrons que l'on peut imposer $N = d$ et signalons tout de suite que la positive homogénéité et les comparaisons triangulaires sont immédiates à vérifiées. Il suffit donc, en notant $\mathcal{S}_n$ pour chaque naturel n l'énoncé

$$\forall \mathcal{V} \text{ sous-espace vectoriel de } C(S, \mathbb{K}) \text{ de dimension finie } n,\ \exists s \in S^n,\ f \mapsto \sum_{i=1}^{n} |f(s_i)| \text{ sépare les points de } \mathcal{V},$$

de montrer $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{S}_n$ par récurrence. Il s'ensuivra alors $\mathcal{S}_d$, d'où le résultat demandé sur le sous-espace vectoriel V.

Pour chaque sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ de $C(S, \mathbb{K})$ de dimension 0, l'unique application de la forme $f \mapsto \sum_{i=1}^{0} |f(s_i)|$ est l'application nulle, laquelle sépare tautologiquement les points de $\mathcal{V}$ (il n'y en a qu'un seul !), d'où $\mathcal{S}_0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{S}_n$ et soit $\mathcal{W}$ un sous-espace vectoriel de $C(S, \mathbb{K})$ de dimension finie $n+1$. Soit $w \neq 0$ dans $\mathcal{W}$, soit $\sigma \in S$ tel que $w(\sigma) \neq 0$ et notons $\mathcal{V}$ le noyau de la forme linéaire $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{W} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & f(\sigma) \end{array}\right.$. Puisque $w \notin \mathcal{V}$, on peut décomposer $\mathcal{W} = \mathcal{V} \oplus \mathbb{K}w$ où $\mathcal{V}$ est de dimension $\dim \mathcal{W} - 1 = n$. L'hypothèse $\mathcal{S}_n$ livre alors un $s \in S^n$ tel que $N := f \mapsto \sum_{i=1}^{n} |f(s_i)|$ sépare les points de $\mathcal{V}$. Montrons alors que $f \mapsto |f(\sigma)| + N(f)$ sépare les points de $\mathcal{W}$, ce qui conclura à $\mathcal{S}_{n+1}$ en considérant le $(n+1)$-uplet $(\sigma, s_1, s_2, ..., s_n)$. Soit donc $f \in \mathcal{W}$ tel que $|f(\sigma)| + N(f) = 0$. La nullité de $f(\sigma)$ implique alors l'appartenance $f \in \mathcal{V}$, donc la nullité de $N(f)$ implique la celle de f vu que N sépare les points de $\mathcal{V}$, *c. q. f. d.*

[7] On utilise d'une part l'hypothèse $\inf \varphi > 0$, d'autre part le fait que le segment S est majoré.

2.3 Convexité et comparaison triangulaire

Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application positivement homogène. Montrer alors que f est sous-additive ssi $f \geq 0$ et si la "boule" $f^{-1}([0,1])$ est convexe. (On pourra établir que zéros de f forment un sev de E.) Discuter les hypothèses.

Le sens direct est du cours : chaque norme est positive et chaque boule est convexe (pas besoin de l'axiome de séparation). Supposons réciproquement $f \geq 0$ et $\mathcal{B} := f^{-1}([0,1])$ convexe.

Montrons déjà comme suggéré que la partie $Z := f^{-1}(\{0\})$ est un sev de E. Le caractère "stable par homothétie" résulte de la positive homogénéité de f. Soient par ailleurs $a, b \in Z$ tels que $i := f(a+b) \neq 0$: les homothétés $\frac{4}{i}a$ et $\frac{4}{i}b$ tombent alors dans Z, donc dans $\mathcal{B}([0,1])$, donc le milieu du segment les joignant aussi (par hypothèse de convexité), ce qui s'écrit $f\left(\frac{2}{i}(a+b)\right) \leq 1$, çed $2f(a+b) \leq i$ (bien utiliser la positivité de i), d'où $2 \leq 1$ en simplifiant par i.

Soient à présent $a, b \in E$ dont on notera a' et b' les images respectives par f et montrons $f(a+b) \leq a' + b'$, ce qui conclura.

Si $a, b \in Z$, alors $a + b$ reste dans Z par ce qui précède et la comparaison voulue s'écrit $0 \leq 0 + 0$, ce qu'on a.

Si $a, b \notin Z$, on a alors $a', b' > 0$ (par positivité de f), d'où d'une part les appartenances $\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'} \in \mathcal{B}$, d'autre part $a' + b' > 0$, ce qui donne sens aux réels positifs $(\lambda, \mu) := \left(\frac{a'}{a'+b'}, \frac{b'}{a'+b'}\right)$ de somme 1 et permet d'écrire

$$\text{FIG} \quad \frac{a+b}{a'+b'} = \lambda \frac{a}{a'} + \mu \frac{b}{b'} \in \mathcal{B}, \text{ d'où } f\left(\frac{a+b}{a'+b'}\right) \leq 1, \text{ çed } f(a+b) \leq a' + b', \text{ CQFD.}$$

Supposons enfin $a \notin Z \ni b$. Pour chaque réel $t > 0$, les réels positifs $(\lambda, \mu) := \left(\frac{a'+t}{a'+2t}, \frac{t}{a'+2t}\right)$ font sens et sont de somme 1, ce qui permet d'écrire

$$\frac{a+b}{a'+2t} = \lambda \underbrace{\frac{a}{a'+t}}_{\in \mathcal{B}} + \mu \underbrace{\frac{b}{t}}_{\in Z \subset \mathcal{B}} \in \mathcal{B}, \text{ d'où } f\left(\frac{a+b}{a'+2t}\right) \leq 1, \text{ çed } f(a+b) \leq a' + b' + 2t.$$

On en déduit la comparaison voulue en appliquant $\lim_{t \to 0}$.

$$\text{FIG} \quad \text{la bande } \left[0,1\right[\frac{a}{a'} + \mathbb{R}b \text{ est incluse dans } \mathcal{B}$$

$\Longleftarrow$La convexité étant conséquence de la sous-additivité (et de la positive homogénéité), on ne peut s'en passer. Sans la positivité de f, l'implication est mise en défaut quand $f = -\mathcal{N}$ (la "boule unité" $\{0\}$ est alors convexe) vu pour chaque vecteur $a \neq 0$ les majorations $f(a) + f(-a) = -2\|a\| < 0 = \|a - a\| = f(a + (-a))$.

$\Longrightarrow$ Sans la positive homogénéité de f, la positivité de f n'est pas vérifiée pour $f = \mathrm{Id}$ (qui est sous-additive). Sans la sous-additivité, le résultat est maintenu en dimension 1 (la positive homogénéité de f impliquant qu'elle soit positivement colinéaire au module) mais pas dès que E contient un plan (soient a, b libres, définir $f_{|\mathbb{K}a} = \mathcal{N}$, $f_{|\mathbb{K}b} = -\mathcal{N}$ et $f = 0$ ailleurs : f n'est pas alors pas positive et la "boule" $\mathcal{B}$ n'est pas convexe car $2a \pm b \in \mathcal{B}$ mais pas son milieu $2a$).

2.4 Normes sur LIP

★★*Soit F un espace vectoriel normé et notons $\mathrm{Lip}(A, F)$ l'ensemble des fonctions $f : A \longrightarrow F$ telles que $\sup_{a \neq b}^{a,b \in A} \frac{\|f(a) - f(b)\|}{\|a-b\|} < \infty$. Montrer alors que chaque $\alpha \in A$ induit une norme sur $\mathrm{Lip}(A, F)$ par*

$$f \mapsto |f(\alpha)| + \sup_{a \neq b}^{a,b \in A} \frac{\|f(a) - f(b)\|}{\|a-b\|}.$$

Ces normes sont-elles équivalentes lorsque α décrit A ?

1. Soit $\alpha \in A$ et notons N l'application considérée. Elle fait sens par définition de $\mathrm{Lip}(A, F)$. Soient $f, g \in \mathrm{Lip}(A, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a alors à $a, b \in A$ fixés les égalités

$$\begin{aligned} \|[\lambda f](a) - [\lambda f](b)\| &= \|\lambda f(a) - \lambda f(b)\| = \|\lambda (f(a) - f(b))\| = |\lambda| \|f(a) - f(b)\|, \text{ d'où les égalités} \\ N(\lambda f) &= \|\lambda f(\alpha)\| + \sup_{a \neq b}^{a,b \in A} \frac{|\lambda| \|f(a) - f(b)\|}{\|a-b\|} \overset{|\lambda| \geq 0}{=} |\lambda| \|f(\alpha)\| + |\lambda| \sup_{a \neq b}^{a,b \in A} \frac{\|f(a) - f(b)\|}{\|a-b\|} = |\lambda| N(f). \end{aligned}$$

Notons par ailleurs $S := \sup_{a\neq b}^{a,b\in A} \frac{\|f(a)-f(b)\|}{\|a-b\|}$ et $T := \sup_{a\neq b}^{a,b\in A} \frac{\|g(a)-g(b)\|}{\|a-b\|}$. On a alors à $a, b \in A$ fixés les majorations

$$\begin{aligned}
\|[f+g](a) - [f+g](b)\| &= \|f(a) - f(b) + g(a) - g(b)\| \leq \|f(a) - f(b)\| + \|g(a) - g(b)\| \\
&\leq S\|a-b\| + T\|a-b\| = (S+T)\|a-b\|, \text{ d'où celles} \\
N(f+g) &= \|[f+g](\alpha)\| + \sup_{a\neq b}^{a,b\in A} \frac{\|[f+g](a) - [f+g](b)\|}{\|a-b\|} \\
&\leq \|f(\alpha) + g(\alpha)\| + \sup_{a\neq b}^{a,b\in A} \frac{(S+T)\|a-b\|}{\|a-b\|} \\
&\leq \|f(\alpha)\| + \|g(\alpha)\| + S + T = \|f(\alpha)\| + S + \|g(\alpha)\| + T \\
&= N(f) + N(g).
\end{aligned}$$

Supposons enfin $N(f) = 0$. Chacun des termes de $N(f)$ étant positif, chacun d'eux est alors nul : la nullité du second revient à la nullité des normes $\|f(a) - f(b)\|$ lorsque a et b décrivent A *i. e.* à la constance de f ; la nullité du premier terme montre alors que f est nulle.

Montrons que les normes considérées sont dans la même classe d'équivalence. Soit de plus $\alpha' \in A$ et notons N' la norme induite sur $\operatorname{Lip}(A, F)$ par α. On a alors les majorations

$$\begin{aligned}
N'(f) - N(f) &= \|f(\alpha')\| - \|f(\alpha)\| \leq \|f(\alpha') - f(\alpha)\| \leq S\|\alpha' - \alpha\| \\
&\leq (S + \|f(\alpha)\|)\|\alpha' - \alpha\|, \text{ d'où } N'(f) \leq (1 + \|\alpha' - \alpha\|) N(f).
\end{aligned}$$

Échanger les rôles de α et α' montrerait alors l'équivalence de N et N', ce qui conclut.

2.5 Lip & ps

1. *Supposons que f est l'application $a \mapsto \frac{a}{\max\{1,\|a\|\}}$.*
   (a) *Montrer que f est 2-LIP.*
   (b) *On suppose la norme de E préhilbertienne. Montrer alors que f est 1-LIP.*
   (c) calculer constante lip si pas hilbert ? –> **questin ouverte**

1. L'application f fait bien sens car les dénominateurs sont minorés par 1. Dénotons les images par f à l'aide de primes.

FIG graphe de f quand $E = \mathbb{R}$

   (a) Soient $a, b \in E$ et montrons la majoration $\|a' - b'\| \leq 2\|a-b\|$ en discutant selon que 1 soit à droite, entre ou à gauche de $\|a\|$ et $\|b\|$. Au passage, on pourra toujours imposer les positions relatives de $\|a\|$ et $\|b\|$ quitte à échanger les rôles de a et b.

   Si $\|a\|, \|b\| \leq 1$, on a alors l'égalité $\binom{a'}{b'} = \binom{a}{b}$, d'où les majorations $\|a' - b'\| = \|a-b\| \leq 2\|a-b\|$.

   L'idée est maintenant de majorer $\|a' - b'\| \leq \|a' - c\| + \|c - b'\|$ à l'aide d'un point c choisi de sorte à pouvoir travailler facilement les normes de droite, par exemple en rendant leurs arguments colinéaires à a, b ou $a - b$.

   Supposons $\|a\| \geq 1 \geq \|b\|$. Suivons notre idée et choisissons $c := a$ afin d'avoir les colinéarités $\begin{cases} a' - c \parallel a \\ c - b' \parallel a - b \end{cases}$: on a alors les majorations

FIG CT $d(a, a) \leq d(a', b)$

$$\begin{aligned}
\|a' - b'\| - \|a-b\| &= \left\|\frac{a}{\|a\|} - b\right\| - \|a-b\| \underset{\text{triangulaire}}{\overset{\text{comparaison}}{\leq}} \left\|\left(\frac{a}{\|a\|} - b\right) - (a-b)\right\| = \left\|(1 - \|a\|)\frac{a}{\|a\|}\right\| \\
&= |1 - \|a\||\left\|\frac{a}{\|a\|}\right\| \overset{\|a\|\geq 1}{=} \|a\| - 1 \overset{\|b\|\leq 1}{\leq} \|a\| - \|b\| \underset{\text{triangulaire}}{\overset{\text{comparaison}}{\leq}} \|a-b\|, \text{ ce qui conclut.}
\end{aligned}$$

Supposons enfin $1 \leq \|a\| \leq \|b\|$. Suivons notre idée et choisissons $c := \lambda b'$ où $\lambda := \frac{\|b\|}{\|a\|}$ afin d'avoir les colinéarités $\left\{ \begin{array}{l} a' - c \parallel a - b \\ c - b' \parallel b \end{array} \right.$: on a alors les majorations

$$\begin{aligned} \|a' - b'\| &= \|a' - \lambda b'\| + \|\lambda b' - b'\| = \left\| \frac{a}{\|a\|} - \frac{\|b\|}{\|a\|} \frac{b}{\|b\|} \right\| + |\lambda - 1| \|b'\| \overset{\lambda \geq 1}{=} \left\| \frac{a-b}{\|a\|} \right\| + \frac{\|b\| - \|a\|}{\|a\|} \\ &\underset{\text{triangulaire}}{\overset{\text{comparaison}}{\leq}} \frac{\|a-b\| + \|b-a\|}{\|a\|} \overset{\|a\| \geq 1}{\leq} 2\|a-b\|, \text{ ce qui conclut.} \end{aligned}$$

(b) Soient $a, b \in E$. Si $\|a\|, \|b\| \leq 1$, on a déjà majoré $\|a' - b'\| \leq \|a - b\|$ (avec égalité). Reprenons donc les deux autres cas et raisonnons par équivalences en développant les carrés des normes à l'aide du produit scalaire de E.

Supposons $\|a\| \leq 1 \leq \|b\|$. On a alors les équivalences

$$\begin{aligned} \|a' - b'\| \leq \|a - b\| &\iff \left\| a - \frac{b}{\|b\|} \right\|^2 \leq \|a - b\|^2 \\ &\iff \|a\|^2 - 2 \left\langle a \mid \frac{b}{\|b\|} \right\rangle + 1^2 \leq \|a\|^2 - 2 \langle a \mid b \rangle + \|b\|^2 \\ &\iff 2 \left\langle a \mid \frac{b}{\|b\|} \right\rangle (\|b\| - 1) \leq \|b\|^2 - 1. \end{aligned}$$

Or cette dernière majoration résulte de la multiplication des majorations suivantes (dont chaque membre est bien *positif*) :

$$2 \overset{\|b\| \geq 1}{\leq} \|b\| + 1 \quad \text{et} \quad \|b\| - 1 \leq \|b\| - 1 \quad \text{et} \quad \left| \left\langle a \mid \frac{b}{\|b\|} \right\rangle \right| \underset{\text{Schwarz}}{\overset{\text{Cauchy-}}{\leq}} \|a\| \left\| \frac{b}{\|b\|} \right\| \overset{\|a\| \leq 1}{\leq} 1.$$

Supposons enfin $1 \leq \|a\| \leq \|b\|$. Reprenons alors la majoration $\|a' - \lambda b'\| \leq \|a - b\|$ établie à la question 1a et prouvons celle $\|a' - b'\| \leq \|a' - \lambda b'\|$, ce qui conclura. Pour cela, soient $u, v \in E$ unitaires et montrons la croissance sur $[1, \infty[$ de la fonction $C := \alpha \mapsto \|u - \alpha v\|$.

FIG

On a pour chaques réels $\alpha > \beta \geq 1$ d'une part les équivalences

$$\begin{aligned} C(\alpha) \geq C(\beta) &\overset{C \geq 0}{\iff} \|u - \alpha v\|^2 \geq \|u - \beta v\|^2 \underset{\text{unitaires}}{\overset{u \text{ et } v}{\iff}} 1 - 2\alpha \langle u \mid v \rangle + \alpha^2 \geq 1 - 2\beta \langle u \mid v \rangle + \beta^2 \\ &\iff \alpha^2 - \beta^2 \geq 2(\alpha - \beta) \langle u \mid v \rangle \overset{\alpha > \beta}{\iff} \frac{\alpha + \beta}{2} \geq \langle u \mid v \rangle, \text{ d'autre part les majorations} \\ & \quad |\langle u \mid v \rangle| \underset{\text{Schwarz}}{\overset{\text{Cauchy-}}{\leq}} \|u\| \|v\| \underset{\text{unitaires}}{\overset{u \text{ et } v}{=}} 1 = \frac{1+1}{2} \overset{\alpha, \beta \geq 1}{\leq} \frac{\alpha + \beta}{2}, \text{ ce qui conclut.} \end{aligned}$$

(c) ? ? ?

2.6 Distances

Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\text{bornées}}$, distance de
de 1 à $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$?
de $((-1)^n)$ à $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\text{cv}}$?
de 1 à $\{(u_{n+1} - u_n)\}_u$?

Dans $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, distance de 1 à $\operatorname{Ker} \operatorname{eval}_0$ pour $\|\cdot\|_2$? pour $\|\cdot\|_\infty$?

2.7 Topo trace sur $\mathbb{Z}$ où centres boules pas dans $\mathbb{Z}$

1. Chaque sphère de $\mathbb{Z}$ est incluse dans une sphère de $\mathbb{R}$, donc est ou bien une paire ou bien vide (comme $\mathcal{S}\left(0, \frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$). Réciproquement, chaque paire d'entiers $\{a, b\}$ est la sphère de rayon $|a-b|$ et de centre $\frac{a+b}{2}$ (pas besoin que le centre soit dans la partie considérée). Par conséquent, les sphères de $\mathbb{Z}$ sont ses parties finies de cardinal au plus deux.

   Chaque boule (non vide) de $\mathbb{Z}$ est la trace sur $\mathbb{Z}$ d'une boule de $\mathbb{R}$, donc d'un intervalle borné, donc est un intervalle borné de $\mathbb{Z}$, *i. e.* un segment de $\mathbb{Z}$. Réciproquement, pour chaques relatifs $a < b$, le segment $[a, b|]$ est la boule fermée de centre $\frac{a+b}{2}$ et rayon $|a-b|$, ou encore la boule ouverte de même centre et rayon $|a-b|+1$. La partie vide valant par ailleurs la boule $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ (fermée comme ouverte), les boules de $\mathbb{Z}$ sont ses segments et la partie vide, *i. e.* les intervalles $[z, z+c|[$ pour z décrivant $\mathbb{Z}$ où c dénote le cardinal de la boule considérée.

2.8 fermés/ouverts relatifs : indépendent de l'extension

1. (a) *Montrer que les boules ouvertes de E sont les traces sur E des boules ouvertes de F centrées dans E.*
   (b) *Montrer que les ouverts de E vu comme espace vectoriel normé sont ceux de E vu comme partie de F.*
   (c) *Montrer que les ouverts de A vu comme partie de E sont ceux de A vu comme partie de F.*

SOL

1. (a) On a pour chaque $c \in E$ et chaque réel $r > 0$ les égalités

$$\mathring{\mathcal{B}}_E(c, r) = \{e \in E\ ;\ \|e-c\|_E < r\} \underset{\text{étend la norme de } E}{\overset{E \subset F \text{ et la norme de } F}{=}} E \cap \{e \in F\ ;\ \|e-c\|_F < r\} = E \cap \mathring{\mathcal{B}}_F(c, r).$$

   (b) Rappelons que dans chaque espace vectoriel normé les ouverts sont les réunions de boules ouvertes (*cf.* exercice **??** section **??**).

   Soit O un ouvert de E vu comme espace vectoriel normé, soit $\mathcal{B}$ un ensemble de boules ouvertes de E dont O est la réunion, pour chaque $B \in \mathcal{B}$ notons c_B et r_B les centre et rayon respectifs de la boule B ainsi que $B' := \mathring{\mathcal{B}}_F(c_B, r_B)$. La réunion $O' := \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B'$ est alors un ouvert de F tel que[8]

$$O' \cap E = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B' \cap E = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \mathring{\mathcal{B}}_F(c_B, r_B) \cap E \overset{\text{question 1a}}{=} \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \mathring{\mathcal{B}}_E(c_B, r_B) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = O,$$

   ce qui montre que O est un ouvert relatif de E vu comme partie de F.

   Soit réciproquement O un ouvert de E vu comme partie de F, soit $O' \subset F$ un ouvert tel que $O = O' \cap E$, notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des boules ouvertes de E incluses dans O et montrons l'égalité $O = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$: la partie O sera alors ouverte dans E vu comme espace vectoriel normé. L'inclusion $\supset$ étant immédiate, soit $o \in O$: ce point tombant alors dans l'ouvert O', on peut invoquer un réel $r > 0$ tel que $\mathring{\mathcal{B}}_F(o, r) \subset O'$, d'où l'inclusion $E \cap \mathring{\mathcal{B}}_F(o, r) \subset E \cap O'$, *i. e.* (puisque $o \in E$ et vu la question 1a) $\mathring{\mathcal{B}}_E(o, r) \subset O$, ce qui s'écrit encore $\mathring{\mathcal{B}}_E(o, r) \in \mathcal{B}$, d'où la conclusion $o \in \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$.

   (c) Soit $O \subset A$ et indiquons en indice l'espace vectoriel normé (E ou F) dont on voit A comme partie.

   Supposons O ouvert dans A_F et soit O' un ouvert de F tel que $O = O' \cap A$. Les inclusions $O \subset A \subset E$ permettent alors d'écrire $O = E \cap O = E \cap O' \cap A$ où l'ouvert $E \cap O'$ de E vu comme partie de F est (d'après la question 1b) un ouvert de E vu comme espace vectoriel normé, ce qui montre que O est un ouvert de A_E.

   Supposons réciproquement O ouvert dans A_E et soit Ω un ouvert de E (vu comme espace vectoriel normé) tel que $O = \Omega \cap A$. D'après la question 1b, l'ouvert Ω est de la forme $O' \cap E$ pour un certain ouvert O' de F, ce qui montre que

$$O = \Omega \cap A = O' \cap E \cap A \overset{A \subseteq E}{=} O' \cap A \text{ est un ouvert de } A \subset F.$$

[8] La distributivité de $\cap$ sur $\cup$ permet de se passer de parenthèses.

3 Pour autres chapitres

pour chapitre intégrales & limites

$\lim_{n\infty}\int_a^b f(t)\varphi(nt)\,dt = 0$? bilinéaire en (f,φ) (donc OPS $f(0)=0$ et $\langle\varphi\rangle=0$), continue (majorer par $(b-a)\|f\|\|\varphi\|$), donc suffit d'évaleur sur vect dense, eg $\chi_{[\alpha,\beta]}, t^n$

pour f continue sur $[0,1]$, trouver la limite de $\int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)dx_1\cdots dx_n$ quand n est grand.

Sol : par Stone, les $e^{a_i\cdot}$ sont denses. Or, pour $f=e^{a\cdot}$, l'intégrale vaut $\left(\int_{[0,1]} e^{\frac{a\cdot}{n}}\right)^n$ qui se DLifie en $e^{\frac{a}{2}+O\left(\frac{1}{n}\right)}$. Réponse : $f\left(\frac{1}{2}\right)$.