Espaces vectoriels normés 1 : normes, suites, adhérence et intérieur

Marc Sage (collab. Michel Wigneron)

29 mai 2017

Table des matières

1 Introduction

La lettre $\mathbb{K}$ dénotera pour tout ce chapitre le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

L'analyse réelle et complexe de première année étudiait les propriétés *topologiques* du corps $\mathbb{K}$. La *topologie*[1] de $\mathbb{K}$ donne un sens à et étudie la notion de "être proche de", à l'aide des notions de *voisinage* (d'un scalaire donné), de *tendance* (d'une suite ou d'une fonction vers un scalaire donné), de *convergence* ou de *continuité*. En voyant le module complexe $|\cdot|$ comme une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^2$, on obtient un passage naturel du module à la norme : il suffira tout simplement de réécrire toutes les définitions et démonstrations en doublant le nombre de barres.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On évoque pour tout ce cours}\\ \text{un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel } E\\ \text{ainsi qu'une partie } A \subset E.\end{array}}$$

La topologie est littéralement le discours sur le lieu. Outre le sens de "être proche de", elle précise celui de "tendre vers". La notion de *tendance* y est donc essentielle et trois choses conviennent afin d'en parler proprement dans les espaces vectoriels.

1. La première est de ramener chaque tendance dans E à une tendance dans $\mathbb{R}_+$ (où l'analyse de première année pourra se déployer) tout en conservant des propriétés "agréables". Cela sera réalisé en munissant l'espace vectoriel E d'une *norme*.
2. La deuxième est de pouvoir faire tendre des suites, *i. e.* de pouvoir parler de *limites séquentielles*[2]. Cela nous conduira aux notions de points *adhérents* et de parties *fermées*.
3. La troisième est de décrire tout type d'opérations *locales*, *i. e.* faisant sens *au voisinage d*'un point donné : en effet, quand on regarde ce qui passe lorsque l'on s'"approche de" ce point, tout ce qui est "loin de" ce point est hors propos. Cela nous incite à vouloir *disposer de "place"* autour du point considéré et nous conduira aux notions de points *intérieurs* et de parties *ouvertes*.

Les deux derniers couples de notions sont en fait les faces d'une même pièce. Cette dualité sera énoncée (et prouvée) sous la forme suivante :

chaque partie est fermée ssi son complémentaire est ouvert.

Il sera dans un quatrième temps possible de faire de la topologie dans les *parties* de E, en laissant sur une telle partie une "trace" de la topologie de E.

[1] *topos* = lieu, *logos* = discours. Anciennement *analysis situ* (Poincaré), littéralement *étude du lieu.*

[2] *séquentiel* = adjectif relatif à *suite*

Rappel – **notation**[3] : pour chaque ensemble $\mathcal{E}$, les applications $\mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{K}$ bornées forment un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathcal{E}}$ noté

$$\mathcal{B}(\mathcal{E}, \mathbb{K}) := \{b : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{K} \ ; \ b \text{ bornée}\} \text{ qui est de dimension finie ssi } \mathcal{E} \text{ est fini.}$$

Par exemple, $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ dénotera l'ensemble des suites scalaires bornées et, pour chaque naturel n,

$$\text{on a l'égalité } \mathcal{B}([1, n]], \mathbb{K}) = \mathbb{K}^{[1,n]]} = \mathbb{K}^n.$$

Le cas pathologique $\mathcal{E} = \emptyset$ (resp. $n = 0$) équivaut à la nullité de l'espace vectoriel $\mathcal{B}(\mathcal{E}, \mathbb{K})$ (resp. $\mathbb{K}^n$) et n'apparaîtra jamais en pratique.

Convention. Il nous arrivera souvent dans ce cours de considérer des bornes supérieures d'ensembles de réels *positifs* (des modules, des distances, des normes). Nous prendrons alors commme ensemble ordonné sous-jacent $\overline{\mathbb{R}_+} = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ (au lieu de $\overline{\mathbb{R}}$), de sorte à pouvoir donner sens à $\sup \emptyset = \sup_{\overline{\mathbb{R}_+}} \emptyset = \min \overline{\mathbb{R}_+} = 0$ et de nous éviter de pénibles discussions de cas. Par exemple, pour chaque ensemble I, resteront valides les équivalences

$$\begin{array}{c} \forall a \in \mathbb{R}_+^I \\ \forall R \geq 0 \end{array}, \ \left[(\forall i \in I, \ a_i \leq R) \Longleftrightarrow \sup_{i \in I} a_i \leq R \right]$$

2 Normes : généralités, exemples

2.1 Normes, distances, équivalence de normes

Définition (norme)

On appelle ***norme*** *sur E toute application $\mathcal{N} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que*

1. $\forall (\lambda, a) \in \mathbb{K} \times E, \ \mathcal{N}(\lambda a) = |\lambda| \ \mathcal{N}(a)$;[4]
2. $\forall a \in E, \ \mathcal{N}(a) = 0 \Longrightarrow a = 0$;[5]
3. $\forall a, b \in E, \ \mathcal{N}(a + b) \leq \mathcal{N}(a) + \mathcal{N}(b)$.[6]

Étant donnée une telle norme, on dit que $(E, \mathcal{N})$ est un ***espace vectoriel normé*** *ou encore que E est* ***normé par*** *$\mathcal{N}$.*

*On qualifiera d'****unitaire*** *tout vecteur de norme 1 (notion relative à la norme considérée).*

Notation : une norme est usuellement notée $\|\cdot\|$, de sorte que

les symboles $\|v\|$ se lisent « norme de v ».

[3] *Mnémo* : $\mathcal{B}$ comme « **b**orné » ou (en anglais) « ***b**ounded* ».
[4] On dit que $\mathcal{N}$ est ***positivement homogène***.
[5] On dit que $\mathcal{N}$ ***sépare les points*** (de E).
[6] Les comparaisons de cet axiome sont qualifiées de ***triangulaires***.

Remarques

• **Culture lexicale**. Pour chaque naturel α, une quantité donnée est dite ***homogène***[7] ***de degré*** α en un argument donné si, lorsque l'on multiplie cet argument par un scalaire λ, la quantité associée se retrouve toujours multipliée par λ^α. Par exemple, la longueur d'un cercle est homogène en son rayon, l'aire d'un rectangle est homogène en chacun de ses côtés, l'aire d'un carré (resp. le volume d'un cube) est homogène de degré 2 (resp. 3) en son côté et chaque application linéaire est homogène. C'est pourquoi l'axiome 1 d'une norme s'appelle sa ***positive homogénéité***, le qualificatif « positive » indiquant la positivité de l'application module $t \mapsto |t|$.

• **Culture historique**. Le concept d'espace vectoriel normé a été défini en toute généralité en 1920-1922 par Stefan Banach, Hans Hahn et Eduard Helly. La notation $\|v\|$ pour la norme avait déjà été introduite par Maurice Fréchet et Erhard Schmidt dans des travaux de 1907-1908. La thèse de Fréchet, soutenue en 1906 et intitulée *Sur quelques points du calcul fonctionnel*, fut l'un des coups d'envoi de l'analyse fonctionnelle[8]. L'assise ensembliste de la topologie fut présentée peu après en 1914 par Felix Hausdorff dans son *Grundzüge der Mengenlehre*.

Exemples[9]

1. Le module est une norme sur $\mathbb{K}$ vu comme $\mathbb{K}$-espace vectoriel ou[10] comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Plus généralement, chaque produit scalaire sur E induit une norme $a \mapsto \sqrt{\langle a \mid a \rangle}$.
3. Soit $n \geq 1$ un naturel. L'application $a \mapsto \max_{i\in[1,n]} |a_i|$ est alors une norme sur $\mathbb{K}^n$, appelée ***norme uniforme*** ou ***norme d'indice*** ∞. Il en va de même pour chaque réel $\gamma \geq 1$ de l'application $a \mapsto \sqrt[\gamma]{\sum_{i=1}^n |a_i|^\gamma}$ appelée ***norme d'indice*** γ. On peut dans cet exemple[11] remplacer $\mathbb{K}^n$ par $\mathbb{K}_n[X]$, par $\mathbb{K}[X]$ ou par $M_{p,q}(\mathbb{K})$ pour chaques naturels $p, q \geq 1$. Le nom et la notation de la norme d'indice ∞ sont par ailleurs motivés par la tendance $\|a\|_\gamma \underset{\gamma\to\infty}{\longrightarrow} \|a\|_\infty$ à $a \in \mathbb{K}^n$ fixé.
4. Soient $\mathcal{E}$ un ensemble et S un segment infini de $\mathbb{R}$. L'application $f \mapsto \sup_S |f|$. est alors une norme sur $\mathcal{B}(\mathcal{E}, \mathbb{K})$, appelée ***norme uniforme*** ou ***norme d'indice*** ∞. Il en va de même pour chaque réel $\gamma \geq 1$ de l'application $f \mapsto \sqrt[\gamma]{\int_S |f|^\gamma}$ définie sur $C(S, \mathbb{K})$ et appelée ***norme d'indice***[12] γ.
5. (plus exotique) On peut "mélanger" les normes de l'exemple 3 en normant pour chaque segment infini $\Gamma \subset [1, \infty[$ chacun des espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$ ou $M_{p,q}(\mathbb{K})$ par $a \mapsto \int_{\gamma\in\Gamma} \|a\|_\gamma \, d\gamma$ (l'intégrande est à a fixé continue selon γ, *a fortiori* intégrable).

[7] Le qualificatif « ***homogène*** » tout court abrège « homogène de degré 1 ».

[8] C'est ainsi originellement à Fréchet que l'on doit le point de vue – adopté de nos jours en classes préparatoires ! – consistant à penser les fonctions comme des *points* dans un espace.

[9] Ces exemples sont pour l'instant donnés sans démonstration. Ceux explicitement au programme seront détaillés plus tard.

[10] Quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, chaque norme sur E est une norme sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

[11] Lorsque $\gamma = 2$, on retrouve les normes euclidiennes.

[12] *Attention* : si P dénote un polynôme, la notation $\|P\|_\gamma$ est ambigüe selon que l'on voit P comme suite de coefficients (application de source $\mathbb{N}$) ou comme fonction (application de source un intervalle réel).

Remarques

- Les normes d'indices 1, 2 et ∞ (définies sur $\mathbb{K}^n$, sur $C(S,\mathbb{K})$ ou $\mathcal{B}(\mathcal{E},\mathbb{K})$) et celles associées à un produit scalaire sont les seules explicitées par le programme. Nous prouverons que ce sont bien des normes à la section 2.3.
- **Existence d'une norme (hors programme)**. Montrons que l'espace vectoriel E admet toujours une norme. Soit $B \subset E$ une partie basique de E (cette évocation utilise et requiert en général l'axiome du choix) et soit $\gamma \in [1,\infty]$. Pour chaque $a \in E$, en notant $(\lambda_b)_{b\in B}$ la famille des coordonnées dans la base $(b)_{b\in B}$, puis[13] $S := \{b \in B \; ; \; \lambda_b \neq 0\}$ (lequel est *fini*) et λ' la famille finie $(\lambda_s)_{s\in S}$, on abrégera $\alpha := \|\lambda'\|_\gamma$. Avec ces notations, la lectrice et le lecteur pourront vérifier par eux-mêmes que l'application $a \mapsto \alpha$ est une norme sur E, ce qui légitime l'évocation à suivre.

Pour la suite du cours, on évoque une norme sur E, notée indifféremment $\mathcal{N}$ ou $e \mapsto \|e\|$.

Remarque – **Cône des normes**. Pour chaque réel $\lambda > 0$, multiplier par λ les trois propriétés faisant que $\mathcal{N}$ est une norme redonne les trois mêmes propriétés où l'on a remplacé $\mathcal{N}$ par $\lambda\mathcal{N}$, ce qui montre que l'espace vectoriel E est normable par $\lambda\mathcal{N}$. Plus généralement,

l'ensemble des normes[14] *de E est stable par combinaisons linéaires à coefficients strictement positifs.*

On pourrait donc créer plein de nouvelles normes à partir des quelques précédentes. L'on se gardera toutefois bien de croire à l'*exhaustivité* de ce procédé, les normes de l'exemple 5 semblant difficilement ainsi atteignables. La description exhaustive des normes de E est de fait hors programme et nous mentionnerons celle de ses *boules unités* en toute fin de section 4.1 ? ? ?.

Propriétés

1. *Chaque norme est une application paire, positive et annule uniquement le vecteur nul :*
$$\forall a \in E,\ \|-a\| = \|a\| \geq 0 \text{ avec égalité ssi } a = 0.$$
FIG

2. *Chaque norme vérifie pour chaques vecteurs a et b l'encadrement*[15] *suivant :*
$$\big|\,\|a\| - \|b\|\,\big| \leq \|a-b\| \leq \|a\| + \|b\|\,.$$
FIG

[13] *Culture* : la partie S est appelée le ***support*** de la famille λ.
[14] *Culture hors programme* : on dit que c'est un ***cône***, par analogie avec une telle partie dans le plan.
[15] Ces comparaisons sont également qualifiées de ***triangulaires***.

3. *Chaque vecteur non nul induit, après division par sa norme, un vecteur unitaire*[16] *:*

$$\forall a \in E \setminus \{0\}\ ,\ \left\| \frac{a}{\|a\|} \right\| = 1.$$

FIG

Démonstration Soient $a, b \in E$.

1. On a les égalités

$$\begin{array}{rcl} \|0\| & = & \|0a\| \underset{\text{homogénéité}}{\overset{\text{positive}}{=}} |0|\ \|a\| \ = \ 0\ \|a\| = 0 \text{ et} \\ \|-a\| & = & \|(-1)\,a\| \underset{\text{homogénéité}}{\overset{\text{positive}}{=}} |-1|\ \|a\| = \|a\|\text{, d'où les minorations} \\ \|a\| & = & \dfrac{\|a\| + \|-a\|}{2} \underset{\text{triangulaire}}{\overset{\text{comparaison}}{\geq}} \dfrac{\|a + (-a)\|}{2} = \dfrac{\|0\|}{2} = 0. \end{array}$$

Ainsi, notre norme annule 0 (et aucun autre vecteur d'après l'axiome de séparation), est paire et positive.

2. On a déjà les majorations

$$\|a - b\| = \|a + (-b)\| \underset{\text{triangulaire}}{\overset{\text{comparaison}}{\leq}} \|a\| + \|-b\| \underset{\text{la norme}}{\overset{\text{parité de}}{=}} \|a\| + \|b\|\,.$$

Par ailleurs, on a les minorations

$$\|a - b\| + \|b\| \underset{\text{triangulaire}}{\overset{\text{comparaison}}{\geq}} \|(a - b) + b\| = \|a\|\text{, d'où } \|a\| - \|b\| \leq \|a - b\|\,,$$

d'où en échangeant les rôles de a et b la majoration $\|b\| - \|a\| \leq \|b - a\|$, *i. e.*

$$-\left(\|a\| - \|b\|\right) \leq \|a - b\|\text{, d'où la comparaison souhaitée.}$$

3. Imposons $a \neq 0$. Alors le vecteur $\frac{a}{\|a\|}$ fait sens (le dénominateur est non nul d'après l'axiome de séparation) et est de norme

$$\left\| \frac{a}{\|a\|} \right\| = \left\| \frac{1}{\|a\|} a \right\| \underset{\text{homogénéité}}{\overset{\text{positive}}{=}} \left| \frac{1}{\|a\|} \right| \|a\| \underset{\text{est positive}}{\overset{\text{chaque norme}}{=}} \frac{1}{\|a\|} \|a\| = 1.$$

REMARQUES

• **Normes sur** $\mathbb{K}$. Lorsque $E = \mathbb{K}$, on a pour chaque scalaire-vecteur $a \in \mathbb{K}$ les égalités

$$\|a\| = \|a \cdot 1\| \underset{\text{homogénéité}}{\overset{\text{positive}}{=}} |a|\, \|1\| \overset{\text{définir } \lambda := \|1\|}{=} \lambda\ |a|$$

ce qui montre que chaque norme sur $\mathbb{K}$ est un multiple strictement[17] positif de son module. La réciproque ayant été vue dans une remarque précédente, nous avons établi que

[16] Le vecteur unitaire $\frac{a}{\|a\|}$ s'appelle l'***unitarisé*** de a (ou son ***normalisé***).

[17] Le réel λ est strictement positif comme norme d'un vecteur non nul.

les normes de $\mathbb{K}$ forment une demi-droite ouverte dirigée par le module $a \mapsto |a|$.

• **Norme sur** $\{0\}$. Lorsque E est nul, le point 3 montre que sa norme est l'application nulle, laquelle est bien une norme sur E.

Définition – Propriétés (distance, axiome d'une distance)

*On appelle **distance** de E (associée à la norme $\mathcal{N}$) l'application*[18]

$$d := \left\{ \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a,b) & \longmapsto & \|b-a\| \end{array} \right. .$$

Elle vérifie[19] *pour chaques vecteurs a, b, c :*

1. $d(a,b) = d(b,a)$ *;*
2. $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$ *;*
3. $d(a,b) \geq 0$ *avec égalité ssi* $a = b$.

Démonstration

Soient $a, b, c \in E$. On a alors (en utilisant les trois propriétés précédentes) les égalités

$$d(a,b) = \|b-a\| = \|-(a-b)\| = \|a-b\| = d(b,a),$$

les majorations

$$d(a,b) = \|b-a\| \geq 0 \text{ avec égalité ssi } b-a=0, \textit{ i. e.} \text{ ssi } a=b,$$

et les majorations

$$d(a,c) = \|a-c\| = \|(a-b)+(b-c)\| \leq \|a-b\| + \|b-c\| = d(a,b) + d(b,c).$$

Remarques

• **Vecteurs ou points ?** Dans le langage *métrique*, *i. e.* en termes de *distances*, il convient de penser les éléments de l'espace E non plus comme des vecteurs mais comme des *points* – comme nous le ferions en voyant E comme espace affine. À la lectrice et au lecteur d'utiliser toute la puissance de ce guide "visuel" !

• **Noms des axiomes**. La propriété 1 dénote le caractère ***symétrique*** d'une distance et celle 2 s'appelle la ***comparaison triangulaire*** (par analogie avec la distance entre deux points dans un plan). Enfin, la propriété 3 permet de "séparer" les points de E au sens où deux points donnés seront "séparés" (*i. e.* distincts) ssi leur distance associée est non nulle[20] ; c'est pourquoi

*l'équivalence $d(a,b) = 0 \iff a = b$ est appelée **axiome de séparation**.*

[18] On précisera au besoin en indice la norme ou l'espace vectoriel normé sous-jacent : $d_{\mathcal{N}}$ ou d_E.
[19] Les symboles $d(a,b)$ se lisent « distance de a à b ».
[20] L'axiome de séparation ramène donc l'égalité dans l'espace E à une égalité dans le corps $\mathbb{R}$ (plus simple).

- **Symétrie centrale**. Soit $c \in E$. Vu pour chaque $a \in E$ les égalités

$$\text{FIG} \quad d(c, 2c-a) = \|(2c-a)-c\| = \|c-a\| = d(c,a),$$

nous pouvons affirmer que

l'application "distance à c" est invariante par la symétrie centrale de centre c.

- **Culture hors programme**. Lorsque E est un ensemble tout court (plus nécessairement un espace vectoriel), les trois points ci-dessus définissent axiomatiquement une *distance* sur E, concept introduit par Maurice FRÉCHET dans sa thèse[21] de 1906. Étymologiquement, le terme *métrique* se réfère à quelque chose qui peut être mesuré, sous-entendu à une *distance*, d'où l'usage en topologie de considérer l'adjectif *métrique* comme relatif au nom *distance*. C'est en ce sens qu'il faut entendre le terme d'*espace métrique* introduit en 1914 par Felix HAUSDORFF : espace muni d'une distance.

Définition – Propriété (équivalence de normes)

Soit $\mathcal{N}'$ une norme sur E. On dit que $\mathcal{N}'$ est ***équivalente*** *à $\mathcal{N}$ si*[22]

$$\exists \alpha, \beta > 0, \ \alpha\mathcal{N} \leq \mathcal{N}' \leq \beta\mathcal{N}.$$

La relation "est équivalente à" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes de E.

Nous verrons que deux normes équivalentes "induisent" la même topologie sur E : l'analyse y sera donc la même. Énonçons dès à présent un résultat fort :

> *quand l'espace vectoriel E est de dimension finie, ses normes forment une seule classe d'équivalence.*

Ce théorème ne sera démontré qu'au chapitre ? ? ? mais nous l'utiliserons dès que possible.

Exemples Soit S un segment réel infini dont on note L la longueur.

1. Pour chaque naturel $n \geq 1$, l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie, donc pour chaques $\alpha, \beta \in [1, \infty]$ les normes d'indices respectifs α et β sont équivalentes[23].
2. Imposons $E = \mathbb{K}[X]$ et soient $\alpha > \beta \geq 1$ deux réels. On a alors pour chaque naturel n, en abrégeant $P_n := \sum_{i=1}^n X^i$, les égalités $\|P_n\|_\alpha = \sqrt[\alpha]{\sum_{i=1}^n 1^\alpha} = n^{\frac{1}{\alpha}}$, d'où la tendance $\frac{\|P_n\|_\beta}{\|P_n\|_\alpha} = n^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, laquelle montre que les normes d'indices respectifs α et β ne sont pas équivalentes. Cette non-équivalence reste valide quand $\alpha = \infty$ (remplacer $n^{\frac{1}{\alpha}}$ par 1 dans ce qui précède). On dispose ainsi d'une famille indexée par $[1, \infty]$ de normes sur $\mathbb{K}[X]$ deux à deux non équivalentes[24].

[21] FRÉCHET parlait alors d'*écart* (au lieu de *distance*) et d'espace *distancié* (au lieu d'espace *métrique*).

[22] Autrement dit, $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ sont équivalentes si les applications $\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}'}$ et $\frac{\mathcal{N}'}{\mathcal{N}}$ sont bornées sur $E \setminus \{0\}$.

[23] On pourrait même quand $\alpha \leq \beta$ préciser $\max_{\substack{v\in\mathbb{K}^n \\ v\neq 0}} \frac{\|v\|_\alpha}{\|v\|_\beta} = n^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}}$ grâce à la croissance des moyennes généralisées montrées à l'exo ? ? ? chap convexité, ce maximum étant réalisé pour $v = (1, 1, ..., 1)$.

[24] La situation est donc radicalement différente de celle des espaces $\mathbb{K}_n[X]$.

3. Imposons $E = C^1(S, \mathbb{K})$ et soient $s, t \in S$. Les accroissements finis permettent de majorer à $f \in E$ fixé

$$\begin{aligned} |f(t)| &\leq |f(s)| + |f(t) - f(s)| \leq |f(s)| + L \|f'\|_\infty, \text{ d'où} \\ \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty &\leq |f(s)| + (L+1)\|f'\|_\infty \leq (L+1)(|f(s)| + \|f'\|_\infty). \end{aligned}$$

Vu par ailleurs la majoration immédiate $|f(s)| + \|f'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, on en déduit[25]

l'équivalence des normes $f \mapsto \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ et $f \mapsto |f(s)| + \|f'\|_\infty$ sur $C^1(S, \mathbb{K})$.

4. Imposons $E = C(S, \mathbb{K})$, $S = [0,1]$ et soient $\alpha > \beta \geq 1$ deux réels. On a alors pour chaque naturel n, en abrégeant $f_n := t \mapsto t^n$, les égalités

$$\|f_n\|_\alpha^\alpha = \int_0^1 t^{n\alpha} dt = \left[\frac{t^{n\alpha+1}}{n\alpha+1}\right]_{t=0}^1 = \frac{1}{n\alpha+1}, \text{ d'où la tendance}$$
$$\frac{\|f_n\|_\alpha}{\|f_n\|_\beta} = \frac{(n\beta+1)^{\frac{1}{\beta}}}{(n\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha}}} \underset{n\to\infty}{\overset{\text{car } \alpha,\beta>0}{\sim}} \text{Cste} \cdot n^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

laquelle montre que les normes d'indices respectifs α et β ne sont pas équivalentes[26]. Cette non-équivalence reste valide sans imposer $S = [0,1]$ et même quand $\beta = \infty$ (remplacer $n^{\frac{1}{\beta}}$ par 1 dans la tendance ci-dessus).

Définition (algèbre à multiplication continue)

Imposons que l'espace vectoriel E soit une algèbre. Sa multiplication est alors dite ***continue*** *si*

$$\exists C > 0,\ \forall a, b \in E,\ \|ab\| \leq C \|a\| \|b\|, \text{ i. e. } si \sup_{a,b\neq 0}^{a,b\in E} \frac{\|ab\|}{\|a\| \|b\|} < \infty.$$

Remarque – Cette définition deviendra une *propriété* dans l'étude générale de la continuité (cf. chap ? ? ?). Utiliser ce vocabulaire de manière anticipée nous sera cependant pratique.

Exemples

1. Imposons $E = \mathbb{K}$: la norme $\mathcal{N}$ est alors de la forme $a \mapsto \lambda |a|$ pour un certain réel $\lambda > 0$, d'où les égalités $\sup_{a,b\neq 0}^{a,b\in\mathbb{K}} \frac{\|ab\|}{\|a\|\|b\|} = \sup_{a,b\neq 0}^{a,b\in\mathbb{K}} \frac{\lambda|ab|}{\lambda|a|\lambda|b|} = \frac{1}{\lambda}$, ce qui montre (en imposant $C := \frac{1}{\lambda}$ dans la définition ci-dessus) la continuité de la multiplication de l'espace vectoriel normé $\mathbb{K}$.
2. Nous verrons plus généralement (? ? ?) que[27]

lorsque E est une algèbre de dimension finie, sa multiplication est continue.

La lectrice et le lecteur sont encouragés à calculer la borne supérieure ci-dessus à $n \in \mathbb{N}^*$ fixé lorsque $E = M_n(\mathbb{K})$ est muni de la norme uniforme (resp. euclidienne) – on trouve n (resp. 1).

[25] On laisse à la lectrice et au lecteur le soin de vérifier qu'il s'agit bien de normes.
[26] Comme dans $\mathbb{K}[X]$, l'on dispose dans $C(S, \mathbb{K})$ d'une famille injective indexée par $[1, \infty]$ de classes d'équivalences de normes.
[27] Et ce pour *chaque* norme de l'espace vectoriel E.

3. La multiplication de l'espace vectoriel $V := C([0,1], \mathbb{K})$ muni de la norme d'indice 1 n'est pas continue[28] vu à $n \in \mathbb{N}^*$ fixé les minorations et tendance

$$\sup_{\substack{a,b\in V\\ a,b\neq 0}} \frac{\|ab\|}{\|a\|\,\|b\|} \geq \sup_{\substack{a\in V\\ a\neq 0}} \frac{\|a^2\|}{\|a\|^2} \geq \frac{\left\|\left[t\mapsto t^{n-1}\right]^2\right\|_1}{\left(\|t\mapsto t^{n-1}\|_1\right)^2}$$
$$= \frac{\int_0^1 t^{2n-2}dt}{\left(\int_0^1 t^{n-1}dt\right)^2} = \frac{\frac{1}{2n-1}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} \geq \frac{\frac{1}{2n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n}{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

4. Soit $\mathcal{E}$ un ensemble tel que $E = \mathcal{B}(\mathcal{E}, \mathbb{K})$. On a alors pour chaques $f, g \in E$ et à $a \in \mathcal{E}$ fixés les majorations

$$|fg|(a) = |[fg](a)| = |f(a)\,g(a)| = |f(a)|\,|g(a)|$$
$$\leq \|f\|\,\|g\|\,, \text{ d'où celle } \|fg\| \leq \|f\|\,\|g\|\,,$$

ce qui montre que la multiplication de $\mathcal{B}(\mathcal{E}, \mathbb{K})$ est continue[29]. Plus généralement[30],

lorsque E est une algèbre dont la multiplication est sous-multiplicative, cette dernière est continue.

Sanity check : pour chaque naturel n, l'algèbre $M_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie, donc à multiplication continue pour chaque norme, en particulier pour celle euclidienne ; or cette dernière est sous-multiplicative d'après l'exemple 2, *a fortiori* bien continue. (Vérification identique avec la norme $a \mapsto n\|a\|_\infty$.)

Exercices d'application

1. *Montrer que les applications $\binom{a}{b} \mapsto |a| + |b|$ et $\binom{a}{b} \mapsto \sqrt{a^2 + 18b^2}$ sont des normes sur $\mathbb{R}^2$. Sont-elles équivalentes ?*
2. *Montrer l'énoncé $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists\lambda > 0,\ \forall P \in \mathbb{K}_n[X],\ \int_0^1 |P| \geq \lambda \sup_{[0,1]} |P|$. (On pourra utiliser l'équivalence des normes en dimension finie.)*
3. *Soit S un segment réel infini.*
   (a) *Soit i une injection linéaire d'espace vectoriel but E. Montrer alors que la composée $\mathcal{N} \circ i$ définit une norme sur l'espace vectoriel source.*
   (b) *On impose E de dimension finie. Montrer alors que chaque base de E induit une norme sur E définie en associant à chaque vecteur la borne supérieure des modules de ses coordonnées selon la base considérée.*
   (c) *Montrer que l'application $\binom{a}{b} \mapsto \max_{s\in S} |as + b|$ est une norme sur $\mathbb{K}^2$ et que l'application $(a, b, c) \mapsto \sqrt{\int_S \frac{(as^2+bs+c)^2}{1+s^2} ds}$ est une norme sur $\mathbb{K}^3$.*
   (d) *Montrer que l'application $f \mapsto \int_S |\lambda f|$ est une norme sur $C(S, \mathbb{K})$ pour chaque fonction $\lambda \in C(S, \mathbb{K})$ positive dont l'ensemble des zéros est fini. Les normes ainsi obtenues (lorsque λ varie) sont-elles équivalentes ?*

[28] *Sanity check* : l'espace vectoriel $C([0,1], \mathbb{K})$ n'est pas de dimension finie.

[29] Même si, quand $\mathcal{E}$ est infini, $\mathcal{B}(\mathcal{E}, \mathbb{K})$ n'est pas de dimension finie.

[30] *Culture* : on dit alors que E est une ***algèbre normée*** (cas $C = 1$ dans notre définition de la continuité de la multiplication).

4. *(plus difficile) Soit n un naturel, soit $\gamma \geq 1$ un réel, notons* $N := \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & \sqrt[\gamma]{\sum_{i=1}^n |a_i|^\gamma} \end{array} \right.$ *et soient $a, b \in \mathbb{R}^n$.*
   (a) *À l'aide d'une comparaison de Hölder (*cf. *chpitre ? ? ?), montrer la minoration*
   $$N(a)\, N(a+b)^{\gamma-1} \geq \sum_{i=1}^n |a_i|\, |a_i + b_i|^{\gamma-1}.$$
   (b) *En déduire la minoration* $[N(a) + N(b)]\ N(a+b)^{\gamma-1} \geq N(a+b)^\gamma$.
   (c) *En conclure que N vérifie les comparaisons triangulaires.*

---

1. L'application $\binom{a}{b} \mapsto |a| + |b|$ est la norme d'indice 1 sur sur $\mathbb{R}^2$. L'application $\left(\binom{a}{b}, \binom{\alpha}{\beta}\right) \mapsto a\alpha + 18b\beta$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ – c'est celui associé à la base $\left(\binom{1}{0}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\binom{0}{1}\right)$ – et la norme associée à ce produit scalaire est précisément l'application $\binom{a}{b} \mapsto \sqrt{a^2 + 18b^2}$. Puisque $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie, ses normes sont équivalentes, en particulier, les deux normes considérées.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'espace $C([0,1], \mathbb{K})$ est alors normable par les normes d'indices resp. 1 et ∞, lesquelles induisent sur le sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ deux normes $P \mapsto \int_0^1 |P|$ et $P \mapsto \max_{[0,1]} |P|$. Ce sous-espace étant de dimension finie ($n+1$), ces normes induites sont équivalentes, d'où deux réels $\alpha, \beta > 0$ tels que (β ne nous servira pas)
   $$\forall P \in \mathbb{K}_n[X],\ \alpha \max_{[0,1]} |P| \leq \int_0^1 |P| \leq \beta \max_{[0,1]} |P|,$$ ce qui conclut en définissant $\lambda := \alpha$.
3.
   (a) Notons N la composée considérée. Soient a et b deux vecteurs source et λ un scalaire. On a alors d'une part les égalités
   $$N(\lambda a) = \|i(\lambda a)\| \underset{\text{linéaire}}{\overset{i \text{ est}}{=}} \|\lambda i(a)\| = |\lambda|\, \|i(a)\| = |\lambda|\, N(a),$$
   d'autre part les implications
   $$N(a) = 0 \Longrightarrow \|i(a)\| = 0 \Longrightarrow i(a) = 0 \overset{i \text{ injective}}{\Longrightarrow} a = 0$$
   et enfin les majorations
   $$N(a+b) = \|i(a+b)\| \underset{\text{linéaire}}{\overset{i \text{ est}}{=}} \|i(a) + i(b)\| \leq \|i(a)\| + \|i(b)\| = N(a) + N(b).$$
   (b) Soit B une partie basique de E : elle induit un isomorphisme $E \widetilde{\longrightarrow} \mathbb{K}^B$ d'espaces vectoriels. La norme uniforme sur $\mathbb{K}^B$ définit alors, suivant la question 3a, une norme sur E comme souhaité.

(c) L'application $\binom{a}{b} \mapsto a\,\mathrm{Id} + b$ est linéaire et injective[31] de $\mathbb{K}^2$ dans $C(S, \mathbb{K})$. En munissant ce dernier de la norme uniforme, on obtient suivant la question 3a une norme sur $\mathbb{K}^2$ comme voulu.

L'application $(a, b, c) \mapsto a\,\mathrm{Id}^2 + b\,\mathrm{Id} + c$ est linéaire et injective de $\mathbb{K}^3$ dans $C(S, \mathbb{K})$. Composer par la bijection $f \mapsto \frac{f}{\sqrt{1+\mathrm{Id}^2}}$ (de réciproque $g \mapsto g\sqrt{1+\mathrm{Id}^2}$) livre alors une injection qui, associée à la norme d'indice 2 de $C(S, \mathbb{K})$, donne suivant la question 3a une norme sur $\mathbb{K}^3$ comme désiré.

(d) Soit λ comme dans l'énoncé. L'application $f \mapsto \lambda f$ est linéaire et injective (chaque $f \in C(S, \mathbb{K})$ telle que $\lambda f = 0$ est nulle sur l'ensemble S privé des zéros de λ, donc est nulle sur S tout entier par continuité de f et car S est infini), donc fournit avec la norme d'indice 1 de $C(S, \mathbb{K})$ et suivant la question 3a une norme sur $C(S, \mathbb{K})$ comme voulu.

Montrons que les normes ainsi obtenues à partir de fonctions *sans zéros* sont équivalentes. Soient $\lambda, \mu > 0$ dans $C(S, \mathbb{K})$. La norme $\left\|\frac{\lambda}{\mu}\right\|_\infty$ fait alors sens, ce qui permet à $f \in C(S, \mathbb{K})$ fixé de majorer

$$\int_S |\lambda f| = \int_S \left|\frac{\lambda}{\mu}\right| |\mu f| \leq \int_S \left\|\frac{\lambda}{\mu}\right\|_\infty |\mu f| = \left\|\frac{\lambda}{\mu}\right\|_\infty \int_S |\mu f|.$$

Échanger les rôles de λ et μ livrerait une majoration analogue, les deux permettant d'affirmer l'équivalence des normes associées à λ et μ.

Montrons cependant que les normes ainsi obtenues ne sont pas équivalentes. Imposons $S = [0, 1]$ pour simplifier[32] et abrégeons $\lambda := \mathrm{Id}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, notons f_n la fonction de $C([0, 1], \mathbb{R})$ qui coïncide avec $\frac{1}{\lambda^2}$ sur $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ et qui est constante ailleurs. On a alors à $n \in \mathbb{N}^*$ fixé

$$\text{d'une part les minorations } \int_S |\lambda f_n| \quad \geq \quad \int_{\left[\frac{1}{n},1\right]} |\lambda f_n| = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{dt}{t} = \ln n,$$

$$\text{d'autre part les majorations } \int_S \left|\lambda^2 f_n\right| \quad = \quad \int_0^{\frac{1}{n}} nt^2 + \int_{\frac{1}{n}}^1 1 \leq \frac{1}{3n^2} + 1 \leq 2,$$

ce qui montre que la suite $n \mapsto \frac{\int_S |\lambda f_n|}{\int_S |\lambda^2 f_n|}$ n'est pas bornée. Les normes resp. associées aux fonctions λ et λ^2 ne sont donc pas équivalentes.

Bonus : soient $\lambda, \mu \in C(S, \mathbb{K})$ positives et s'annulant chacune au plus un nombre fini de fois. La lectrice et le lecteur motivés pourront alors montrer que les normes associées resp. à λ et μ d'une part sont équivalentes si les rapports $\frac{\mu}{\lambda}$ et $\frac{\lambda}{\mu}$ sont bornés, d'autre part ne sont pas équivalentes s'il y a un point de S où l'un de ces rapports tend vers ∞.

Remarque – Cette construction de normes par "transport" nous servira à plusieurs reprises lorsque i est bijective. En particulier, le cas de la "norme uniforme" associée à une base finie (question 3b) interviendra dans plusieurs démonstrations au chapitre ? ? ?.

[31] Le caractère injectif vient de ce que S est *infini*.

[32] Une application affine permettrait de se ramener à ce cas.

4. On sous-entendra l'indexation « $i \in [1, n]$ » afin d'alléger l'écriture des sommes.

(a) L'hypothèse $\gamma \geq 1$ montrant la positivité des réels $\frac{1}{\gamma}$ et $1 - \frac{1}{\gamma}$ de somme 1, la comparaison de HÖLDER permet alors de minorer

$$N(a)\, N(a+b)^{\gamma-1} = \left(\sum |a_i|^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\sum |a_i + b_i|^\gamma\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}$$
$$\overset{\text{Hölder}}{\geq} \sum |a_i|^{\gamma\frac{1}{\gamma}} |a_i + b_i|^{\gamma\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)} = \sum |a_i|\, |a_i + b_i|^{\gamma-1}.$$

(b) En ajoutant la minoration $N(b)\, N(a+b)^{\gamma-1} \geq \sum |b_i|\, |a_i + b_i|^{\gamma-1}$ obtenue de même, on obtient les minorations

$$[N(a) + N(b)]\ \ N(a+b)^{\gamma-1} \geq \sum |a_i|\, |a_i + b_i|^{\gamma-1} + \sum |b_i|\, |a_i + b_i|^{\gamma-1}$$
$$= \sum (|a_i| + |b_i|)\, |a_i + b_i|^{\gamma-1} \underset{\text{triangulaire}}{\overset{\text{comparaison}}{\geq}} \sum |a_i + b_i|\, |a_i + b_i|^{\gamma-1}$$
$$= \sum |a_i + b_i|^\gamma = N(a+b)^\gamma.$$

(c) Il reste à diviser par $N(a+b)^{\gamma-1}$ pour conclure à la minoration $N(a) + N(b) \geq N(a+b)$: si cette division est illégitime, l'image $N(a+b)$ est alors nulle et la comparaison voulue s'écrit $N(a) + N(b) \geq 0$, ce qu'on a puisque N est positive.

REMARQUE – Il serait aisé de montrer que N sépare les points de $\mathbb{K}^n$ et est positivement homogène. L'exercice montre donc que la norme d'indice γ sur $\mathbb{K}^n$ (*cf.* exemple 3) est bien une norme.

—

2.2 Boules & sphères

Définition (boule ouverte, boule fermée, sphère) *Soient $c \in E$ un point et $r > 0$ un réel.*

*On appelle **boule ouverte** (resp. **boule fermée**, resp. **sphère**) de centre c et rayon r les ensembles*[33]

$$\begin{aligned}
\mathring{\mathcal{B}}(c, r) &:= \{a \in E\ ;\ d(c, a) < r\} =: \mathcal{B}_o(c, r), \\
\overline{\mathcal{B}}(c, r) &:= \{a \in E\ ;\ d(c, a) \leq r\} =: \mathcal{B}_f(c, r), \\
\mathcal{S}(c, r) &:= \{a \in E\ ;\ d(c, a) = r\} = \overline{\mathcal{B}}(c, r) \Big\backslash \mathring{\mathcal{B}}(c, r).
\end{aligned}$$

*Lorsque $\binom{c}{r} = \binom{0}{1}$, on parle alors resp. de la **sphère unité**, de la **boule fermée unité** et de la **boule ouverte unité**.*

REMARQUES Soit $c \in E$.

• **Rayon nul.** Si l'on souhaite étendre les définitions précédentes au cas limite $r = 0$, on pourra dire que

[33] Naturellement, on appellera ***boule*** de E toute boule ouverte ou boule fermée de E.

les singletons sont les boules fermées (ou sphères) de rayon nul.

En revanche, il sera plus commode dans ce cours d'exclure des boules ouvertes la "boule ouverte de rayon nul" $\emptyset$. Nous conviendrons[34] donc que

$$\boxed{\text{chaque boule ouverte est non vide}}.$$

• **Croissance des boules en le rayon.** Soient $r < R$ deux réels positifs. Vu alors pour chaque $a \in E$ les implications

$$a \in \overline{\mathcal{B}}(c, r) \Longrightarrow d(c, a) \leq r \overset{r<R}{\Longrightarrow} d(c, a) < R \Longrightarrow a \in \mathring{\mathcal{B}}(c, R),$$

on a l'inclusion $\overline{\mathcal{B}}(c, r) \subset \mathring{\mathcal{B}}(c, R)$. On montrerait de même pour chaque $\rho \in]r, R[$ l'inclusion $\mathcal{S}(c, \rho) \subset \mathring{\mathcal{B}}(c, R) \setminus \overline{\mathcal{B}}(c, r)$.

FIG

Par ailleurs, lorsque E est non nul, il contient un vecteur unitaire (évoquer un vecteur non nul et l'unitariser), *a fortiori* un vecteur de n'importe quelle norme[35] ; il s'ensuit qu'aucune sphère de E n'est vide, en particulier celle $\mathcal{S}\left(c, \frac{r+R}{2}\right)$, d'où le caractère *strict* de l'inclusion $\overline{\mathcal{B}}(c, r) \subset \mathring{\mathcal{B}}(c, R)$. On retiendra qu'

en dimension non nulle, chaque sphère ou boule est non vide et l'on a l'implication $r < R \Longrightarrow \overline{\mathcal{B}}(c, r) \subsetneq \mathring{\mathcal{B}}(c, R)$.

• **Unicités des centre et rayon**. Nous montrerons dans cette section que

chaque boule ou sphère possède un unique centre et (si $E \neq \{0\}$ *) un unique rayon.*

Il fera donc sens de parler *du* centre et *du* rayon d'une boule ou sphère dès que E est non nul[36]. Au risque d'insister, la "boule ouverte vide" est exclue de ces considérations (car chaque point en est un centre).

Imposons $E \neq \{0\}$ et montrons par exemple l'unicité du rayon en admettant celle du centre. Soit $\mathcal{S} \subset E$ une sphère de centre c et soit $s \in \mathcal{S}$ (légitime car $\mathcal{S}$ est non vide d'après la remarque précédente) : chaque rayon de $\mathcal{S}$ vaut alors $d(s, c)$, d'où l'unicité du rayon de la sphère $\mathcal{S}$. Soit à présent $\mathcal{B} \subset E$ une boule de centre c et soient par l'absurde $r < R$ deux rayons de $\mathcal{B}$: on a alors les inclusions[37] $\mathring{\mathcal{B}}(c, R) \subset \mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{B}}(c, r)$, ce que contredit l'inclusion stricte de la remarque précédente.

• **Symétrie centrale**. L'application "distance à c" étant invariante par la symétrie centrale de centre c,

chaque boule ou sphère de centre c est stable par la symétrie centrale de centre c.

[34] *Conséquence agréable* : le centre de chaque boule lui appartient toujours.

[35] Appliquer sur un vecteur unitaire l'homothétie de rapport la norme voulue.

[36] Si $E = \{0\}$, on a pour chaque réel $r > 0$ les égalités $\mathring{\mathcal{B}}(0, r) = \{0\} = \overline{\mathcal{B}}(0, r)$ et $\emptyset = \mathcal{S}(0, r)$.

[37] Chaque boule inclut (resp. est incluse dans) la boule ouverte (resp. fermée) de mêmes centre et rayon.

• **Rayon et diamètre**. Soit $\mathcal{S}$ une sphère non vide dont c est un centre, dont on note r un rayon et dont on évoque un élément s. On a d'une part à $a,b\in\mathcal{S}$ fixés les majorations

$$\|a-b\| \underset{\text{triangulaire}}{\overset{\text{comparaison}}{\leq}} \|a-c\|+\|c-b\| \overset{a,b\in\mathcal{S}}{\leq} r+r=2r,$$

d'autre part l'appartenance $2c-s\in\mathcal{S}$ (point diamétralement opposé à s) et les égalités

$$\text{FIG}\quad d\left(s,2c-s\right)=\|(2c-s)-s\|=2d\left(c,s\right)=2r,$$

ce qui montre l'égalité[38] $\sup_{a,b\in\mathcal{S}} d\left(a,b\right)=2r$. Vu que le membre de gauche ne dépend que de l'*ensemble* $\mathcal{S}$ et non de sa description en fonction de c et r, le membre de droite également, d'où l'unicité du rayon de $\mathcal{S}$. (Remplacer $\mathcal{S}$ par une boule fermée ne changerait rien à l'argumentation précédente ; quant aux boules ouvertes, leur diamètre n'est pas atteint mais est approchable en remplaçant les points $c\pm\overrightarrow{cs}$ par les suites $\left(c\pm(\operatorname{th} n)\,\overrightarrow{cs}\right)_{n\in\mathbb{N}}$). On pourra retenir :

le diamètre de chaque boule ou sphère de E vaut
le double de son rayon (sauf si $E=\{0\}$).

• **Découpage "en oignons"**. Soit $R\geq 0$ un réel. Les boules $\overline{\mathcal{B}}\left(c,R\right)$ et $\mathring{\mathcal{B}}\left(c,R\right)$ sont alors par définition les images réciproques par l'application $a\mapsto d\left(c,a\right)$ des intervalles $[0,R]$ et $[0,R[$ (chaque distance étant positive). Regrouper les points de E selon leur image par $a\mapsto d\left(c,a\right)$ livre alors les partitions suivantes en sphères[39] centrées en c :

$$\overline{\mathcal{B}}\left(c,R\right)=\coprod_{r\in[0,R]}\mathcal{S}\left(c,r\right),\qquad \mathring{\mathcal{B}}\left(c,R\right)=\coprod_{r\in[0,R[}\mathcal{S}\left(c,R\right)\qquad\text{et}\qquad E=\coprod_{r\in[0,\infty[}\mathcal{S}\left(c,r\right).$$

FIG

• Notons $\mathbb{B}$ la boule ouverte unité. Vu pour chaque vecteur a les équivalences

$$\begin{aligned} & a\in\mathring{\mathcal{B}}\left(c,r\right)\iff d\left(c,a\right)<r\iff\|a-c\|<r\iff\frac{\|a-c\|}{r}<1\\ \iff\quad & \left\|\frac{a-c}{r}\right\|<1\iff d\left(0,\frac{a-c}{r}\right)<1\iff\frac{a-c}{r}\in\mathbb{B}\\ \iff\quad & a-c\in r\mathbb{B}\iff a\in c+r\mathbb{B}, \end{aligned}$$

la boule ouverte $\mathring{\mathcal{B}}\left(c,r\right)$ s'obtient[40] en appliquant sur la boule ouverte unité une homothétie de rapport r puis une translation de vecteur c. *Idem* pour les boules fermées et les sphères.

FIG

Propriété (convexité des boules)

Chaque boule est convexe.

[38] *Culture* : la borne supérieure $\sup_{a,b\in A} d\left(a,b\right)$ des distances entre deux points de A est appelée le ***diamètre*** de A.

[39] La dernière égalité suggère de voir l'espace plein comme une "boule de rayon infini".

[40] En termes de lois "parties", on peut donc écrire $\mathring{\mathcal{B}}\left(c,r\right)=c+r\mathbb{B}$.

Démonstration

Soient $c \in E$ et $r > 0$ un réel, soient λ, μ deux réels positifs de somme 1. Notons $\mathbb{B}$ la boule ouverte unité et montrons déjà sa convexité. Soient $a, b \in \mathbb{B}$. On a alors les majorations[41]

$$\begin{aligned} \|\lambda a + \mu b\| &\underset{\text{triangulaire}}{\overset{\text{comparaison}}{\leq}} \|\lambda a\| + \|\mu b\| \underset{\text{homogénéité}}{\overset{\text{positive}}{=}} |\lambda| \, \|a\| + |\mu| \, \|b\| \\ &\overset{a,b\in\mathbb{B}}{<} |\lambda| \, 1 + |\mu| \, 1 \underset{\lambda+\mu=1}{\overset{\lambda,\mu\geq 0}{=}} 1, \text{ d'où l'appartenance } \lambda a + \mu b \in \mathbb{B}. \end{aligned}$$

On en déduit les inclusions

$$\lambda (c + r\mathbb{B}) + \mu (c + r\mathbb{B}) = \underbrace{(\lambda c + \mu c)}_{=(\lambda+\mu)c=c} + r \underbrace{(\lambda\mathbb{B} + \mu\mathbb{B})}_{\subset\mathbb{B} \text{ car } \mathbb{B} \text{ convexe}} \subset c + r\mathbb{B},$$

d'où la convexité de la boule ouverte $c + r\mathbb{B} = \mathring{\mathcal{B}} (c, r)$. Démonstration inchangée pour les boules fermées (et même allégée des majorations strictes). Apprécier au passage la souplesse obtenue en notant les boules avec les lois "parties".

Remarque – **Culture hors programme**. La lectrice et le lecteur intéressés pourront établir qu'en présence de l'axiome de positive homogénéité les comparaisons triangulaires sont en fait *équivalentes* à la convexité de la boule unité fermée et à la positivité de l'application $E \longrightarrow \mathbb{R}$ considérée.

Définition – Propriété (partie bornée, application bornée)

*La partie A est dite **bornée**[42] si elle est incluse dans une boule,* i. e. *si*

$$\exists R > 0, \ \forall a \in A, \ \|a\| < R.$$

*Soit f une application à valeurs dans E. On qualifie f de **bornée** si la partie* $\operatorname{Im} f$ *est bornée,* i. e. *si*

$$\exists R > 0, \ \forall a \in \operatorname{Dom} f, \ \|f (a)\| < R.$$

Démonstration

La propriété affirme que le centre d'une boule bornante peut toujours être imposé égal à l'origine : en effet, si c dénote le centre d'une telle boule et $r > 0$ son rayon, il suffit d'établir l'inclusion[43]

$$c + r\mathbb{B} \subset (\|c\| + r) \, \mathbb{B},$$

FIG

laquelle résulte à $b \in \mathbb{B}$ fixé des majorations

$$\|c + rb\| \leq \|c\| + \|rb\| = \|c\| + |r| \, \|b\| \leq \|c\| + r1.$$

Exemples

[41] La majoration $\overset{a,b\in\mathbb{B}}{<}$ est *stricte* car l'un des coefficients $|\lambda|$ ou $|\mu|$ est non nul (leur somme vaut 1).

[42] Le caractère borné est parfois appelé *bornitude* (en anglais *boundedness*) ; libre à la lectrice et au lecteur d'accorder cet usage avec leur sens esthétique.

[43] On a abrégé $\mathbb{B} := \mathring{\mathcal{B}} (0, 1)$ la boule ouverte unité.

1. Chaque boule, chaque sphère étant incluse dans la boule fermée de même rayon,

   chaque boule ou sphère est bornée.

2. Si A est finie, le réel $R := \sup_{a\in A} \|a\|$ fait alors sens (il est nul si A est vide) et vérifie l'inclusion $A \subset \overline{\mathcal{B}}(0, R)$, donc

   chaque ensemble fini est borné.

   En particulier[44], chaque singleton est borné (partie finie de cardinal 1), la partie vide est bornée (partie finie de cardinal 0).

3. Soit $v \in E$ un vecteur, imposons A bornée non vide et stable par la translation de vecteur v, soit $a \in A$ et soit R le rayon d'une boule de centre 0 incluant A. Pour chaque naturel $n > 0$, le vecteur $a + nv$ reste alors dans A, d'où les minorations $R \geq \|a + nv\| \geq |\|a\| - \|nv\||$: diviser par n livre alors la minoration $\frac{R}{n} \geq \left|\frac{\|a\|}{n} - \|v\|\right|$ puis appliquer $\lim_{n\to\infty}$ fournit $0 \geq \|v\|$, d'où la nullité de v. Par conséquent[45] :

   aucune partie bornée n'est stable par aucune
   translation de vecteur non nul (sauf la partie vide).

   En particulier, aucun sous-espace vectoriel de E n'est borné (à moins d'être nul). Cas singulier : l'espace plein E n'est jamais borné (sauf à être nul).

Application (unicité du centre) : soit $\mathcal{S}$ une sphère de E dont on note c et c' deux centres. La sphère $\mathcal{S}$ étant alors stable par les symétries centrales de centres respectifs c et c', elle est stable par la composée de ces symétries, à savoir par la translation de vecteur $\overrightarrow{cc'}$. D'après les points 1 et 3 ci-dessus, ce vecteur est nul, ce qui s'écrit $c = c'$.

FIG la composée $(2c' - \mathrm{Id}) \circ (2c - \mathrm{Id}) = 2c' - ((2c - \mathrm{Id})) = \mathrm{Id} + 2(c' - c)$

Signalons au passage une démonstration directe[46]. Soient $c, c' \in E$ distincts, soient $r, r' \geq 0$ deux réels tels que $\mathcal{S}(c, r) = \mathcal{S}(c', r')$, abrégeons $d := d(c, c')$ (qui vérifie $d > 0$ puisque $c \neq c'$) et unitarisons $u := \frac{\overrightarrow{c'c}}{d}$ (ce qui fait sens car $d > 0$). Le point $c + ru$ tombe alors dans la sphère $\mathcal{S}(c, r)$, donc dans celle $\mathcal{S}(c', r')$, d'où les minorations

FIG

$$\begin{aligned} r &\geq \|(c + ru) - c'\| = \left\|\overrightarrow{c'c} + ru\right\| = \|du + ru\| = |d + r| \, \|u\| \\ &\geq d + r, \text{ ce qui force } d \leq 0 \text{ : contradiction.} \end{aligned}$$

[44] *Sanity checks* : chaque singleton est une sphère de rayon nul, la partie vide est la "boule ouverte de rayon nul".

[45] *Interprétation dynamique* : dans un espace vectoriel, impossible d'"enfermer" quelqu'un avançant d'un pas constant dans une direction fixée.

[46] Cette démonstration est moins élégante car d'une part elle fait intervenir les rayons, d'autre part elle complexifie le cas des boules ouvertes.

Remplacer « sphère » par « boule fermée » ne changerait rien. Pour les boules ouvertes, toutefois, on remplacera à $n \in \mathbb{N}^*$ fixé le point $c + ru$ par $c + \left(r - \frac{1}{n}\right) u$ afin d'obtenir la minoration $r \geq d + r - \frac{1}{n}$ puis l'on appliquera $\lim_{n\to\infty}$ pour aboutir à la même contradiction $d \leq 0$.

Propriété (invariance du caractère borné par équivalence de normes)

Chaque norme équivalente à $\mathcal{N}$ possède les mêmes parties bornées et mêmes applications bornées[47] *que $\mathcal{N}$.*

Démonstration

Soit $\mathcal{N}'$ équivalente à $\mathcal{N}$, soit $\beta > 0$ un réel tel que $\mathcal{N}' \leq \beta\mathcal{N}$, imposons A bornée pour $\mathcal{N}$, soit $R > 0$ un réel tel que $A \subset \mathring{\mathcal{B}}(0, R)$. On a alors pour chaque $a \in A$ les majorations

$$\mathcal{N}'(a) \leq \beta\mathcal{N}(a) \leq \beta R,$$

ce qui montre que la partie A est bornée pour la norme $\mathcal{N}'$ (par βR). Échanger les rôles de $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ permet alors de conclure.

Exercices d'application

1. *Montrer qu'aucune sphère de E n'est convexe (à l'exception des singletons et de la partie vide).*
2. *Soit B une boule de E dont on note c le centre et soit λ un scalaire tel que $|\lambda| \leq 1$. Montrer que B est stable par l'homothétie de rapport λ centrée en c. (On dit que les boules de E sont* ***équilibrées****.)*
3. *Montrer que l'application qui à chaque norme de E associe sa sphère unité est injective. Même question en remplaçant « sphère » par « boule fermée » puis par « boule ouverte ».*
4. *(plus difficile) Imposons E non nul.*
   (a) *Soient $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$. Montrer alors que le plus petit convexe de E incluant la sphère $\mathcal{S}(a, r)$ fait sens et vaut la boule fermée $\overline{\mathcal{B}}(a, r)$.*
   (b) *Soient $a, b \in E$ et $r, R \in \mathbb{R}_+$. Montrer alors,* modulo *un cas pathologique que l'on précisera, les équivalences*

   $$\mathring{\mathcal{B}}(a, r) \subset \mathring{\mathcal{B}}(b, R) \iff r + d(a, b) \leq R \iff \overline{\mathcal{B}}(a, r) \subset \overline{\mathcal{B}}(b, R).$$

   (c) *Retrouver les unicités des centre et rayon de chaque boule*[48] *et de chaque sphère.*

---

[47] On dit que le caractère borné est *invariant par passage à une norme équivalente*.
[48] *Rappel* : dans ce cours, aucune boule n'est vide.

1. Soit $\mathcal{S} \subset E$ une sphère convexe non vide dont on note c le centre et soit $s \in \mathcal{S}$ (légitime car $\mathcal{S} \neq \emptyset$). Le point diamétralement opposé $2c - s$ reste alors sur $\mathcal{S}$, donc (par convexité) le barycentre $\frac{s+(2c-s)}{2} =: \beta$ également, ce qui s'écrit $\|\beta - c\| = r$. Or ce barycentre vaut le centre c, donc l'égalité précédente se réécrit $0 = r$, ce qui montre que $\mathcal{S}$ est une sphère de rayon nul, *i. e.* un singleton. (Réciproquement, chaque singleton de E est convexe, tout comme la partie vide.)

FIG

2. Supposons B ouverte, notons r son rayon et soit $b \in B$ dont note b' l'image par l'homothétie de centre c et rapport λ. On a alors les majorations

$$\begin{aligned} d(c, b') &= \|b' - c\| = \left\| \left(c + \lambda \overrightarrow{cb} \right) - c \right\| = \left\| \lambda \overrightarrow{cb} \right\| \\ &= |\lambda| \, \|b - c\| \overset{|\lambda| \leq 1}{\leq} \|b - c\| \overset{b \in B}{<} r, \end{aligned}$$

ce qui montre que b' reste dans la boule $\mathring{\mathcal{B}}(c, r) = B$. Même démonstration pour les boules fermées en "élargissant" la dernière majoration.

3. Soient N et N' deux normes de E ayant même sphère unité. Soit $a \in E$ non nul. Le vecteur $\frac{a}{N(a)}$ fait alors sens et est unitaire pour N, *i. e.* unitaire pour N', ce qui montre que $N'(a)$ vaut

$$N'\left(N(a) \frac{a}{N(a)} \right) \underset{\text{homogène et } N \geq 0}{\overset{N' \text{est positivement}}{=}} N(a) \; N'\left(\frac{a}{N(a)} \right) \underset{\text{unitaire pour } N'}{\overset{\text{le vecteur } \frac{a}{N(a)} \text{ est}}{=}} N(a).$$

L'égalité $N'(a) = N(a)$ restant valide quand $a = 0$ (toujours par positive homogénéité), on a prouvé l'égalité $N = N'$.

Remplaçons à présent dans l'hypothèse « sphère » par « boule fermée ». On aboutirait de la même façon à $a \in E$ fixé à la majoration $N'(a) \leq N(a)$: observer la symétrie des rôles joués par N et N' permet alors de conclure.

Remplaçons enfin « fermée » par « ouverte ». Le même raisonnement[49] en remplaçant à $\varepsilon > 0$ fixé $\frac{a}{N(a)}$ par $\frac{a}{N(a)+\varepsilon}$ livre alors la majoration $N'(a) \leq N(a) + \varepsilon$ et l'on conclut en appliquant $\lim_{\varepsilon \to 0}$.

On pourrait également répondre en explicitant les réciproques : on établirait alors pour chaque vecteur $a \in E$ les égalités[50]

$$\|a\| = \begin{cases} \inf \left\{ \lambda > 0 \; ; \; \frac{a}{\lambda} \in \overline{\mathcal{B}}(0,1) \right\} \\ \inf \left\{ \lambda > 0 \; ; \; \frac{a}{\lambda} \in \mathring{\mathcal{B}}(0,1) \right\} \\ 0 \text{ ou bien le réel } \nu > 0 \text{ tel que } \frac{a}{\nu} \in \mathcal{S}(0,1) \end{cases}.$$

Remarque – Chaque norme de E est en particulier déterminée par sa boule unité fermée.

4.

[49] *Autre idée* : le vecteur $\frac{a}{N(a)}$ ne tombe pas dans la boule unité ouverte, ce qui s'écrit $N'\left(\frac{a}{N(a)}\right) \geq 1$, *i. e.* $N'(a) \geq N(a)$ et l'on conclut par le même argument de symétrie.

[50] ν comme « **n**orme »

(a) Si $r=0$, la sphère $\mathcal{S}(a,r)=\{a\}=\overline{\mathcal{B}}(a,r)$ est alors convexe (en tant que boule) et la boule $\overline{\mathcal{B}}(a,r)$ est bien le plus petit convexe incluant $\mathcal{S}(a,r)$. Imposons désormais $r>0$.

Les propriétés « être convexe » et « inclure $\mathcal{S}(a,r)$ » passant à l'intersection, l'intersection des convexes incluant $\mathcal{S}(a,r)$ d'une part est un convexe incluant $\mathcal{S}(a,r)$, d'autre part inclut chacun d'entre eux, ce qui donne sens au plus petit tel convexe[51] – notons-le C.

Puisque la boule $\overline{\mathcal{B}}(a,r)$ est convexe et inclut $\mathcal{S}(a,r)$, on a l'inclusion $C\subset\overline{\mathcal{B}}(a,r)$.

Soit réciproquement $b\in\overline{\mathcal{B}}(a,r)$ et soit u un vecteur unitaire (il en existe car E est non nul) positivement colinéaire à $\overrightarrow{ba}$, de sorte à avoir l'égalité $\overrightarrow{ba}=du$ où $d:=d(a,b)$.

FIG

Les points $a\pm ru$ sont alors sur la sphère $\mathcal{S}(a,r)$ au vu des égalités

$$d(a,a\pm ru)=\|(a\pm ru)-a\|=\|\pm ru\|=|\pm r|\,\|u\|\underset{u\text{ unitaire}}{\overset{r\geq 0\text{ et}}{=}}r,$$

d'où (puisque C inclut $\mathcal{S}(a,r)$) les appartenances $a\pm ru\in C$. La figure suggère alors que le segment reliant ces deux points (lequel reste dans C par convexité de ce dernier) contient b, ce qui livrerait l'appartenance $b\in C$ et l'inclusion réciproque voulue $\overline{\mathcal{B}}(a,r)\subset C$.

Or une brève analyse livre les coefficients correspondants : on a pour chaque $(\lambda,\mu)\in[0,1]^2$ de somme 1 les équivalences

$$\begin{aligned}&b=\lambda(a+ru)+\mu(a-ru)\iff b=(\lambda+\mu)a+(\lambda-\mu)ru\\&\overset{\lambda+\mu=1}{\iff}\overrightarrow{ba}=(\lambda-(1-\lambda))ru\iff du=(2\lambda-1)ru\\&\overset{u\neq 0}{\iff}d=(2\lambda-1)r\overset{r>0}{\iff}\lambda=\frac{1+\frac{d}{r}}{2}.\end{aligned}$$

Il reste ainsi à vérifier que les réels $\frac{1\pm\frac{d}{r}}{2}$ ont pour somme 1 et sont positifs : le premier point est immédiat et le second équivaut à l'encadrement $\left|\frac{d}{r}\right|\leq 1$, lequel se réécrit $d(a,b)\leq r$ et équivaut à l'appartenance $b\in\overline{\mathcal{B}}(a,r)$, ce qu'on a.

(b) Supposons la majoration du milieu. On a alors pour chaque point $p\in\mathring{\mathcal{B}}(a,r)$ les majorations

$$\begin{aligned}&d(b,p)\leq d(b,a)+d(a,p)\overset{p\in\mathring{\mathcal{B}}(a,r)}{<}d(a,b)+r\\&\overset{\text{hypothèse}}{\leq}R,\text{ d'où }p\in\mathring{\mathcal{B}}(b,R)\text{ et l'inclusion de gauche.}\end{aligned}$$

Même raisonnement pour établir l'inclusion de droite. (*Sanity check* : on retrouve l'inclusion $c+r\mathbb{B}\subset(\|c\|+r)\mathbb{B}$ des remarques sur les parties bornées.)

[51] *Culture* : le convexe C s'appelle l'***enveloppe convexe*** de $\mathcal{S}(a,r)$ et a été décrite d'une autre façon dans l'exercice d'application ? ? ? chap convexité ? ? ?

Supposons l'inclusion de droite et soit u un vecteur unitaire comme en (4a).

FIG

Le vecteur $a+ru$ est alors (comme en (4a)) sur la sphère $\mathcal{S}(a,r)$ donc dans la boule fermée $\overline{\mathcal{B}}(a,r)$, *a fortiori* dans celle $\overline{\mathcal{B}}(b,R)$, d'où la minoration $R \geq d(b,a+ru)$. Il suffit pour conclure de montrer (comme suggéré par la figure) que cette dernière distance vaut $d+r$, ce qui résulte des égalités

$$\begin{aligned}\|(a+ru)-b\| &= \left\|\overrightarrow{ba}+ru\right\| = \|du+ru\| \\ &= \|(d+r)\,u\| = |d+r|\,\|u\| = |d+r| = d+r.\end{aligned}$$

Supposons enfin l'inclusion de gauche. Si $r=0$, la boule ouverte de gauche est alors vide et l'inclusion $\mathring{\mathcal{B}}(a,0) \subset \mathring{\mathcal{B}}(b,R)$ est toujours vérifiée tandis que la majoration $0+d(a,b) \leq R$ ne l'est pas toujours (si c'était le cas, l'espace E serait borné par une boule de rayon R, donc serait nul). Voici notre cas pathologique : l'implication $\Longrightarrow$ de gauche est fausse en général si $r=0$. Nous *devons* donc – et on le fait – imposer $r>0$ pour l'établir. Le réel $\frac{1}{r}$ fait alors sens et l'on pour chaque naturel $n>\frac{1}{r}$ les inclusions[52]

$$\overline{\mathcal{B}}\left(a, r-\frac{1}{n}\right) \subset \mathring{\mathcal{B}}(a,r) \overset{\text{hypothèse}}{\subset} \mathring{\mathcal{B}}(b,R) \subset \overline{\mathcal{B}}(b,R),$$

d'où (d'après le paragraphe précédent) la majoration $\left(r-\frac{1}{n}\right)+d(a,b) \leq R$: appliquer $\lim_{n\to\infty}$ livre alors celle voulue.

(c) Soient $c,c' \in E$ et $r,r' \in \mathbb{R}_+$ tels que $\overline{\mathcal{B}}(c,r) = \overline{\mathcal{B}}(c',r')$. Cette double-inclusion équivaut (d'après le point 4b) aux majorations $\left\{\begin{array}{l} d(c,c') \leq r'-r \\ d(c,c') \leq r-r' \end{array}\right.$, d'où (en notant $d := d(c,c')$) les encadrements $0 \leq d \leq r'-r \leq -d \leq 0$, ce qui force l'égalité partout, d'où les nullités $r'-r=0=d$, ce qui conclut aux égalités des rayons $r=r'$ et des centres $c=c'$. (Raisonnement inchangé pour les boules ouvertes à un détail près : évoquer r et r' dans $\mathbb{R}_+^*$ pour éviter les boules vides.)

Remplaçons enfin les boules par des sphères. Le plus petit convexe incluant $\mathcal{S}(c,r) = \mathcal{S}(c',r')$ vaut alors (d'après le point 4a) la boule $\overline{\mathcal{B}}(c,r) = \overline{\mathcal{B}}(c',r')$ et le paragraphe précédent permet de conclure aux égalités $\binom{c}{r} = \binom{c'}{r'}$.

2.3 Exemples de normes

Propriété – Définition (norme préhilbertienne)

[52] Le rayon $r-\frac{1}{n}$ est strictement positif vu la minoration imposée $n>\frac{1}{r}$.

Imposons E muni d'un produit scalaire[53]*. L'application*

$$a \mapsto \sqrt{\langle a \mid a \rangle}$$

fait alors sens et est une norme sur E, appelée ***norme associée*** *au produit scalaire de E. On a alors pour chaques vecteurs a et b l'égalité*

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2 .$$

Démonstration

Soient $a \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Vu la minoration

$$\langle a \mid a \rangle \geq 0 \text{ avec égalité ssi } a = 0,$$

l'application considérée fait sens et sépare les points. Les comparaisons de Minkowski sont alors précisément celles triangulaires et la positive homogénéité résulte des égalités

$$\sqrt{\langle \lambda a \mid \lambda a \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle a \mid a \rangle} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{\langle a \mid a \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle a \mid a \rangle}.$$

L'égalité quadratique désirée (à $a, b \in E$ fixés) s'obtient en développant le membre de gauche

$$\begin{aligned} & \|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = \langle a+b \mid a+b \rangle + \langle a-b \mid a-b \rangle \\ = \quad & \langle a \mid a \rangle + 2\langle a \mid b \rangle + \langle b \mid b \rangle \quad + \quad \langle a \mid a \rangle - 2\langle a \mid b \rangle + \langle b \mid b \rangle \\ = \quad & \|a\|^2 + \|b\|^2 + \|a\|^2 + \|b\|^2 . \end{aligned}$$

Remarques

• **Norme "euclidienne" ?** La norme associée à un produit scalaire est parfois qualifiée d'*euclidienne*, même si l'espace vectoriel sous-jacent n'est pas euclidien (*i. e.* n'est pas de dimension finie). C'est pourquoi il conviendrait mieux de la qualifier de *préhilbertienne*.

• L'égalité ci-dessus affirme que la somme des carrés des longueurs des deux diagonales de chaque parallélogramme vaut la somme des carrés des longueurs des quatre côtés :

FIG ? ? ?

C'est pourquoi l'égalité énoncée s'appelle l'***identité du parallélogramme***. On pourrait montrer (hors programme) que la norme $\mathcal{N}$ est préhilbertienne (*i. e.* qu'il y a un produit scalaire sur E auquel $\mathcal{N}$ est associée) ssi $\mathcal{N}$ vérifie l'identité du parallélogramme.

• Lorsque $\mathcal{N}$ est induite par un produit scalaire, on a égalité dans les comparaisons triangulaires ssi les vecteurs considérés sont positivement colinéaires (cas d'égalité des comparaisons de Minkowski ou de Cauchy-Schwarz). Cette équivalence tombe en défaut en général : on pourrait montrer (hors programme) qu'elle équivaut à ce qu'*aucune sphère n'inclue de segment infini*[54] ou encore (très hors programme), s'il

[53] Les scalaires sont ici *réels*.

[54] En d'autres termes : le cas d'égalité triangulaire "attendu" (euclidien) équivaut à l'absence de "plats" sur les boules (c'est bien le cas des boules euclidiennes qui sont "bien rondes").

fait sens d'intégrer les applications de $C^0([0,1],E)$, à ce que chaque telle application f vérifiant $\left\|\int f\right\| = \int \|f\|$ soit portée par une demi-droite vectorielle.

Propriété – Définition (normes d'indices 1, 2 et ∞)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sont alors des normes sur $\mathbb{K}^n$ les applications

$$a \mapsto \sum_{i=1}^{n} |a_i|, \qquad a \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2} \qquad \textit{et} \qquad a \mapsto \max_{i \in [1,n|]} |a_i|,$$

*appelées **les normes d'indices**[55] resp. 1, 2 et ∞ de $\mathbb{K}^n$.*

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble. Est alors une norme sur $\mathcal{B}(\mathcal{E},\mathbb{K})$ l'application

$$f \mapsto \sup_{\mathcal{E}} |f| =: \|f\|_\infty,$$

*appelée **la norme de la convergence uniforme** sur $\mathcal{E}$.*

Soit S un segment infini de $\mathbb{R}$. Sont alors des normes sur $C(S,\mathbb{K})$ les applications

$$f \mapsto \int_S |f| =: \|f\|_1 \qquad \textit{et} \qquad f \mapsto \sqrt{\int_S |f|^2} =: \|f\|_2,$$

*appelées **les normes de la convergence** resp. **en moyenne** et **en moyenne quadratique** sur S.*

Démonstration

L'application $N := a \mapsto \|a\|_2$ est la norme associée au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. Soient à présent $a, b \in \mathbb{C}^n$ et notons α, β les vecteurs de $\mathbb{R}^n_+$ formés par les modules des coordonnées de resp. a et b. On a alors d'une part pour chaque $\lambda \in \mathbb{K}$ les égalités

$$\|\lambda a\|_2 = N(\ |\lambda|\,\alpha\ ) \underset{\text{homogène}}{\overset{N \text{ est posit.}}{=}} |\lambda|\, N(\alpha) = |\lambda|\, \|a\|_2,$$

d'autre part les implications

$$\|a\|_2 = 0 \Longrightarrow N(\alpha) = 0 \underset{\text{les points}}{\overset{N \text{ sépare}}{\Longrightarrow}} \alpha = 0 \Longrightarrow a = 0$$

et enfin les majorations

$$\|a+b\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \underbrace{|a_i + b_i|^2}_{\leq (|a_i|+|b_i|)^2}} \leq N(\alpha+\beta) \underset{\text{triangulaire}}{\overset{\text{comparaison}}{=}} N(\alpha) + N(\beta) = \|a\| + \|b\|,$$

ce qui montre que $c \mapsto \|c\|_2$ est une norme sur $\mathbb{C}^n$.

On raisonnerait de façon analogue à partir du produit scalaire canonique de $C(S,\mathbb{R})$ pour montrer que $f \mapsto \|f\|_2$ est une norme sur $C(S,\mathbb{K})$.

[55] La norme d'indice ∞ est également appelée ***norme uniforme***.

Soient $f, g \in \mathcal{B}(\mathcal{E}, \mathbb{K})$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a alors d'une part les égalités[56]

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup_{\mathcal{E}} |\lambda f| = \sup_{\mathcal{E}} |\lambda| \, |f| = |\lambda| \sup_{\mathcal{E}} |f| = |\lambda| \ \|f\|_\infty ,$$

d'autre part à $a \in \mathcal{E}$ fixé les égalités

$$|f+g|(a) = |f(a) + g(a)| \leq |f(a)| + |g(a)| \leq \sup_{\mathcal{E}} |f| + \sup_{\mathcal{E}} |g| ,$$

$$\text{d'où la majoration } \sup_{\mathcal{E}} |f+g| \leq \sup_{\mathcal{E}} |f| + \sup_{\mathcal{E}} |g| ,$$

enfin la nullité de $\sup_{\mathcal{E}} |f|$ équivaut clairement à celle de $|f|$, *i. e.* à celle de f. Finalement, l'application $\varphi \mapsto \|\varphi\|_\infty$ est bien une norme sur $\mathcal{B}(\mathcal{E}, \mathbb{K})$.

L'application $a \mapsto \|a\|_\infty$ définie sur $\mathbb{K}^n$ est la norme de la convergence uniforme sur l'ensemble $[1, n]$.

Soient $f, g \in C(\mathcal{E}, \mathbb{K})$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. La linéarité et la croissance de $\int_S$ livrent alors d'une part à partir de l'égalité $|\lambda f| = |\lambda| \ |f|$ l'égalité $\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \ \|f\|_1$, d'autre part à partir de la majoration $|f+g| \leq |f| + |g|$ celle $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$. Par ailleurs, le segment S étant infini, la nullité de $\|f\|_1$ et la continuité de l'intégrande $|f|$ impliquent la nullité de cette dernière[57], *i. e.* la nullité $f = 0$. En fin de compte, l'application $\varphi \mapsto \|\varphi\|_1$ est bien une norme.

Même raisonnement pour la norme d'indice 1 sur $\mathbb{K}^n$ en utilisant la linéarité et la croissance de $\sum_{i=1}^n$ ainsi que l'équivalence entre nullité d'une somme de réels positifs et nullité de chacun de ses termes.

Remarques

- **Norme de la *convergence* uniforme**. Étant donné un ensemble $\mathcal{E}$, nous verrons pour chaque suite $(f_n) \in \mathcal{B}(\mathcal{E}, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ qu'elle converge *uniformément* vers 0 ssi $\|f_n\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où la terminologie. Il ne sera toutefois pas possible, à moins que $\mathcal{E}$ soit fini, de trouver une norme pour laquelle la convergence est la convergence *simple* (hors programme).
- Chaque application continue sur chaque segment atteignant ses bornes, on aura pour chaque segment réel S infini[58] et

$$\text{pour chaque } f \in \underline{\underline{C(S, \mathbb{K})}} \text{ l'égalité } \|f\|_\infty = \max_S |f|$$
$$\text{(la borne supérieure est atteinte).}$$

- Les normes d'indices 1, 2 et ∞ sur $\mathbb{K}^n$ sont définissables plus généralement sur $\mathbb{K}^I$ pour chaque ensemble I <u>fini</u> (même vide à condition de remplacer « max par « sup »). Le cas pathologique $I = \emptyset$ (où l'espace $\mathbb{K}^I$ est nul) interviendra dans certaines démonstrations générales mais n'apparaîtra jamais en pratique. On pourra donc toujours penser la borne supérieure comme un *maximum* :

$$\forall I \neq \emptyset \text{ fini}, \ \forall a \in \mathbb{K}^I, \ \|a\|_\infty = \max_{i \in I} |a_i| .$$

- **Culture hors programme**. S'il n'existe pas à notre connaissance de description exhaustive des normes de E, il est possible de décrire les *boules fermées unités*

---

[56] *Rappel* : on a les égalités $\begin{matrix}\forall p \in \mathbb{R}_+ \\ \forall P \subset \mathbb{R}_+\end{matrix}$, $\sup(pP) = p \sup P$.

[57] Ne pas oublier la continuité de l'intégrande !

[58] *Rappel* : $C(S, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(S, \mathbb{K})$.

de E lorsque $\mathcal{N}$ parcourt l'ensemble de ses normes, ce qui revient au même (*cf.* remarque en toute fin de l'exercice 3 section 2.2 ? ? ?).

Définition (norme produit, espace vectoriel normé produit)

Imposons que E soit un espace vectoriel produit $\prod_{i\in I} E_i$ pour un certain ensemble I $\underline{\text{fini}}$ où l'espace vectoriel E_i est normé[59] *pour chaque $i \in I$. Sauf mention contraire, l'espace vectoriel E sera alors normé par*

$$(a_i)_{i\in I} \mapsto \sup_{i\in I} \|a_i\|_i \text{, appelée } \textbf{la norme produit} \text{ sur } \prod_{i\in I} E_i.$$

L'espace vectoriel E est alors appelé ***l'espace vectoriel normé produit*** *des E_i (pour i parcourant I).*

Remarques

- Soit $r \geq 0$ un réel. Vu à $a, c \in \prod_{i\in I} E_i$ fixés les équivalences

$$a \in \overline{\mathcal{B}}(c, r) \iff \sup_{i\in I} \|(a-c)_i\|_i \leq r \iff \forall i \in I,\ \|a_i - c_i\|_i \leq r$$

$$\iff \forall i \in I,\ a_i \in \overline{\mathcal{B}}(c_i, r_i) \iff a \in \prod_{i\in I} \overline{\mathcal{B}}(c_i, r_i),$$

lesquelles tiennent encore en remplaçant partout $\binom{\overline{\mathcal{B}}}{\leq r}$ par[60] $\binom{\mathring{\mathcal{B}}}{< r}$,

les boules "produit" sont les produits de boules.

- On a utilisé la norme *uniforme* des normes des composantes de chaque famille $(a_i)_{i\in I}$. Toute autre norme sur $\mathbb{K}^I$ aurait pu convenir au sens où l'on montrera que les normes "produit" associées sont équivalentes. Le cas particulier de la norme uniforme livre toutefois l'agréable description des boules "produit" ci-dessus.

Exercice d'application

1. *Soient $\gamma > 0$ un réel, $n \geq 1$ un naturel et S un segment infini de $\mathbb{R}$.*
   (a) *Donner une condition suffisante et nécessaire simple pour que l'application $N := a \mapsto \sqrt[\gamma]{\sum_{i=1}^n |a_i|^\gamma}$ soit une norme sur $\mathbb{K}^n$.*
   (b) *Donner une condition suffisante et nécessaire simple pour que l'application $N := f \mapsto \sqrt[\gamma]{\int_S |f|^\gamma}$ soit une norme sur $C(S, \mathbb{K})$.*
   (c) *On impose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Donner alors dans chacun des cas 1b et 1a une condition suffisante et nécessaire simple pour que N soit une norme préhilbertienne.*
2.

[59] La norme de E_i est ici notée $\|\cdot\|_i$ pour chaque $i \in I$.
[60] La deuxième équivalence utilise alors la *finitude* de I.

(a) *Soit* $(E_i)_{i\in I}$ *une famille d'espaces vectoriels normés. Montrer que l'application*[61]

$$\left\{\begin{array}{ccc}\left\{\text{normes de } \mathbb{R}^I \text{ croissant sur } \mathbb{R}_+^I\right\} & \longrightarrow & \left\{\text{normes sur } \prod_{i\in I} E_i\right\} \\ N & \longmapsto & (a_i)_{i\in I} \mapsto N\left(\ (\|a_i\|)_{i\in I}\ \right)\end{array}\right.$$

fait sens et est compatible avec l'équivalence de normes (au sens où deux normes source équivalentes sur $\mathbb{R}^I$ *ont pour images deux normes équivalentes).*

(b) *Montrer qu'est une norme sur* $\mathbb{K}[X]$ *l'application*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n \mapsto \frac{|a_0|}{7} + \sqrt{19} \max_{n\in\mathbb{N}} |a_{n+1} - a_n| .$$

(c) *Montrer qu'est une norme sur* $\mathbb{K}[X]$ *l'application*[62]

$$P\left(X^2\right) + XQ\left(X^2\right) \mapsto (\operatorname{sh} 1)\ \sqrt[18]{\int_{-3}^{79} |P|^{18}} + \pi\ \sqrt[42]{\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{Q^{(n)}(0)}{n!}\right|^{42}} .$$

(d) *Soient* $n \in \mathbb{N}$ *et* $s \in S$. *Montrer alors qu'est une norme sur l'espace* $C^n(S, \mathbb{K})$ *l'application*

$$f \mapsto \left\|f^{(n)}\right\|_{57} + \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\operatorname{th} i} \left|f^{(i)}(s)\right| .$$

---

1. Afin d'alléger, on pourra oublier d'une part le domaine de sommation ou d'intégration, d'autre part l'indexation par γ. Nous allons dans les deux cas montrer que N est une norme ssi $\gamma \geq 1$ (à un détail près).

(a) Si $n = 1$, l'application N se confond avec le module, donc est une norme. On peut donc imposer $n \geq 2$.

Soient $a \in \mathbb{K}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a alors d'une part les égalités

$$\begin{aligned} N(\lambda a) &= \sqrt[\gamma]{\sum |\lambda a_i|^\gamma} = \sqrt[\gamma]{\sum |\lambda|^\gamma |a_i|^\gamma} \\ &= \sqrt[\gamma]{|\lambda|^\gamma \sum |a_i|^\gamma} = \sqrt[\gamma]{|\lambda|^\gamma} \sqrt[\gamma]{\sum |a_i|^\gamma} = |\lambda| N(a) , \end{aligned}$$

d'autre part les implications

$$N(a) = 0 \Longrightarrow \sum \underbrace{|a_i|^\gamma}_{\geq 0} = 0 \Longrightarrow \forall i \in [1, n|] , \quad \underbrace{|a_i|^\gamma = 0}_{\Longleftrightarrow a_i = 0 \text{ car } \gamma \neq 0} \Longrightarrow a = 0.$$

Nous avons par ailleurs établi lors de l'exemple 4 section 2.1 les comparaisons triangulaires sous l'hypothèse « $\gamma \geq 1$ » (bien voir où cette hypothèse est intervenue).

[61] La puissance $\mathbb{R}_+^I$ est munie de l'ordre produit.
[62] Les lettres P et Q dénotent ici des polynômes.

Supposons à présent $\gamma < 1$. Visuellement, la "boule" $N^{-1}([0,1])$ n'est alors plus convexe : montrons cela. Les points $(1,0,0,...0)$ et $(0,1,0,0,...,0)$ de $\mathbb{K}^n$ font sens (car $n \geq 2$), sont chacun par N d'image $\sqrt[\gamma]{1^\gamma + 0} = 1$ et leur somme $(1,1,0,0,...0)$ est d'image $2^{\frac{1}{\gamma}} \overset{\gamma<1}{>} 2$, ce qui infirme les comparaisons triangulaires pour N.

Finalement, l'application N est une norme ssi $n = 1$ ou $\gamma \geq 1$.

(b) La positive homogénéité de N s'établit comme ci-dessus et l'axiome de séparation comme le cours (le cas singulier $\gamma = 1$ est au programme). Quant aux comparaisons triangulaires, le même raisonnement tiendrait si l'on disposait d'une version *continue* des comparaisons de Hölder : établissons une telle version.

Notons L la longueur de S (laquelle est non nulle vu que S est infini), soient $f, g \in C(S, \mathbb{R}_+)$, soient $\alpha, \beta \geq 0$ de somme 1, soit $n \in \mathbb{N}^*$, abrégeons $s_i := \min S + \frac{i}{n} L$ pour chaque $i \in [1, n|]$ et notons a et b les vecteurs respectifs $(\ f(s_i)\ )$ et $(\ g(s_i)\ )$ de $\mathbb{K}^n$ indexés chacun par $i \in [1, n|]$. Une comparaison de Hölder s'écrit alors

$$\sum_{i=1}^n a_i^\alpha b_i^\beta \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^\alpha \left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^\beta, \ i.\ e.$$

$$\sum_{i=1}^n \left[f^\alpha g^\beta\right](s_i) \leq \left(\sum_{i=1}^n f(s_i)\right)^\alpha \left(\sum_{i=1}^n g(s_i)\right)^\beta ;$$

multiplier par $\frac{L}{n} = \left(\frac{L}{n}\right)^\alpha \left(\frac{L}{n}\right)^\beta$ fait alors apparaître trois sommes d'Eudoxe-Archimède, d'où (en appliquant $\lim_{n\to\infty}$) la majoration $\int_S f^\alpha g^\beta \leq \left(\int_S f\right)^\alpha \left(\int_S g\right)^\beta$, *c. q. f. d.*.

Supposons à présent $\gamma < 1$ et cherchons dans $C(S, \mathbb{K})$ des analogues des points $(1,0,0,...0)$ et $(0,1,0,0,...,0)$ de $\mathbb{K}^n$ qui infirmaient la comparaison triangulaire. Il s'agirait de fonctions dont les images par N soient aisés à calculer, ainsi que celle de leur somme. Définissons par exemple f et g comme sur la figure :

$$\text{FIG} \quad f = 0 \text{ puis monte, } \ f + g = \frac{L}{2}.$$

Abrégeons $m := \frac{\min S + \max S}{2}$ et notons $\binom{F}{G} := \binom{[\min S, m]}{[m, \max S]}$, ce qui permet de synthétiser les points qui nous suffiront à conclure : $f, g \geq 0$, $\begin{cases} f_{|F} = 0 \\ g_{|G} = 0 \end{cases}$ et $I := \int_S f^\gamma = \int_S g^\gamma > 0$. Il en résulte d'une part les égalités

$$N(f+g)^\gamma = \int_S |f+g|^\gamma = \int_F \underbrace{|f+g|^\gamma}_{=|0+g|^\gamma} + \int_G \underbrace{|f+g|^\gamma}_{=|f+0|^\gamma} = \int_S |g|^\gamma + \int_S |f|^\gamma = 2I,$$

d'autre part les majorations

$$[\ N(f) + N(g)\ ]^\gamma = \left(\sqrt[\gamma]{I} + \sqrt[\gamma]{I}\right)^\gamma = \left(2\sqrt[\gamma]{I}\right)^\gamma = 2^\gamma I \underset{I>0}{\overset{\gamma<1}{<}} 2I ;$$

puisque $\gamma > 0$, on en déduit la minoration stricte $N(f+g) > N(f) + N(g)$.

Finalement, l'application N est une norme ssi $\gamma \geq 1$.

(c) Plaçons-nous dans $\mathbb{K}^n$. Comme en 1a, on peut imposer $n \geq 2$ (quand $n = 1$ on obtient la valeur absolue $a \mapsto \sqrt{a \cdot a}$).

Supposons que N soit associée à un produit scalaire. Elle vérifie alors l'identité du parallélogramme. Or pour les deux points ci-dessus $(1, 0, 0, ...0)$ et $(0, 1, 0, 0, ..., 0)$, cette identité s'écrit $\sqrt[\gamma]{2}^2 + \sqrt[\gamma]{1^\gamma + |-1|^\gamma}^2 = 2\left(1^2 + 1^2\right)$, *i. e.* $2^{\frac{2}{\gamma}} = 2$, ou encore $\gamma = 2$. Réciproquement, la norme d'indice 2 est bien associée au produit scalaire usuel.

Finalement, l'application N est une norme associée à un produit scalaire ssi $n = 1$ ou $\gamma = 2$.

Le raisonnement est identique dans l'espace $C(S, \mathbb{R})$ (bien vérifier que $N(f-g)^\gamma = I$) : une condition simple est alors $\gamma = 2$.

2.

(a) Soient M et N deux normes sur $\mathbb{R}^I$. Pour chaques réels α, β, la majoration $\alpha M \leq \beta N$ implique (en composant à droite par $(a_i)_{i \in I} \mapsto (\|a_i\|)_{i \in I}$) la majoration $\alpha M\left((\|a_i\|)_{i \in I} \right) \leq \beta N\left((\|a_i\|)_{i \in I} \right)$. En particulier, l'équivalence des normes M et N implique celles de leurs images par l'application donnée – dès lors que lorsque ces images sont bien des normes. Montrons cela.

Soit N une norme sur $\mathbb{R}^I$ croissant sur $\mathbb{R}_+^I$ et montrons que l'application $N' := (a_i)_{i \in I} \mapsto N\left((\|a_i\|)_{i \in I} \right)$ est une norme sur $\prod_{i \in I} E_i$. Soient $a, b \in \prod_{i \in I} E_i$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a alors d'une part les égalités

$$\begin{aligned}
N'(\lambda a) &\underset{\text{de } N'}{\overset{\text{définition}}{=}} N\left((\| [\lambda a]_i \|)_{i \in I} \right) \underset{\text{de } \lambda a}{\overset{\text{définition}}{=}} N\left((\|\lambda\, a_i\|)_{i \in I} \right) \\
&\underset{\text{est positiv. homog.}}{\overset{\text{la norme de chaque } E_i}{=}} N\left((|\lambda| \|a_i\|)_{i \in I} \right) \underset{\text{scalaire sur } \mathbb{K}^I}{\overset{\text{déf. de l'action}}{=}} N\left(|\lambda| (\|a_i\|)_{i \in I} \right) \\
&\underset{\text{positiv. homog.}}{\overset{\text{la norme } N \text{ est}}{=}} |\lambda|\ N\left((\|a_i\|)_{i \in I} \right) \underset{\text{de } N'}{\overset{\text{définition}}{=}} |\lambda|\ N'(a),
\end{aligned}$$

d'autre part les implications

$$\begin{aligned}
& N'(a) = 0 \Longrightarrow N\left((\|a_i\|)_{i \in I} \right) = 0 \overset{N \text{ sépare}}{\Longrightarrow} (\|a_i\|)_{i \in I} = 0 \\
& \Longrightarrow \forall i \in I,\ \|a_i\| = 0 \underset{\text{sépare (à } i \text{ fixé)}}{\overset{\text{la norme de } E_i}{\Longrightarrow}} \forall i \in I,\ a_i = 0 \Longrightarrow a = 0
\end{aligned}$$

et enfin les majorations[63]

$$\begin{aligned}
N'(a+b) &\underset{\text{de } N'}{\overset{\text{définition}}{=}} N\left((\| [a+b]_i \|)_{i \in I} \right) \underset{\text{de } a+b}{\overset{\text{définition}}{=}} N\left((\|a_i + b_i\|)_{i \in I} \right) \\
&\underset{\text{et croissance de } N \text{ sur } \mathbb{R}_+^I}{\overset{\text{comp. trig dans chaque } E_i}{\leq}} N\left((\|a_i\| + \|b_i\|)_{i \in I} \right) \\
&\underset{\text{de + dans } \mathbb{K}^I}{\overset{\text{définition}}{=}} N\left((\|a_i\|)_{i \in I} + (\|b_i\|)_{i \in I} \right) \\
&\underset{\text{trig. pour } N}{\overset{\text{comparaison}}{\leq}} N\left((\|a_i\|)_{i \in I} \right) + N\left((\|b_i\|)_{i \in I} \right) = N'(a) + N'(b).
\end{aligned}$$

[63] C'est uniquement ici que nous sert l'hypothèse de croissance.

(b) Voyons les polynômes comme des suites et montrons qu'est un isomorphisme d'espaces vectoriels l'application $\varphi := \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \widetilde{\longrightarrow} & \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X] \\ a & \longmapsto & \left(a_0, (a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \end{array} \right.$. D'une part la linéarité est immédiate, d'autre part on vérifie aisément que $\binom{\lambda}{d} \mapsto \left(\lambda + \sum_{i=0}^{n-1} d_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une réciproque de φ. Normons alors $\mathbb{K}$ par le module et $\mathbb{K}[X]$ par la norme uniforme. L'application $\binom{a}{b} \mapsto \frac{|a|}{7} + \sqrt{19}\,|b|$ étant une norme sur $\mathbb{R}^2$ qui croît sur $\mathbb{R}_+^2$, l'application $\binom{\lambda}{d} \mapsto \frac{|\lambda|}{7} + \sqrt{19}\max_{n\in\mathbb{N}} |d_{n+1} - d_n|$ est une norme sur $\mathbb{K} \times \mathbb{K}[X]$, laquelle se transporte *via* l'injection φ (suivant l'exercice 3a section 2.1) en une norme sur $\mathbb{K}[X]$ comme souhaité.

(c) Est un isomorphisme d'espaces vectoriels l'application[64]

$$\psi := \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X]^2 & \widetilde{\longrightarrow} & \mathbb{K}[X] \\ (P,Q) & \longmapsto & P\left(X^2\right) + XQ\left(X^2\right) \end{array} \right. .$$

Normons alors l'espace $\mathbb{K}[X]$ d'une part par la norme d'indice 18 en le voyant comme partie de $C([-3,79], \mathbb{K})$, d'autre part par la norme d'indice 42 en le voyant comme partie de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. L'application $\binom{a}{b} \mapsto (\operatorname{sh} 1)\,|a| + \pi\,|b|$ étant une norme sur $\mathbb{R}^2$ qui croît sur $\mathbb{R}_+^2$, l'application $\binom{P}{Q} \mapsto (\operatorname{sh} 1) \sqrt[18]{\int_{-3}^{79} |P|^{18}} + \pi \sqrt[42]{\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{Q^{(n)}(0)}{n!}\right|^{42}}$ est une norme sur $\mathbb{K}[X]^2$, laquelle se transporte *via* l'injection ψ^{-1} (suivant l'exercice 3a section 2.1) en une norme sur $\mathbb{K}[X]$ comme souhaité[65].

(d) Est un isomorphisme d'espaces vectoriels l'application[66]

$$\chi := \left\{ \begin{array}{ccc} C^n(S,\mathbb{K}) & \widetilde{\longrightarrow} & C^0(S,\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n \\ f & \longmapsto & \left(f^{(n)}, \left(f^{(i)}(s)\right)_{i\in[0,n[\![}\right) \end{array} \right. .$$

Normons alors d'une part $C^0(S,\mathbb{K})$ d'une part par la norme d'indice 57, d'autre part chaque facteur $\mathbb{K}$ par le module. L'application $a \mapsto |a_n| + \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\operatorname{th} i}\,|a_i|$ étant une norme sur $\mathbb{R}^{n+1}$ qui croît sur $\mathbb{R}_+^{n+1}$, l'application $\binom{F}{a} \mapsto \|F\|_{57} + \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\operatorname{th} i}\,|a_i|$ est une norme sur $C^0(S,\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n$, laquelle se transporte *via* l'injection χ (suivant l'exercice 3a section 2.1) en une norme sur $C^n(S,\mathbb{K})$ comme souhaité.

---

3 Suites, fermés, adhérence

On garde l'espace vectoriel normé E et la partie $A \subset E$ évoqués. La norme de E évoquée est toujours notée $\mathcal{N}$ ou $e \mapsto \|e\|$.

[64] décomposition d'un polynôme en somme d'un polynôme pair et d'un impair

[65] Rappelons que la suite $\left(\frac{Q^{(n)}(0)}{n!}\right)$ est celle des coefficients de Q.

[66] *Rappel* : chaque application continue sur S admet une unique n-ième primitive de classe C^n soumise à n "conditions initiales" en le point s.

3.1 Tendances séquentielles

Le cours de première année sur les suites définissait à l'aide de l'application *module*

1. un prédicat binaire *tendre vers* entre l'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites scalaires et l'ensemble $\mathbb{K}$ des scalaires,
2. d'où un prédicat singulaire *converger* sur l'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

   ■■ Signalons l'abus de langage *converger vers* pour signifier *converger et tendre vers*. ■■
3. et sa négation *diverger*.

En observant, dans le cas $E = \mathbb{C}$, que le module complexe se confond avec la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$, on obtient un pont naturel pour transférer les notions séquentielles à $E^{\mathbb{N}}$:

dans chaque définition ou propriété séquentielle sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$,
doubler chaque barre verticale pour obtenir l'analogue sur $E^{\mathbb{N}}$.

Définitions – Propriétés (analyse séquentielle) *Soient $a \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$.* *On dit que la suite a* ***tend vers*** *ℓ si la suite réelle $n \mapsto \|a_n - \ell\|$ tend vers 0, tendance notée alors $a \longrightarrow \ell$ ou $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$.*

On dit que la suite a ***converge*** *(ou on la qualifie de* ***convergente****) s'il y a un point de E vers lequel elle tend. Dans ce cas, un tel point est unique, est appelé* ***la limite de*** *a et est noté $\lim a$ ou*[67] *$\lim_{n\to\infty} a_n$. Dans le cas contraire, on dit que la suite a* ***diverge*** *(ou on la qualifie de* ***divergente****).*

Les suites à valeurs dans E convergentes forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$ sur lequel l'application $\lim$ est linéaire. Lorsque E est une algèbre à multiplication continue, le morphisme d'espaces vectoriels $\lim$ est un morphisme d'algèbres.

Si la suite a est bornée, on a alors la tendance $\varepsilon a \longrightarrow 0$ pour chaque suite réelle $\varepsilon \longrightarrow 0$. Si la suite a tend vers 0, on a alors la tendance $Ba \longrightarrow 0$ pour chaque suite B réelle bornée.

On appelle ***extractrice***[68] *(ou* ***extraction****) toute application $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ croissant strictement. Chaque extractrice x est injective, tend vers ∞ et vérifie $\forall n \in \mathbb{N},\ x(n) \geq n$. On appelle* ***sous-suite*** *(ou* ***suite extraite****) de a toute suite de la forme $a \circ x$ où x est une extractrice. Si a converge, alors chacune de ses sous-suites tend vers $\lim a$.*

Au risque de nous répéter : *remplacer simplement chaque module par une norme* dans les définitions et démonstrations du cours de première année sur les suites. On retiendra en particulier, à $(a, \ell) \in E^{\mathbb{N}} \times E$ fixé, que

la tendance $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ dans E équivaut à la tendance $\|a_n - \ell\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ dans $\mathbb{R}$,

ce qui permet d'utiliser tout le cours de première année sur les suites.

Exemple : montrons le caractère multiplicatif de l'application "limite" quand E est une algèbre à multiplication continue.

[67] La lettre n est ici muette.

[68] Une extractrice "extrait" de la suite a des termes en formant une suite extraite (x comme « **ex**traire »).

Notons $C := \sup_{v,w\neq 0}^{v,w\in E} \frac{\|vw\|}{\|v\|\|w\|}$, soient $a, b \in E^{\mathbb{N}}$ et $\alpha, \beta \in E$ telles que $\begin{cases} a \longrightarrow \alpha \\ b \longrightarrow \beta \end{cases}$.
On a alors à $n \in \mathbb{N}$ fixé les majorations et tendance[69]

$$\begin{aligned}
\|a_n b_n - \alpha\beta\| &= \|a_n (b_n - \beta) - (a_n - \alpha)\beta\| \\
&\underset{\text{sous-additive}}{\overset{\text{la norme de } E \text{ est}}{\leq}} \|a_n (b_n - \beta)\| + \|(a_n - \alpha)\beta\| \\
&\underset{\text{de } E \text{ est continue}}{\overset{\text{la multiplication}}{\leq}} C \underbrace{\|a_n\|}_{\substack{=O(1) \text{ car} \\ a \text{ converge}}} \underbrace{\|b_n - \beta\|}_{\substack{=o(1) \\ \text{car } b \longrightarrow \beta}} + \underbrace{\|a_n - \alpha\|}_{\substack{=o(1) \\ \text{car } a \longrightarrow \alpha}} \underbrace{C \ \|\beta\|}_{\substack{=O(1) \text{ car} \\ \text{est constante}}} \\
&= \underbrace{\underbrace{O(1)\, o(1)}_{=o(1)} + \underbrace{o(1)\, O(1)}_{=o(1)}}_{=o_{n\to\infty}(1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ d'où la tendance voulue } ab \longrightarrow \alpha\beta.
\end{aligned}$$

Remarques

- **Évocations et tendances**. Dans l'exemple précédent, on a évoqué un $n \in \mathbb{N}$ (en raisonnant « à $n \in \mathbb{N}$ fixé ») mais tout à la fin apparaît une tendance $o_{n\to\infty}(1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ où le symbole n devrait être *muet* : on sous-entend alors de "désévoquer" n dans cette tendance afin de pouvoir l'y considérer comme symbole muet. Cette abus est monnaie courante et permet d'alléger considérablement la rédaction.
- **Tendance ou égalité ?** Soit $(a, \ell) \in E^{\mathbb{N}} \times E$. L'égalité $\lim a = \ell$ exprime alors une relation binaire entre deux objets (d'une part la limite $\lim a$, d'autre part le vecteur ℓ) et fait sens ssi chacun de ces objets fait sens, *i. e.* ssi a converge, au contraire de la tendance $a \longrightarrow \ell$ qui fait toujours sens (et qui n'exprime pas une égalité entre deux vecteurs). Par conséquent :

l'égalité $\lim a = \ell$ *n'exprime pas la même chose* *que la tendance* $a \longrightarrow \ell$ *!*

Au locuteur donc de savoir si il/elle veut énoncer une *tendance* ou bien une *égalité* avec *convergence* sous-entendue. Bien souvent une tendance seule convient.

- **Abus linguistique**. On lira souvent, étant donnée une suite $a \in E^{\mathbb{N}}$, le mélange

« a converge vers ℓ » *pour signifier* *« a converge et a tend vers ℓ ».*

Encore une fois, si la convergence n'est pas pertinente (ce qui est très souvent le cas), on écrira alors simplement « *a tend vers ℓ* » afin de respecter sa pensée.

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme uniforme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n \mapsto \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$, la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (par 1), donc la suite $\left[n \mapsto \frac{X^n}{2^n} = \frac{1}{2^n} X^n\right] = o(1)\, O(1)$ tend vers le polynôme nul. En revanche, si l'on norme cette fois $\mathbb{R}[X]$ par $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} 3^n |a_n|$, la suite $n \mapsto \left\|\frac{X^n}{2^n}\right\| = \left(\frac{3}{2}\right)^n$ tend vers ∞, donc la suite $\left(\frac{X^n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, *a fortiori* ne converge pas.

[69] Comme en première année, les notations $O(1)$ et $o(1)$ dénotent resp. "toute" suite bornée et "toute" suite tendant vers 0, avec les mêmes ambigüités et les mêmes précautions en résultant. En tout rigueur, on aurait ici dû écrire $o_{n\to\infty}(1)$ et $O_{n\to\infty}(1)$.

2. Soit ℓ une matrice limite de la suite des itérées d'une certain matrice a. La suite $\left(a^{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors extraite de $\left(a^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, donc tend vers $\lim_{n\to\infty} a^n = \ell$. Or la suite $\left(a^{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left[\ \left(a^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\ \right]^2$ tend par ailleurs (d'après le caractère multiplicatif de l'application lim) vers $\left(\lim_{n\to\infty} a^n\right)^2 = \ell^2$. Il en résulte l'égalité $\ell = \ell^2$. Réciproquement, chaque matrice idempotente est limite stationnaire de la suite de ses itérées.
3. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ dont on note d le degré. La suite $\left(1, X, X^2, ..., X^d, X^{d+1} - P, X^{d+2} - P, ...\right)$ est alors échelonnée en degré, donc est une base de $\mathbb{K}[X]$. Munissons ce dernier de la norme[70] $a \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|a_n|}{2^n}$ suivant la base précédente, de sorte à avoir la tendance $\|X^n - P\| = 2^{-n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où celle $X^n \longrightarrow P$. *Conclusion* : la suite monomiale $\left(X^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ peut converger vers *n'importe quel polynôme* suivant la façon dont on norme $\mathbb{K}[X]$!
4. Plaçons-nous dans l'espace $\mathbb{K}_b^{\mathbb{N}} := \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ et montrons que

   le caractère "tendre vers 0" passe à la limite uniforme.

   Imposons A formé des suites tendant vers 0, soient $a \in A^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{K}_b^{\mathbb{N}}$ tels que ${}^n a \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$, soit $\varepsilon > 0$, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\left\|{}^N a - \ell\right\|_\infty < \varepsilon$ (légitime car $a \longrightarrow \ell$), soit $\nu \in \mathbb{N}$ tel que $\left\|{}^N a_n\right\| < \varepsilon$ pour chaque naturel $n > \nu$ (légitime car ${}^N a \longrightarrow 0$). On a alors pour chaque tel n les majorations

   $$|\ell_n| \leq \left|\ell_n - {}^N a_n\right| + \left|{}^N a_n\right| \leq \left\|\ell - {}^N a\right\|_\infty + \varepsilon < 2\varepsilon, \text{ c. q. f. d..}$$

5. (plus difficile) Toujours dans le même espace $\mathbb{K}_b^{\mathbb{N}}$, montrons que

   le caractère convergent passe à la limite uniforme.

   Notons C le sous-espace vectoriel formé des suites convergentes, soient $a \in C^{\mathbb{N}}$ et $L \in \mathbb{K}_b^{\mathbb{N}}$ tels que ${}^n a \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L$ et notons ℓ la suite $\left(\lim_{\nu\to\infty} {}^n a_\nu\right)_{n\in\mathbb{N}}$. La suite a étant convergente, elle est bornée par un certain M : pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la majoration $\|{}^n a\|_\infty \leq M$ se réécrit alors $\forall \nu \in \mathbb{N}$, $|{}^n a_\nu| \leq M$ et livre (en appliquant $\lim_{\nu\to\infty}$) la majoration $|\ell_n| \leq M$, ce qui montre que la suite ℓ est bornée.

   Soit λ une valeur d'adhérence de ℓ et montrons la tendance $L \longrightarrow \lambda$. Soit $\varepsilon > 0$, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|{}^p a - L\|_\infty < \varepsilon$ pour chaque naturel $p > N$ (légitime car $a \longrightarrow L$), soit $p > N$ un naturel tel que $|\ell_p - \lambda| < \varepsilon$ (légitime car λ est valeur d'adhérence de ℓ) et soit $\nu > p$ un naturel tel que $|{}^p a_n - \ell_p| < \varepsilon$ pour chaque naturel $n > \nu$ (légitime car ${}^p a \longrightarrow \ell_p$). On a alors alors pour chaque tel n les majorations

   $$|L_n - \lambda| \leq \underbrace{|L_n - {}^p a_n|}_{\leq \|{}^p a - L\|_\infty < \varepsilon \text{ car } p > N} + \underbrace{|{}^p a_n - \ell_p|}_{< \varepsilon \text{ car } n > \nu} + \underbrace{|\ell_p - \lambda|}_{< \varepsilon} \leq 3\varepsilon, \text{ ce qui conclut.}$$

Définition – Proposition (valeurs d'adhérence)
Soient $a \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$. Il équivaut alors de dire

[70] On entend par là que les a_n sont les coordonnées de a dans la base considérée.

1. *il y a une sous-suite de a tendant vers ℓ ;*
2. $\begin{array}{l}\forall\varepsilon>0\\ \forall n\in\mathbb{N}\end{array}$, $\exists N\in\mathbb{N}$, $\left\{\begin{array}{l}N>n\\ \|a_N-\ell\|<\varepsilon\end{array}\right.$;
3. *pour chaque réel $\varepsilon>0$, l'ensemble $\{n\in\mathbb{N}\ ;\ \|a_n-\ell\|<\varepsilon\}$ est infini.*

Dans ce cas, on dit que le point ℓ est une ***valeur d'adhérence*** *de a.*
Si la suite a possède au moins deux valeurs d'adhérence, elle diverge alors.

Démonstration

Lorsque a converge, elle possède une seule valeur d'adhérence (sa limite), d'où par contraposée la dernière affirmation.

$\boxed{3\Longrightarrow 2}$ Soient $\varepsilon>0$ et $n\in\mathbb{N}$. La partie $\{\nu\in\mathbb{N}\ ;\ \|a_\nu-\ell\|<\varepsilon\}$ de $\mathbb{N}$ étant alors infinie, elle rencontre l'intervalle $]n,\infty|[$, d'où un naturel N comme voulu.

$\boxed{1\Longrightarrow 3}$ Soit x une extractrice telle que $a_{x(n)}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\ell$, soit $\varepsilon>0$ et soit $N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\in[N,\infty|[\,,\ \left\|a_{x(n)}-\ell\right\|<\varepsilon$ (permis car $a\circ x\longrightarrow\ell$). L'injection x induit alors (par restriction) une injection de l'ensemble infini $[N,\infty|[$ dans $\{n\in\mathbb{N}\ ;\ \|a_n-\ell\|<\varepsilon\}$, ce qui montre que ce dernier ensemble est infini.

$\boxed{2\Longrightarrow 1}$ Pour chaque naturel $n>0$, remplacer ε par $\frac{1}{n}$ dans l'hypothèse donne un naturel $N>n$ tel que $\|a_N-\ell\|<\frac{1}{n}$. L'application

$$\mu:=\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{N}\\ n & \longmapsto & \min\left\{N\in\,]n,\infty|[\ ;\ \|a_N-\ell\|<\frac{1}{n}\right\}\end{array}\right.$$

fait alors sens et vérifie $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\left\{\begin{array}{c}\mu(n)>n\\ \left\|a_{\mu(n)}-\ell\right\|<\frac{1}{n}\end{array}\right.$.

La suite itérée $x:=n\mapsto\mu^{\circ n}(1)$ croît par conséquent strictement, donc est une extraction et vérifie pour chaque naturel n les majorations et tendance

$$\left\|a_{x(n+1)}-\ell\right\|=\left\|a_{\mu(x(n))}-\ell\right\|<\frac{1}{x(n)}\underset{n\to\infty}{\overset{\text{car }x\longrightarrow\infty}{\longrightarrow}}0\text{, ce qui conclut.}$$

Remarque – **Critère d'absence de valeur d'adhérence**. Soit $a\in E^{\mathbb{N}}$. On impose d'une part la minoration $\inf_{p\neq q}^{p,q\in\mathbb{N}}d(a_p,a_q)\geq 1$, d'autre part que la suite a ait une valeur d'adhérence. Soit ℓ une telle valeur : d'après le point 2 précédent, il y a alors un naturel p tel que $\|a_p-\ell\|<\frac{1}{2}$ puis il y a un naturel $q>p$ tel que $\|a_q-\ell\|<\frac{1}{2}$, d'où les majorations $\|a_p-a_q\|\leq\|a_p-\ell\|+\|\ell-a_q\|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, contredisant la minoration de l'hypothèse. On retiendra plus généralement que

$$\textit{si}\ \inf_{p\neq q}^{p,q\in\mathbb{N}}d(a_p,a_q)>0\textit{, la suite a n'a alors aucune valeur d'adhérence}$$

Exemple : si $E=\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{K})$, en notant à $n\in\mathbb{N}$ fixé ${}^n\delta$ la suite[71] nulle partout sauf en n où elle vaut 1, la suite $\left({}^n\delta\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors à valeurs dans E et vérifie pour chaques naturels $p\neq q$ l'égalité $d\left({}^p\delta,{}^q\delta\right)=1$, donc n'admet aucune valeur d'adhérence.

Voyons à présent des propriétés propres aux suites dans un espace vectoriel normé.

[71] *Culture* : la suite ${}^n\delta$ s'appelle le **Dirac** (***discret***) en n.

Proposition (invariance des tendances séquentielles par équivalence de normes)

La "relation" de tendance dans $E^{\mathbb{N}} \times E$ est inchangée si l'on remplace la norme de E par chaque norme qui lui est équivalente.

Démonstration

Soit $\mathcal{N}'$ une norme équivalente à $\mathcal{N}$, soit $\beta > 0$ un réel tel que $\mathcal{N}' \leq \beta\mathcal{N}$. Soit $(a, \ell) \in E^{\mathbb{N}} \times E$: si $a \longrightarrow \ell$ pour $\mathcal{N}$, on a alors à $n \in \mathbb{N}$ fixé les majorations et tendance $\mathcal{N}'(a_n - \ell) \leq \beta \|a_n - \ell\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \beta 0 = 0$, d'où la tendance $a \longrightarrow \ell$ pour $\mathcal{N}'$. Échanger les rôles des normes $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ permet alors de conclure.

Remarque – Dans la définition de la convergence, la norme de E n'intervenant que dans une *tendance*, la propriété précédente montre que

la convergence dans $E^{\mathbb{N}}$ est inchangée par passage à une norme équivalente.

Application : d'après l'exemple 1 précédent, dans $\mathbb{R}[X]$, la norme uniforme n'est pas équivalente à la norme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} 3^n |a_n|$ car la suite $\left(\frac{X^n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour l'une mais pas pour l'autre. Principe à retenir :

nier l'équivalence de deux normes données
en exhibant deux suites aux tendances différentes

Propriétés (tendance séquentielle dans un produit fini d'espaces vectoriels normés)

Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille $\underline{\underline{\text{finie}}}$ d'espaces vectoriels normés, soit $a \in \left(\prod_{i\in I} E_i\right)^{\mathbb{N}}$ et soit $\ell \in \prod_{i\in I} E_i$.

1. *Pour chaque $i \in I$, un exposant i abrégera « i-ième coordonnée[72] de ». On a alors l'équivalence*
$$a \longrightarrow \ell \Longleftrightarrow \forall i \in I,\ a^i \longrightarrow \ell^i.$$
2. *La convergence de a équivaut à celle de chacune de ses suites coordonnées et, dans ce cas, la limite de a est la famille des limites de ses suites coordonnées.*

Démonstration

1. Pour chaque $i \in I$, notons a^i la i-coordonnée de la famille a vue dans $\prod_{i\in I} E_i^{\mathbb{N}}$. On a alors les équivalences[73]
$$\begin{aligned} &\forall i \in I,\ a^i \longrightarrow \ell^i \underset{\text{dans } E_i \text{ (à } i\in I \text{ fixé)}}{\overset{\text{déf. de la tendance}}{\Longleftrightarrow}} \forall i \in I,\ \left\|a_n^i - \ell^i\right\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\ &\overset{I \text{ fini}}{\Longleftrightarrow} \sup_{i\in I} \left\|a_n^i - \ell^i\right\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \underset{\text{norme produit}}{\overset{\text{définition de la}}{\Longleftrightarrow}} \|a_n - \ell\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\ &\underset{\text{la tendance}}{\overset{\text{définition de}}{\Longleftrightarrow}} a \longrightarrow \ell,\ c.\ q.\ f.\ d. \end{aligned}$$

[72] La suite a est ainsi identifiée à la famille (a^i) de ses suites coordonnées *via* l'isomorphisme d'espaces vectoriels $\left(\prod_{i\in I} E_i\right)^{\mathbb{N}} \cong \prod_{i\in I} E_i^{\mathbb{N}}$.

[73] Le $\sup_{i\in I}$ fait sens car I est fini.

2. Si a converge, remplacer ℓ par $\lim a$ dans l'implication $\Longrightarrow$ ci-dessus fait alors sens et montre pour chaque $i \in I$ la tendance $a^i \longrightarrow [\lim a]^i$, d'où la convergence de a^i. Si a^i converge pour chaque $i \in I$, remplacer ℓ par $\left(\lim a^i\right)_{i\in I}$ dans l'implication $\Longleftarrow$ ci-dessus fait alors sens et montre la tendance $a \longrightarrow \left(\lim a^i\right)_{i\in I}$, d'où la convergence de a. Nous avons prouvé au passage l'égalité des limites annoncée.

Remarque – Imposons E de dimension finie. Il est alors isomorphe *via* l'évocation d'une base à un produit fini de droites vectorielles, produit dans lequel le point 2 s'applique. En transportant alors (grâce à l'exercice ? ? ?) la norme produit sur E *via* l'isomorphisme précédent, on obtient une norme sur E pour laquelle le point 2 s'applique. D'après l'équivalence des normes de E (qui est de dimension finie) et l'invariance des tendances séquentielles par équivalence des normes,

en dimension finie, chaque suite converge ssi[74]
chacune de ses suites coordonnées converge.

Exemples

1. Pour chaques suites $a, b, c, d \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, la convergence de la suite matricielle $n \mapsto \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ équivaut (d'après le point 2) à celle de chacune de ces quatre suites, ce qui revient aussi (toujours par le même point) à celle de la suite matricielle "transposée" $n \mapsto \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$. La lectrice et le lecteur généraliserons aisément : pour chaque naturel N, pour chaque suite $a \in M_N(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ et pour chaque matrice $\ell \in M_N(\mathbb{K})$, on a[75]
$$\text{l'équivalence } a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \Longleftrightarrow {}^t a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} {}^t\ell.$$
2. Soit a une matrice antisymétrique dont la suite des itérées converge. Montrons alors que la limite $\ell := \lim_{n\to\infty} a^n$ est nulle. Vu pour chaque naturel n les égalités ${}^t(a^n) = ({}^t a)^n = (-a)^n$, de la convergence de $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ on déduit grâce à l'exemple 1 celle du membre de gauche $({}^t(a^n))_{n\in\mathbb{N}}$, d'où celle du membre de droite $((-a)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il en résulte la convergence de la somme $(a^n + (-a)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, laquelle admet donc une seule valeur d'adhérence. Or la sous-suite obtenue suivant les indices impairs tend vers 0 (elle est nulle) et celle obtenue suivant les pairs tend vers 2ℓ ; l'égalité de ces valeurs d'adhérence $0 = 2\ell$ permet alors de conclure.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, notons $S_n := \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\theta}{n} \\ \frac{\theta}{n} & 1 \end{pmatrix}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ et étudions la convergence de la suite $(S_n^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, d'une part les colonnes de la matrice S_n sont orthogonales et de même norme $\sqrt{1 + \frac{\theta^2}{n^2}}$, d'autre part le déterminant $1 + \frac{\theta^2}{n^2}$ de S_n est positif, donc[76] S_n est la similitude directe de

[74] Il est remarquable que ce résultat ne dépend aucunement de la base évoquée.

[75] Nous dirons plus tard que la transposition matricielle est *continue*.

[76] *Rappel* : pour chaques réels a, b, en notant $c := a + ib$, la matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est la similitude de centre 0, rapport $|c|$ et angle $\operatorname{Arg} c$.

rapport $\sqrt{1+\frac{\theta^2}{n^2}}$ et d'angle $\operatorname{Arg}\left(1+i\frac{\theta}{n}\right)=\arctan\frac{\theta}{n}$, donc la puissance S_n^n est la similitude d'angle $\theta_n := n\left(\arctan\frac{\theta}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} n\frac{\theta}{n}=\theta$ et de rapport

$$\lambda_n := \sqrt{1+\frac{\theta^2}{n^2}}^n = e^{\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{\theta^2}{n^2}\right)} = e^{\frac{n}{2}O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = e^{O\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1.$$

Le point 2 ci-dessus permet alors (avec les continuités de cos et de sin) d'affirmer la tendance (quand $n\to\infty$) de $S_n^n = \lambda_n \begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix}$ vers $1\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, *i. e.* vers la rotation d'angle θ..

Exercices d'application

1. *Dans l'espace* $\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{K})$*, montrer que le caractère "posséder* 0 *comme valeur d'adhérence" passe à la limite.*
2. *On se place sur l'espace des applications* $[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ *nulles en* 0 *et lipschitziennes. On admet que les applications*

$$f\mapsto \sup_{\substack{a,b\in[0,1]\\ a\neq b}}\left|\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\right| \qquad et \qquad f\mapsto \sup_{a\in]0,1]}\left|\frac{f(a)}{a}\right|$$

   en sont des normes. Sont-elles équivalentes ?
3.
   (a) *Montrer que les suites vectorielles tendant vers* 0 *sont les produits d'une suite réelle tendant vers* 0 *par une suite vectorielle bornée.*
   (b) *Montrer que* A *est bornée ssi le produit de chaque suite de* A *par chaque suite réelle tendant vers* 0 *converge.*
   (c) *Soit* $\mathcal{N}'$ *une norme sur* E*. Montrer qu'il équivaut de dire que les normes* $\mathcal{N}$ *et* $\mathcal{N}'$ *ont :*
      i. *mêmes parties bornées ;*
      ii. *mêmes applications bornées ;*
      iii. *mêmes suites bornées ;*
      iv. *mêmes suites tendant vers* 0 *;*
      v. *même "relation" de tendance ;*
      vi. *mêmes suites convergentes.*

---

1. Notons V l'espace vectoriel normé considéré, soient $a\in V^{\mathbb{N}}$ et $\ell\in V$ tels que $a\longrightarrow\ell$, soient $\varepsilon>0$ un réel et N un naturel. Soit $\nu>N$ un naturel tel que $\|{}^{\nu}a-\ell\|<\varepsilon$ (légitime car $a\longrightarrow\ell$), soit $n>\nu$ un naturel tel que $\|{}^{\nu}a_n\|<\varepsilon$ (légitime car 0 est valeur d'adhérence de la suite ${}^{\nu}a$) : on a alors les comparaisons

$$n>\nu>N \text{ et } |\ell_n|\leq|\ell_n-{}^{\nu}a_n|+|{}^{\nu}a_n|<\|{}^{\nu}a-\ell\|_\infty+\varepsilon<2\varepsilon, \text{ ce qui conclut.}$$

2. Notons L et $\mathcal{L}$ resp. les normes considérées[77]. Montrons alors que la suite $(t \mapsto t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour $\mathcal{L}$ mais pas bornée pour L, d'où résultera la non-équivalence de ces normes.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a alors pour chaque $a \in \,]0,1]$ les majorations $\left|\frac{a^n}{a}\right| = a^n \leq 1$, d'où la majoration $\mathcal{L}(t \mapsto t^n) \leq 1$. Soit par ailleurs $a \in [0,1[$: la fonction $t \mapsto t^n$ étant alors de classe C^1 sur $[a,1]$, le taux d'accroissement $\frac{a^n-1}{a-1}$ est de la forme $\frac{\partial(\lambda^n)}{\partial\lambda} = n\lambda^{n-1}$ pour un certain réel $\lambda \in \,]a,1[$, d'où les minorations et tendance $L(t \mapsto t^n) \geq \left|\frac{a^n-1}{a-1}\right| = n\lambda^{n-1} \geq na^{n-1} \underset{a\longrightarrow 1}{\longrightarrow} n$. Il en résulte la minoration $L\left(t \mapsto \frac{t^{n^2}}{n}\right) \geq n$, d'où le caractère non borné annoncé et la conclusion.

Remarque – Pour chaque segment réel infini S, chaque $s \in S$ induit une norme $f \mapsto |f(s)| + \sup_{a\neq b}^{a,b\in S}\left|\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\right|$ sur l'espace des applications réelles lipschitziennes sur S qui étend (*via* les accroissements finis) la norme $f \mapsto |f(s)| + \|f'\|_\infty$ connue de $C^1(S,\mathbb{R})$. On peut également la voir comme un analogue continu de la norme "discrète" $a \mapsto |a_0| + \max_{n\in\mathbb{N}}|a_{n+1} - a_n|$ définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{K})$ en voyant chaque différence $a_{n+1} - a_n$ comme un "taux d'accroissement discret" $\frac{a_{n+1}-a_n}{(n+1)-(n)}$.

3.

(a) $\boxed{\Longleftarrow}$ Immédiat d'après le cours vu les tendances $o(1)\,O(1) \longrightarrow 0$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $a \in E^{\mathbb{N}}$ tendant vers 0. La suite réelle $n \mapsto \|a_n\|$ tend alors vers 0 et la suite $n \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } a_n = 0 \\ \frac{a_n}{\|a_n\|} \text{ sinon} \end{cases}$ est bornée car prend ses valeurs dans la boule unité fermée (plus précisément dans la réunion du singleton $\{0\}$ et de la sphère unité). Le produit de ces deux suites vaut par ailleurs a vu à $n \in \mathbb{N}$ fixé les égalités

$$\|a_n\| \cdot \begin{cases} 0 \text{ si } a_n = 0 \\ \frac{a_n}{\|a_n\|} \text{ sinon} \end{cases} = \begin{cases} \|a_n\|\, 0 \text{ si } a_n = 0 \\ \|a_n\| \frac{a_n}{\|a_n\|} \text{ sinon} \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ si } a_n = 0 \\ a_n \text{ sinon} \end{cases} = a_n.$$

(b) Notons $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\to 0}$ l'ensemble des suites réelles tendant vers 0.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soient $a \in A^{\mathbb{N}}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\to 0}$. Puisque A est bornée, la suite a est bornée, donc le produit εa tend vers 0, *a fortiori* converge.

$\boxed{\Longleftarrow}$ (Par contraposée.) Supposons A non bornée et soit $a \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\|a_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Quitter à se placer au-delà d'un certain rang, on peut toujours imposer que a ne s'annule pas. La suite $\varepsilon := \left(n \mapsto \frac{1}{\sqrt{\|a_n\|}}\right)$ fait alors sens et tend vers 0, cependant que la suite εa n'est pas bornée (*a fortiori* diverge) vu à $n \in \mathbb{N}$ fixé les égalités et tendance

$$\|\varepsilon_n a_n\| = |\varepsilon_n|\,\|a_n\| = \frac{1}{\sqrt{\|a_n\|}}\|a_n\| = \sqrt{\|a_n\|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

(c) $\boxed{i \Longrightarrow ii}$ Chaque application est bornée ssi son image est une partie bornée : l'énoncé de droite étant invariant par échange de $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$, il en est de même pour celui de gauche.

[77] L et $\mathcal{L}$ comme « Lipschitz ».

Cette dernière affirmation est à reprendre dans tous les points suivants. Soit a une suite vectorielle à valeurs dans E.

$\boxed{ii \Longrightarrow iii}$ La suite a est bornée ssi l'application $n \mapsto a_n$ est bornée.

$\boxed{iii \Longrightarrow iv}$ D'après la question 3a, la suite a tend vers 0 ssi $\begin{matrix} \exists b \in E^{\mathbb{N}} \\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\to 0} \end{matrix}, \begin{cases} b \text{ bornée} \\ a = \varepsilon b \end{cases}$.

$\boxed{iv \Longrightarrow v}$ Chaque tendance $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ équivaut à la tendance vers 0 de la suite $a - \ell$.

$\boxed{v \Longrightarrow vi}$ La suite a converge ssi $\exists \ell \in E,\ a \longrightarrow \ell$.

$\boxed{vi \Longrightarrow i}$ D'après la question 3b, la partie A est bornée ssi $\begin{matrix} \forall a \in A^{\mathbb{N}} \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\to 0} \end{matrix}, \varepsilon a$ converge.

Remarque – **Culture hors programme**. Les énoncés équivalents ci-dessus reviennent en fait chacun à l'équivalence des normes $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$. En particulier, ces dernières ne sont pas équivalentes ssi il y a une suite bornée pour l'une et pas pour l'autre.

—

3.2 Points adhérents, adhérence, parties denses

De même que l'engendré "linéaire" d'une partie d'un e. v. est un s.-e. v. obtenu en rajoutant tout ce qu'on peut faire de linéaire avec (à savoir des combinaisons linéaires), on va construire un engendré "topologique" en rajoutant tout ce qui pourrait manquer à A d'un point de vue "topologique" : ses limites[78].

Définition (points adhérents, adhérence)

*On appelle **point adhérent**[79] de A la limite de toute suite à valeurs dans A convergente.*

*On appelle **adhérence** de A l'ensemble des points lui adhérant. Cette adhérence est notée*

$$\overline{A} := \left\{\ell \in E \ ;\ \exists a \in A^{\mathbb{N}},\ a \longrightarrow \ell\right\} =: \operatorname{Adh} A.$$

Exemples :

1. Quand $E = \mathbb{R}$, on a pour chaque intervalle réel I infini borné l'égalité

$$\overline{I} = [\inf I, \sup I]\,.$$

2. Soit F un espace vectoriel normé, soit $B \subset F$ et montrons l'égalité[80]

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}.$$

Soit $(\alpha, \beta) \in \overline{A} \times \overline{B}$, soit $a \in A^{\mathbb{N}}$ tendant vers α (permis car $\alpha \in \overline{A}$) et soit de même $b \in B^{\mathbb{N}}$ tendant vers β. La suite $((a_n, b_n))$ prend alors ses valeurs

[78] Il s'agit là d'une description *interne* de l'engendré (linéaire comme topologique).
[79] On parle aussi de point ***adhérant à*** A, au sens d'un point *qui adhère à* A.
[80] En d'autres termes, *l'adhérence respecte le produit cartésien fini.*

dans $A \times B$ et tend vers $(\lim a, \lim b) = (\alpha, \beta)$, d'où l'appartenance $(\alpha, \beta) \in \overline{A \times B}$.

Soit $\ell \in \overline{A \times B}$, soit $c \in (A \times B)^{\mathbb{N}}$ tendant vers ℓ et notons $\ell =: (e, f)$. Les suites "abscisse de c" et "ordonnée de c" prennent alors leurs valeurs dans A et B resp. et tendent vers les abcisse et ordonnée de ℓ resp., d'où les appartenances $e \in \overline{A}$ et $f \in \overline{B}$, *i. e.* $\ell \in \overline{A} \times \overline{B}$.

3. Soit S un segment réel infini, imposons $E = C(S, \mathbb{R})$ muni de la norme d'indice 1 et A formée des applications strictement positives de E. Montrons que l'adhérence $\overline{A}$ pour la norme de la convergence en moyenne est formée des applications positives.

   Soient $a \in A^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$ tels que $a \longrightarrow \ell$ et supposons par l'absurde que ℓ ne reste pas positive. Par continuité de ℓ, il y a alors un réel $r > 0$ et un segment $\Sigma \subset S$ infini sur lequel $\ell < -r$. On a alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$ les minorations

   FIG
$$\int_S |a_n - \ell| \overset{\Sigma \subset S}{\geq} \int_\Sigma |a_n - \ell| \geq \int_\Sigma \underbrace{a_n - \ell}_{\geq 0 - (-r)} \geq \int_\Sigma r = r \underbrace{\text{longueur de } \Sigma}_{>0 \text{ car } \Sigma \text{ est infini}} > 0,$$

   ce qui contredit la tendance $\|a_n - \ell\|_1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Réciproquement, chaque application $f \in E$ positive est limite de la suite $\left(f + \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vu à $n \in \mathbb{N}^*$ fixé les égalité et tendance
$$\left\| f - \left(f + \frac{1}{n} \right) \right\|_1 = \frac{\|1\|_1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

4. Imposons $E = \mathbb{R}^2$ et A formée du graphe de l'application $f := \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sin \frac{1}{t} \end{array} \right.$ .. Montrons alors que son adhérence vaut $A \amalg S$ où S dénote le segment "vertical" $\left[\binom{0}{-1}, \binom{0}{1} \right]$.

   FIG

   Soient $a \in A^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$ tels que $a \longrightarrow \ell$. On a alors les tendances "coordonnées" $\left\{ \begin{array}{l} x_{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_\ell \\ y_{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y_\ell \end{array} \right.$. Si x_ℓ est nul, l'inclusion $A \subset \mathbb{R} \times [-1, 1]$ livre alors les majorations $\forall n \in \mathbb{N},\ |y_{a_n}| \leq 1$, d'où celle $|y_\ell| \leq 1$ et l'appartenance $\ell \in S$. Si $x_\ell \neq 0$, la continuité de f en x_ℓ livre alors la tendance $f(x_{a_n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x_\ell)$, d'où les égalités $y_\ell = \lim_{n\to\infty} y_{a_n} = \lim_{n\to\infty} f(x_{a_n}) = f(x_\ell)$ et l'appartenance $\ell \in A$.

   Nous venons d'établir l'inclusion $\overline{A} \subset A \amalg S$: vu par ailleurs l'inclusion[81] $A \subset \overline{A}$, il nous suffit pour conclure de montrer celle $S \subset \overline{A}$. Soit donc $s \in S$, soit $t \in [-1, 1]$ tel que $s = \binom{0}{t}$ et notons $\theta := \arcsin t$: la suite $\left(\frac{1}{\theta + 2n\pi}, \sin \theta \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ prend alors ses valeurs dans le graphe A de f et tend vers $(0, t) = s$, ce qui conclut.

[81] Chaque $a \in A$ est la limite de la suite constante valant partout a.

Remarques

- Bien observer à $\ell \in E$ fixé les équivalences des énoncés suivants :

1. ℓ adhère à A ;
2. $\ell \in \overline{A}$;
3. $\exists a \in A^{\mathbb{N}},\ a \longrightarrow \ell$;
4. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ \|a - \ell\| < \varepsilon$;
5. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists a \in A,\ \|a - \ell\| < \frac{1}{n}$;
6. $\inf_{a \in A} \|a - \ell\| = 0$.

Les trois premiers points sont équivalents par définition, le troisième se réécrit $\exists a \in A^{\mathbb{N}},\ \|a_n - \alpha\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et équivaut aux trois derniers d'après le cours de première année.

- **Adhérence & distance**. La borne inférieure $\inf_{a \in A} \|a - \ell\|$ s'appelle la ***distance*** de ℓ à A et est noté $d(\ell, A)$. Avec ce vocabulaire, on pourrait affirmer[82] :

chaque point adhère à A ssi sa distance à A est nulle.

- **Adhérence et équivalence de normes**. La "relation" de tendance étant invariante par passage à une norme équivalente, le prédicat $\exists a \in A^{\mathbb{N}},\ a \longrightarrow \ell$ (à savoir « adhérer à A ») l'est également, donc l'ensemble $\overline{A}$ des $\ell \in E$ le satisfaisant aussi. Par conséquent,

l'application $\mathrm{Adh} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{P}(E) & \longrightarrow & \mathfrak{P}(E) \\ P & \longmapsto & \overline{P} \end{array} \right.$ *est inchangée par passage à une norme équivalente.*

Définition (parties denses) Soit $D \subset E$.

*La partie D est dite **dense dans** A si $\overline{D} \supset A$,* i. e. *si chaque point de A est limite d'une suite*[83] *à valeurs dans D.*
*La partie D est dite **dense** (tout court) si D est dense dans E,* i. e. *si $\overline{D} = E$.*

Exemples

1. Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$ (établi en première année).
2. La partie A est dense dans $\overline{A}$ (tautologique).
3. Montrons que *les vecteurs de E de norme rationnelle*[84] *forment une partie dense.*

   Soit $a \in E$. Si a est nul, alors a est limite de la suite constante égale à a dont chaque terme a une norme rationnelle, ce qui conclut.

   FIG

   Imposons donc $a \neq 0$ et soit $r \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ tendant vers $\|a\|$ (légitime par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$). La suite $\left(r_n \frac{a}{\|a\|}\right)$ tend alors vers $\|a\| \frac{a}{\|a\|} = a$ et chacun de ses termes a une norme rationnelle (à savoir : un r_n), ce qui conclut.

[82] En d'autres termes, on a l'équivalence $\ell \in \overline{A} \Longleftrightarrow d(\ell, A) = 0$.

[83] On dit aussi parfois qu'une telle suite *approche* le point considéré et que les points de A sont *approchables* par des éléments de D.

[84] Le résultat est inchangé (si $E \neq \{0\}$) en remplaçant $\mathbb{Q}$ par n'importe quelle partie dense de $\mathbb{R}$, par exemple $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

4. Montrons que *les matrices inversibles forment une partie dense* (pour la norme uniforme).

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $a \in M_n(\mathbb{K})$. L'application $t \mapsto \det(a + tI_n)$ est alors polynomiale non nulle (son terme dominant vaut t^n), donc ne s'annule qu'un nombre fini de fois. Il y a donc un naturel $N > 0$ tel que, sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{N}; \frac{1}{N}\right]$, cette application ne s'annule pas (sauf peut-être en 0). La suite $p \mapsto a + \frac{1}{N+p} I_n$ prend alors ses valeurs dans $GL_n(\mathbb{K})$ (chacun de ses termes a un déterminant non nul) et tend uniformément vers a, d'où l'appartenance[85] $a \in \overline{GL_n(\mathbb{K})}$.

5. Dans l'espace $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, montrons que *l'adhérence de l'ensemble* $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ *des suites stationnant à* 0 *est formée des suites tendant vers* 0*.*

   Tout d'abord, vu que chaque suite de $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ tend vers 0 et que le caractère "tendre vers 0" passe à la limite uniforme (*cf.* un exemple 4 section 3.1), chaque point adhérant à $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ tend vers 0. Soit réciproquement $\ell \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tendant vers 0 : on a alors pour chaque naturel N les égalités et tendance

$$\|(\ell_0, \ell_1, ..., \ell_N, 0, 0...) - \ell\| = \|(0, 0, ..., 0, \ell_{N+1}, \ell_{N+2}, ...)\|_\infty = \sup_{n>N}^{n\in\mathbb{N}} |\ell_n| \underset{N\to\infty}{\overset{\text{car } \ell\longrightarrow 0}{\longrightarrow}} 0,$$

   ce qui montre que ℓ adhère à $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, d'où la conclusion.

6. Soit S un segment réel infini, imposons $E = C(S, \mathbb{R})$, soit $s \in \mathring{S}$ et imposons A formée des applications de E nulles en s. Vu pour chaque $f \in A$ la minoration $\|f - 1\|_\infty \geq |f(s) - 1| = 1$, aucune suite $a \in A^{\mathbb{N}}$ ne peut vérifier $\|a_n - 1\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui montre que A n'est pas dense pour la norme uniforme.

   Montrons toutefois qu'elle l'est pour la norme de convergence en moyenne. Soit $f \in E$, abrégeons $M := \|f\|_\infty$, soit $\varepsilon > 0$, soit[86] $\Sigma \subset S$ un segment de longueur $\frac{\varepsilon}{2M}$ centré en s et notons a l'application de A qui est affine par deux morceaux sur $\mathring{\Sigma}$ et qui coïncide avec f ailleurs.

   FIG

   Puisque $\max_\Sigma |a|$ est atteint en l'une des bornes de Σ où elle coïncide avec f, on peut majorer $|a| \leq M$ sur Σ et l'on conclut grâce aux majorations

$$\|f - a\|_1 = \int_S |f - a| \underset{\text{hors de } \mathring{\Sigma}}{\overset{f=a}{\equiv}} \int_\Sigma \underbrace{|f - a|}_{\leq |f|+|a|} \leq \int_S (M + M) = \ell(S)\ 2M = \varepsilon.$$

7. Nous verrons au chapitre ??? que, pour chaque segment S réel, les applications $S \longrightarrow \mathbb{K}$ en escalier forment une partie dense de l'espace des applications $S \longrightarrow \mathbb{K}$ continues par morceaux normé par la norme uniforme.

8. Nous verrons au chapitre ??? que la partie $\mathbb{K}[X]$ est dense dans l'espace[87] $C([0,1], \mathbb{K})$ normé par la norme uniforme.

---

[85] Démonstration valide en remplaçant $\mathbb{K}$ par n'importe lequel de ses sous-corps.

[86] On peut évoquer un tel Σ d'après l'hypothèse $s \in \mathring{S}$.

[87] Chaque polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est identifié à son application polynomiale associée dans $C([0,1], \mathbb{K})$.

Remarque – **Densité et équivalence de normes**. Le prédicat "être dense dans A" se réécrivant "avoir une adhérence incluant A", il est invariant par passage à une norme équivalente car l'application Adh l'est. On retiendra en particulier que

le caractère dense est inchangé par passage à une norme équivalente.

Exercices d'application

1. *Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer alors que $M_N(\mathbb{Q})$ est dense dans $M_N(\mathbb{R})$.*
2.
   (a) *Montrer l'égalité $\operatorname{Vect}\overline{A} \subset \overline{\operatorname{Vect} A}$. En déduire que l'adhérence de chaque sous-espace vectoriel de E en est un sous-espace vectoriel.*

   (b) *Montrer l'égalité[88] $\operatorname{Conv}\overline{A} \subset \overline{\operatorname{Conv} A}$. En déduire que l'adhérence de chaque convexe de E est convexe.*
3. *Dans l'espace $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, montrons que les suites strictement croissantes forment une partie dense dans l'ensemble des suites croissantes.*
4. *(plus difficile) Soit $a \in E^{\mathbb{N}}$ une suite dont on note $T := \{a_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ l'ensemble des termes. Montrer alors l'égalité*

$$\operatorname{Adh} T = T \cup \{\textit{valeurs d'adhérence de la suite } a\}.$$

   (Étant donné un $\ell \in \overline{T}$, mettons $\ell = \lim t$, on distinguera deux cas selon que t atteint ou non une même valeur en une infinité d'entiers.)

---

1. Soit $a \in M_N(\mathbb{R})$. La densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ fournit pour chaque couple $c \in [1, N|]^2$ une suite rationnelle tendant vers a_c, d'où une suite $q \in M_N(\mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall c \in [1, N|]^2$, $q_c \longrightarrow a_c$, *i. e.* telle que $q \longrightarrow a$.
2. Soient $\ell, \ell' \in \overline{A}$ et soient $a, a' \in A^{\mathbb{N}}$ tendant vers ℓ et ℓ' resp.

   (a) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. La suite $\lambda a + a'$ prend alors ses valeurs dans $\operatorname{Vect} A$ et tend vers $\lambda \lim a + \lim a' = \lambda a + a'$, d'où l'appartenance $\lambda a + a' \in \overline{\operatorname{Vect} A}$, ce qui prouve l'inclusion $\operatorname{Vect}\overline{A} \subset \overline{\operatorname{Vect} A}$. Lorsque A est un sous-espace vectoriel de E, cette inclusion s'écrit $\operatorname{Vect}\overline{A} \subset \overline{A}$ et montre que $\overline{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.

   (b) Soient à présent $\lambda, \mu \in [0, 1]$ de somme 1. La suite $\lambda a + \mu a'$ prend alors ses valeurs dans $\lambda A + \mu A \subset \operatorname{Conv} A$ et tend vers $\lambda \lim a + \mu \lim a' = \lambda a + \mu a'$, d'où l'appartenance $\lambda a + \mu a' \in \overline{\operatorname{Conv} A}$, ce qui prouve l'inclusion $\operatorname{Conv}\overline{A} \subset \overline{\operatorname{Conv} A}$. Lorsque A est convexe, cette inclusion s'écrit $\operatorname{Conv}\overline{A} \subset \overline{A}$ et montre que $\overline{A}$ est convexe.

   Remarque – En d'autres termes, nous avons montré que l'application Adh stabilise l'ensemble des sous-espaces vectoriels (resp. des convexes) de E.

[88] Pour chaque partie $P \subset E$, l'enveloppe convexe $\operatorname{Conv} P$ est formée des barycentres de points de P à coefficients positifs.

3. Notons V l'espace vectoriel normé considéré, soit $\nu \in V$ croissante, notons t la suite $(\operatorname{th} n)_{n\in\mathbb{N}}$ et a la suite$\left(\nu + \frac{t}{N+1}\right)_{N\in\mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$. On a alors d'une part pour chaque $N \in \mathbb{N}$ les majorations

$$\left\|{}^N a - \nu\right\| = \left\|\left(\nu + \frac{t}{N+1} - \nu\right)\right\| = \frac{\|t\|}{N+1} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \text{ d'où la tendance } a \longrightarrow v,$$

d'autre part pour chaques naturels $N, n \in \mathbb{N}$ les minorations

$$\begin{aligned} {}^N a_{n+1} - {}^N a_n &= \left(\nu_{n+1} + \frac{t_{n+1}}{N+1}\right) - \left(\nu_n + \frac{t_n}{N+1}\right) \\ &= \underbrace{(\nu_{n+1} - \nu_n)}_{\geq 0 \text{ car } \nu \text{ croît}} + \underbrace{\frac{\operatorname{th}(n+1) - \operatorname{th} n}{N+1}}_{>0 \text{ car th croît strictement}} > 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que chaque terme de a croît strictement. Finalement, la suite croissante v est bien limite uniforme de suites strictement croissantes.

Remarque – La suite t ne joue ici aucun autre rôle que celui d'une suite bornée strictement croissante.

4. On a déjà l'inclusion $T \subset \overline{T}$. Soit par ailleurs ℓ une valeur d'adhérence de la suite a : il y a alors une extractrice x telle que $a_{x(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$, ce qui montre que ℓ est limite de la suite $n \mapsto a_{x(n)}$ à valeurs dans T, donc adhère à T.

Soit réciproquement $\ell \in \overline{T}$ et soit $t \in T^{\mathbb{N}}$ telle que $t \longrightarrow \ell$. L'hypothèse $t \in T^{\mathbb{N}}$ s'écrivant $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists N \in \mathbb{N},\ t_n = a_N$,

$$\text{la suite } n \overset{\mu}{\mapsto} \min\{N \in \mathbb{N}\ ;\ t_n = a_N\} \text{ fait sens et vérifie } \forall n \in \mathbb{N},\ t_n = a_{\mu(n)}.$$

Si la suite t prend une même valeur (alors dans T) en une infinité d'entiers, extraire suivant cette infinité d'entiers livrera une suite d'une part valant constamment un même point de T, d'autre part tendant vers ℓ en tant que suite extraite de t, d'où l'appartenance $\ell \in T$. Nous pouvons donc imposer pour chaque $N \in \mathbb{N}$ la finitude de $\{n \in \mathbb{N}\ ;\ \mu_n = N\}$ (la suite t atteindrait sinon a_N une infinité de fois). Un exercice de première année permet alors d'extraire de la suite μ une sous-suite strictement croissante, mettons $\mu \circ x$ pour une certaine extractrice x. Cette suite tend alors vers ∞, d'où la tendance $t_{x(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lim t$, laquelle se réécrit $a_{\mu(x(n))} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$, ce qui montre (sachant en outre que la suite $\mu \circ x$ est une extractrice) que ℓ est une valeur d'adhérence de a, *c. q. f. d.*

3.3 Fermés

Définition (fermés)

Soit F une partie de E. Elle est dite ***fermée*** *si elle contient chaque point lui adhérant,* i. e. *si*

$$\begin{matrix}\forall f \in F^{\mathbb{N}} \\ \forall \ell \in E\end{matrix}\ ,\ f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \Longrightarrow \ell \in F.$$

Remarques

• En termes plus abrégés, un fermé est une partie *stable par passage à la limite*. Intuitivement, une suite convergente à valeurs dans un fermé y reste "enfermée" – même à la limite –, d'où la terminologie.

• Comme pour les groupes et les espaces vectoriels engendrés, la question « *la partie A est-elle fermée ?* » cache une question plus fine, à savoir « *quelle est son adhérence ?* ».

• La définition ci-dessus caractérisant les fermés en termes de *suites*, on l'appelle aussi la ***caractérisation séquentielle des fermés***. Nous en verrons l'équivalence avec la caractérisation *topologique* des fermés en termes d'ouverts.

• Le caractère fermé est parfois appelé *fermeture* ; ce dernier terme désignant plutôt l'*acte* de fermer ou le *résultat* de cet acte, nous déconseillons son utilisation.

Exemples

1. Pour chaque $a \in E$, chaque suite convergente à valeurs dans $\{a\}$ est constante valant a, donc tend vers a, donc sa limite reste dans $\{a\}$. Il en résulte que

   chaque singleton est fermé.

2. Soient $m \leq M$ deux réels et soit $a \in [m, M]^{\mathbb{N}}$ convergente. Appliquer lim à l'encadrement $m \leq a \leq M$ livre alors l'appartenance $\lim a \in [m, M]$, ce qui montre que

   chaque segment de $\mathbb{R}$ est fermé.

3. Nous verrons plus généralement que

   chaque boule fermée est fermée.

4. Chaque suite réelle convergente à valeurs entières étant stationnaire, chaque réel adhérant à la partie $\mathbb{Z}$ est entier. En d'autres termes :

   $\mathbb{Z}$ est fermé (dans $\mathbb{R}$).

5. Soient $c \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$, soient $a \in \mathcal{S}(c, r)^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$ tels que $a \longrightarrow \ell$. On a alors les majorations (pour chaque naturel n) et la tendance

   $$|r - \|\ell - c\|| = |\|a_n - c\| - \|\ell - c\|| \leq \|(a_n - c) - (\ell - c)\| = \|a_n - \ell\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

   d'où l'égalité $r = \|\ell - c\|$ et l'appartenance $\ell \in \mathcal{S}(c, r)$. Par conséquent :

   chaque sphère est fermée.

6. Pour chaque point $a \in E$ et pour chaque réel $r > 0$, en évoquant[89] un point $s \in \mathcal{S}(a, r)$, la suite $\left(s + \frac{1}{n}\overrightarrow{sa}\right)$ prend alors ses valeurs dans la boule ouverte $\mathring{\mathcal{B}}(a, r)$ et tend vers s qui n'appartient pas à cette boule ouverte, ce qui montre qu'

   aucune boule ouverte n'est fermée (sauf si E est nul).

FIG

[89] On peut évoquer un tel s si E est non nul : dans le cas contraire, l'espace E est fermé et vaut son unique boule ouverte.

7. Imposons A fermé, soit F un espace vectoriel normé et soit B un fermé de F. Le produit $A \times B$ a alors pour adhérence $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B} = A \times B$, donc est fermé dans $E \times F$. On retiendra plus généralement que

   chaque produit (cartésien fini) de fermés est fermé.

   Nous verrons cependant à l'exercice 2 que la réciproque est fausse[90] dès que E est non nul.
8. Imposons $E = \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Nous avons vu lors de précédents exemples et exercices que : d'une part forment des fermés de E les suites tendant vers 0 (resp. convergentes, resp. dont 0 est une valeur d'adhérence), d'autre part ne formaient pas un fermé de E les suites croissant strictement (resp. stationnant à 0).

Propriété (invariance du caractère fermé par équivalence de normes)

Chaque partie de E est fermée ssi[91] *elle est fermée pour chaque norme équivalente à celle de E.*

Démonstration : la partie A est fermée ssi $A = \overline{A}$, égalité inchangée par passage à une norme équivalente puisque l'adhérence $\overline{A}$ l'est.

Propriétés (axiomes des fermés)

Les fermés de E forment un ensemble :

1. *contenant la partie vide $\emptyset$ et la partie pleine E ;*
2. *stable par intersection*[92] *(quelconque) ;*
3. *stable par union finie*[93].

Démonstration

1. À $\ell \in E$ fixé, l'implication $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \Longrightarrow \ell \in E$ est tautologique (son conséquent est vérifié), donc la partie E est fermée. Par ailleurs, la puissance $\emptyset^{\mathbb{N}}$ étant vide, le caractère fermé du vide s'énonce sous la forme d'une quantification universelle sur $\emptyset$, laquelle est tautologique.
2. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de E. Soient $f \in \left(\bigcap_{i\in I} F_i\right)^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$ tels que $f \longrightarrow \ell$. Pour chaque $i \in I$, la suite f prend alors ses valeurs dans F_i et tend vers ℓ, d'où (puisque F_i est fermé) l'appartenance $\ell \in F_i$, *c. q. f. d.*
3. Une récurrence immédiate permet de se restreindre au cas de *deux* fermés. Soient donc F et G deux fermés de E. Soient $a \in (F \cup G)^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$ tels que $a \longrightarrow \ell$. L'un des ensembles $\{n \in \mathbb{N} \; ; \; a_n \in F\}$ ou $\{n \in \mathbb{N} \; ; \; a_n \in G\}$ est alors infini (car leur réunion vaut $\mathbb{N}$ qui est infini) : mettons que ce soit le premier. On peut alors extraire de (a_n) une sous-suite $\left(a_{x(n)}\right)$ à valeurs dans F : puisque $a \longrightarrow \ell$, cette sous-suite tend aussi vers ℓ et le caractère fermé de F montre que ce dernier contient $\lim a_{x(n)} = \ell$, ce qui conclut.

[90] Les fermés "produit" ne sont pas les produits de fermés !

[91] Autrement dit : *le caractère fermé est inchangé par passage à une norme équivalente.*

[92] *Sanity check* : l'intersection vide dans $\mathsf{P}(E)$ est la partie pleine E, laquelle est bien fermée d'après le point 1.

[93] *Sanity check* : l'union vide est la partie vide $\emptyset$, laquelle est fermée d'après le point 1.

Remarques

- En considérant les réunions finies de singletons, le point 3 montre que

chaque ensemble fini est fermé.

- Le point 3 tombe en défaut pour une réunion *in*finie, même dénombrable : la réunion infinie des segments $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ (chacun fermé) lorsque n décrit $\mathbb{N}^*$ vaut $]0,1]$ qui n'est pas fermé car $0 = \lim \frac{1}{n} \notin]0,1]$. Plus généralement, la réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \overline{\mathcal{B}}\left(0, 1-\frac{1}{n}\right) = \mathring{\mathcal{B}}(0,1)$ n'est jamais ouverte (sauf si E est nul).
- **Fermés et valeurs d'adhérences**. Soient $a \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$. Vu les équivalences

$$\begin{aligned} \ell \text{ est valeur d'adhérence de } a &\iff \forall \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists N \in [n, \infty|[,\ d(a_n, \ell) < \varepsilon \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ \forall \varepsilon > 0,\ a([n,\infty|[) \cap \mathring{\mathcal{B}}(\ell, \varepsilon) \neq \emptyset \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ \ell \in \overline{a([n,\infty|[)} \iff \ell \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{a([n,\infty|[)}, \end{aligned}$$

l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite a est une intersection d'adhérences, donc est fermé par le point 2. Ainsi,

les valeurs d'adhérence de chaque suite forment un fermé.

- **Culture hors programme**. La stabilité par union finie et intersection quelconque peut être prise comme un *axiome définissant* les fermés d'un espace topologique. Par exemple, lorsque I décrit les idéaux de l'anneau $\mathbb{R}[X,Y]$, les parties $\left\{a \in \mathbb{R}^2 ;\ \forall P \in I,\ P(a) = 0\right\}$ de $\mathbb{R}^2$ vérifient ces axiomes et définissent une topologie sur $\mathbb{R}^2$ (attribuée à Oscar Zariski et très hors programme[94]) qui diffère à beaucoup d'égards de celle de l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}^2$.

Propriétés (fermés et adhérences)

1. *L'adhérence $\overline{A}$ est le plus petit fermé de E incluant A.*
2. *On a l'égalité*[95] $\operatorname{Adh} A = \bigcap_{F\supset A}^{F \text{ fermé}} F$.
3. *Pour chaque partie B de E, on a l'implication $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.*
4. *On a les inclusions $A \subset \overline{A} = \overline{\overline{A}}$ avec égalité $A = \overline{A}$ ssi A est fermé*[96].

Démonstration

1. Tout d'abord, l'adhérence $\overline{A}$ contient la limite de chaque suite constante, donc inclut tout A.

   Montrons ensuite que $\overline{A}$ est fermé. Soient $\ell \in \overline{A}^{\mathbb{N}}$ et $L \in E$ tels que $\ell \longrightarrow L$.

FIG

[94] La lectrice et le lecteur intéressés par les liens entre topologie et algèbre pourront dans un premier temps enquêter sur le *Nullstellensatz* de David Hilbert – et doivent être avertis qu'ils touchent là à la difficile et fascinante géométrie algébrique que révolutionna feu Alexandre Grothendieck.

[95] Il s'agit là d'une description *externe* de l'adhérence.

[96] En termes concis, les points 3 et 4 disent que l'application Adh est idempotente, croissante, supérieure à l'identité et fixe exactement les fermés.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, l'appartenance $\ell_n \in \overline{A}$ livre un point $a \in A$ tel que $\|\ell_n - a\| < \frac{1}{n}$. On en déduit une suite $a \in A^{\mathbb{N}^*}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|a_n - \ell_n\| < \frac{1}{n}$, d'où à $n \in \mathbb{N}^*$ fixé les majoration et tendance

$$\|a_n - L\| \leq \underbrace{\|a_n - \ell_n\|}_{< \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{\|\ell_n - L\|}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui montre que L est limite d'une suite de $A^{\mathbb{N}^*}$, *a fortiori*[97] d'une suite de $A^{\mathbb{N}}$, donc est adhérent à A, *c. q. f. d.*

Soit enfin F un fermé incluant A. Soit $\ell \in \overline{A}$ et soit $a \in A^{\mathbb{N}}$ tels que $a \longrightarrow \ell$. Alors la suite a est à valeurs dans F, donc sa limite ℓ reste dans F, *c. q. f. d.*

Remarque – Le passage de $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists a \in A,\ \|\ell_n - a\| < \frac{1}{n}$ à $\exists a \in A^{\mathbb{N}^*},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|\ell_n - a_n\| < \frac{1}{n}$ est légitimé par l'axiome du choix.

2. Les propriétés « être fermé » et « inclure A » passant à l'intersection, l'intersection des fermés incluant A d'une part est un fermé incluant A, d'autre part est incluse dans chacun de ces fermés, donc vaut $\operatorname{Adh} A$ d'après le point (1).

3. Soit $B \subset E$ tel que $A \subset B$. L'adhérence $\overline{B}$ est alors un fermé incluant B, *a fortiori* incluant A, donc inclut le plus petit tel fermé $\overline{A}$.

4. L'adhérence $\overline{A}$ inclut A d'après le point 1. Si on a l'égalité $A = \overline{A}$, le membre de droite est alors fermé (par le point 1), donc le membre de gauche A aussi. Réciproquement, si A est fermé, alors A est le plus petit fermé incluant A, d'où (par le point 1) l'égalité $\overline{A} = A$; en particulier, vu que $\overline{A}$ est fermé, on a sans hypothèse sur A l'égalité $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$.

Remarques

- On retrouve les mêmes propriétés que pour les engendrés dans les espaces vectoriels ou dans les groupes (ou dans les convexes) : dualité entre descriptions externe (implicite) et interne (explicite), égalité ssi la partie possède déjà la structure considérée, minoration par l'identité, croissance, involutivité.
- Le point 4 livre en particulier les adhérences des fermés plein et vide :

$$\overline{E} = E \qquad \text{et} \qquad \overline{\emptyset} = \emptyset.$$

- Ce même point montre par ailleurs que

les fermés de E sont les adhérences des parties de E.

Exemples

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous avons déjà vu les densités de $GL_n(\mathbb{Q})$ dans $M_n(\mathbb{Q})$ et de $M_n(\mathbb{Q})$ dans $M_n(\mathbb{R})$. En termes d'adhérences, nous en déduisons avec le point 3 ci-dessus les inclusions

$$\overline{GL_n(\mathbb{Q})} = \overline{\overline{GL_n(\mathbb{Q})}} \supset \overline{M_n(\mathbb{Q})} \supset M_n(\mathbb{R}),$$

d'où la densité de $GL_n(\mathbb{Q})$ dans $M_n(\mathbb{R})$. On retiendra plus généralement

la transitivité de la relation "être dense dans".

[97] Pour avoir une suite dans $A^{\mathbb{N}}$ (et non $A^{\mathbb{N}^*}$), on peut ou bien prolonger $a_0 := \ell$ ou bien remplacer partout $\frac{1}{n}$ par $\frac{1}{2^n}$

2. Montrons que *l'adhérence de chaque boule ouverte est la boule fermée*[98] *de mêmes centre et rayon.*

FIG

Soit $c \in E$, soit $r > 0$ et notons $B := \mathring{\mathcal{B}}(c, r)$. Puisque $\overline{\mathcal{B}}(c, r)$ est fermée et inclut B, elle inclut l'adhérence $\overline{B}$ et il s'agit de montrer l'inclusion réciproque. Soit donc $a \in \overline{\mathcal{B}}(c, r)$: la suite $n \mapsto a + \frac{1}{n}\overrightarrow{ac}$ tend alors vers a et prend ses valeurs dans B vu à $n \in \mathbb{N}^*$ fixé les majorations

$$\left\| \left(a + \frac{1}{n}\overrightarrow{ac} \right) - c \right\| = \left\| \frac{1}{n}\overrightarrow{ac} - \overrightarrow{ac} \right\| = \underbrace{\left| 1 - \frac{1}{n} \right|}_{<1} \underbrace{\left\| \overrightarrow{ac} \right\|}_{\leq r} < r,$$

ce qui conclut à l'appartenance $a \in \overline{B}$.

Exercices d'application

1. *Montrer que chaque hyperplan de E est ou bien fermé ou bien dense. Donner un exemple d'hyperplan dense.*
2. *Montrer que la* ***diagonale*** $\Delta := \{(e, e)\}_{e \in E}$ *de E^2 est un fermé de E^2 qui n'est pas un produit de fermés (sauf cas pathologique à préciser).*
3. *Montrer que la somme de chaque sous-espace vectoriel de E fermé et de chaque sous-espace vectoriel de E de dimension finie reste fermée. Discuter les hypothèses.*
4.
   (a) *Soit $B \subset E$. Montrer alors l'égalité $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et l'inclusion $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Donner un exemple d'inclusion stricte.*

   (b) *(plus difficile) Montrer que A est fermée ssi on a pour chaque fermé $F \subset E$ l'égalité $\operatorname{Adh}(A \cap F) = \overline{A} \cap \overline{F}$.*

---

1. Soit H un hyperplan de E. Son adhérence est alors (d'après l'exercice 2a section 3.2) un sous-espace vectoriel compris entre H et E, donc vaut ou bien H ou bien E.

   Chaque segment réel infini S induit un exemple d'hyperplan dense : l'espace $\mathbb{R}[X]$ vu dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X] \oplus \mathbb{R}\exp$ muni de la norme uniforme de $C(S, \mathbb{R})$.

   Remarque – Quand E est de dimension finie, nous verrons que ses sous-espaces vectoriels sont chacun fermés. C'est pourquoi il fallait chercher un exemple non fermé hors de la dimension finie.

[98] Les égalités $\overline{\mathring{\mathcal{B}}(c, r)} = \overline{\mathcal{B}}(c, r) = \overline{\overline{\mathcal{B}}(c, r)}$ motivent la notation des boules fermés $\overline{\mathcal{B}}(c, r)$.

2. Soient $\delta \in \Delta^{\mathbb{N}}$ et $\binom{a}{b} \in E^2$ tels que $\delta \to \binom{a}{b}$, notons x et y les suites respectives des abscisses et ordonnées de δ, de sorte que l'hypothèse $\delta \to \binom{a}{b}$ se réécrive $\left\{\begin{array}{l} x \longrightarrow a \\ y \longrightarrow b \end{array}\right.$. Vu pour chaque naturel n l'appartenance $\delta_n \in \Delta$, *i. e.* l'égalité $x_n = y_n$, on a l'égalité séquentielle $x = y$, d'où celle des limites $a = \lim x = \lim y = b$ et l'appartenance $\lim \delta \in \Delta$.

Soit $B \subset E$ tel que $\Delta = A \times B$ et soit $e \in E$. On a alors l'appartenance $\binom{e}{e} \in \Delta = A \times B$, *i. e.* $\left\{\begin{array}{l} e \in A \\ e \in B \end{array}\right.$, d'où les inclusions $\left\{\begin{array}{l} E \subset A \\ E \subset B \end{array}\right.$ et $E^2 \subset \Delta$. Le couple $(e, 0) \in E^2$ est donc sur la diagonale, d'où l'égalité $e = 0$ de ses coordonnées, ce qui force la nullité de E (le cas pathologique à préciser).

3. Soient F et Φ deux sous-espaces vectoriels de E resp. fermé et de dimension finie. Une récurrence immédiate permet d'imposer $\dim \Phi = 1$: soit donc $v \in E$ tel que $\Phi = \mathbb{K}v$. Soient à présent $s \in (F + \Phi)^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$ tels que $s \longrightarrow \ell$ et soient (par l'axiome du choix) $f \in F^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tels que $s = f - \lambda v$.

Supposons la suite λ bornée. On peut alors extraire $\lambda_{x(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} t$ pour un certain scalaire t et pour une certain extractrice x, d'où la tendance $f_{x(n)} = \ell + \lambda_{x(n)} v \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell + tv$. Le caractère fermé de F assure alors que cette dernière limite reste dans F, d'où l'appartenance $\ell = (\ell + tv) - tv \in F + \Phi$, *c. q. f. d.*

Supposons au contraire λ non bornée et extrayons $\left|\lambda_{x(n)}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. La suite $\left(f_{x(n)} - \lambda_{x(n)} v\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant alors bornée (car convergente), le quotient[99] $\frac{f_{x(n)}}{\lambda_{x(n)}} - v = \frac{f_{x(n)} - \lambda_{x(n)} v}{\lambda_{x(n)}}$ tend vers 0 (quand $n \to \infty$), ce qui s'écrit $\frac{f_{x(n)}}{\lambda_{x(n)}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v$. Or F est un sous-espace vectoriel de E, donc la suite $\left(\frac{1}{\lambda_{x(n)}} f_{x(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans F et le caractère fermé de F livre l'appartenance $v \in F$, *i. e.* l'inclusion $\Phi \subset F$, d'où l'égalité $F + \Phi = F$, ce qui conclut.

Si Φ n'est pas de dimension finie, imposer $F = \{0\}$ et Φ n'importe quel hyperplan dense (*cf.* exercice 1) fournit alors un contre-exemple. Si F n'est pas fermé, l'exercice d'entraînement 3 livre alors un contre-exemple.

4.

(a) Les inclusions $\left\{\begin{array}{l} A \cap B \subset A \\ A \cap B \subset B \end{array}\right.$ et la croissance de Adh livrent les inclusions $\left\{\begin{array}{l} \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \\ \overline{A \cap B} \subset \overline{B} \end{array}\right.$, *i. e.* $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Lorsque $(E, A, B) = (\mathbb{R}, \mathbb{Q}, {}^c\mathbb{Q})$, l'intersection $A \cap B$ est vide, *a fortiori* l'adhérence $\overline{A \cap B}$; cependant, les adhérences $\overline{A}$ et $\overline{B}$ valent $\mathbb{R}$ par densité des (ir)rationnels, donc ont pour intersection $\mathbb{R}$. L'inclusion $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ se réécrit donc $\emptyset \subsetneq \mathbb{R}$, laquelle est stricte. On aurait également pu imposer $\binom{A}{B} = \binom{[0,1[}{[1,2[}$ afin d'avoir l'inclusion stricte $\overline{A \cap B} = \emptyset \subsetneq \{2\} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Les inclusions $\left\{\begin{array}{l} A \subset A \cup B \\ B \subset A \cup B \end{array}\right.$ et la croissance de Adh livrent les inclusions $\left\{\begin{array}{l} \overline{A} \subset \overline{A \cup B} \\ \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \end{array}\right.$, *i. e.* $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

[99] On peut toujours imposer $\lambda_{x(n)} \neq 0$ pour chaque naturel n.

Soit réciproquement $\ell \in \overline{A \cup B}$ et soit $c \in (A \cup B)^{\mathbb{N}}$ tendant vers ℓ. L'une des parties $\{n \in \mathbb{N} \; ; \; c_n \in A\}$ ou $\{n \in \mathbb{N} \; ; \; c_n \in B\}$ est alors infinie (leur réunion valant $\mathbb{N}$ qui est infini) : si c'est la première, on peut alors extraire de c une suite à valeurs dans A, laquelle tend par ailleurs vers $\lim c = \ell$, d'où l'appartenance $\ell \in \overline{A}$; si c'est la seconde, on obtiendra de même l'appartenance $\ell \in \overline{B}$. Dans tous les cas, on peut conclure $\ell \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

Remarque – **Mnémo**. Prendre l'adhérence et réunir sont des opérations qui "vont dans le même sens" (elles "ajoutent"), on retiendra donc qu'elles sont compatibles. Le sens de l'inclusion avec $\cap$ se retrouve à l'aide des exemples d'inclusion stricte.

(b) $\boxed{\Longrightarrow}$ Pour chaque fermé $F \subset E$, l'intersection $A \cap F$ est fermée car A et F le sont, donc chacune des trois parties $A, F, A \cap F$ vaut son adhérence et l'égalité voulue s'écrit $A \cap F = A \cap F$, ce qu'on a.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soient $a \in A^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$ tels que $a \longrightarrow \ell$. Notons $F := \{\ell\}$, lequel singleton est fermé. La limite ℓ adhérant à A et tombant dans F, on a les inclusions

$$\{\ell\} \underset{\ell \in F}{\overset{\ell \in \overline{A}}{\subset}} \overline{A} \cap F \overset{F \text{ fermé}}{=} \overline{A} \cap \overline{F} \overset{\text{hypothèse}}{=} \overline{A \cap F} \underset{\text{de Adh}}{\overset{\text{croissance}}{\subset}} \overline{F} \overset{F \text{ fermé}}{=} F = \{\ell\},$$

d'où égalité partout. L'adhérence de $A \cap F$ vaut en particulier $\{\ell\}$, donc est non vide, d'où la non-vacuité de $A \cap F$, *i. e.* l'appartenance $\ell \in A$, *c. q. f. d.*

Remarque – Cette question précise un cas d'égalité général à l'inclusion $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ de la question 4a.

—

4 Intérieur, ouverts, voisinages, frontière

On garde l'espace vectoriel normé E et la partie $A \subset E$ évoqués. La norme de E est toujours notée $\mathcal{N}$ ou $e \mapsto \|e\|$.

4.1 Points intérieurs, intérieur, voisinages

Définition (points intérieurs, intérieurs)

*On appelle **point intérieur** de A le centre de toute boule ouverte*[100] *incluse dans A.*

FIG

*On appelle **intérieur** de A l'ensemble de ses points intérieurs. Cet intérieur est noté*

$$\mathring{A} := \left\{ a \in E \; ; \; \exists r > 0, \; \mathring{\mathcal{B}}(a, r) \subset A \right\} =: \operatorname{Int} A.$$

[100] *Rappel* : dans ce cours, chaque boule ouverte est non vide.

Remarque – Le centre de chaque boule ouvert appartenant à cette boule, chaque point intérieur de A appartient à A, d'où l'inclusion

$$\mathring{A} \subset A.$$

Exemples

1. Pour chaque intervalle réel I, on a quand $E = \mathbb{R}$ l'égalité[101]

$$\mathring{I} = \left]\inf I, \sup I\right[.$$

2. Les parties $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ de l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}$ sont d'intérieur vide : en effet, si $\mathbb{Q}$ incluait une boule ouverte, il inclurait un intervalle infini, lequel doit contenir un irrationnel par densité de ces derniers dans $\mathbb{R}$ (même raisonnement pour $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ en utilisant la densité des rationnels).
3. Soit $\Phi \subset E$ une partie *finie*. Le réel $r := \min_{a \neq b}^{a,b\in\Phi} d(a,b)$ fait alors sens et vérifie $r > 0$. Pour chaque point $\varphi \in \Phi$, la boule $\mathring{\mathcal{B}}(\varphi, \varepsilon)$ ne rencontre alors Φ qu'en son centre φ, donc n'est pas incluse dans Φ (à moins de valoir $\{\varphi\}$, ce qui forcerait la nullité de E). Conclusion :

   chaque partie finie est d'intérieur vide (sauf si $E = \{0\}$).

   (On pourrait remplacer « finie » par « en bijection avec $\mathbb{N}$ », *cf.* exoAP chap ? ? ?.)
4. Soit V un sous-espace vectoriel de E d'intérieur non vide, soit $i \in \mathring{V}$ et soit $r > 0$ tel que $i + \mathring{\mathcal{B}}(0,r) \subset V$. Puisque V est stable par translation, il inclut la translatée $\mathring{\mathcal{B}}(i,r) - i = r\mathring{\mathcal{B}}(0,1)$. Puisque V est stable par homothétie, il contient pour chaque vecteur $a \in E$ l'homothétée $\frac{2\|a\|}{r} r\mathring{\mathcal{B}}(0,1) = \mathring{\mathcal{B}}(0, 2\|a\|) \supset \mathcal{S}(0, \|a\|) \ni a$, d'où l'inclusion $E \subset V$. Conclusion (contraposée) :

   chaque sous-espace vectoriel strict de E est d'intérieur vide.

5. Soient $a \in E$ et $R > 0$. Soit $a \in \mathring{\mathcal{B}}(c,R)$, notons $r := R - d(a,c)$ et montrons l'inclusion $\mathring{\mathcal{B}}(a,r) \subset \mathring{\mathcal{B}}(c,R)$:

   FIG

   on a en effet pour chaque $b \in \mathring{\mathcal{B}}(a,r)$ les majorations

$$d(b,c) \leq d(b,a) + d(a,c) \overset{b\in\mathring{\mathcal{B}}(a,r)}{<} r + d(a,c) = R.$$

   L'appartenance $a \in \mathring{\mathcal{B}}(c,R)$ permettant par ailleurs d'affirmer $d(a,c) < R$, *i. e.* $r > 0$, on a trouvé une boule ouverte (non vide !) centrée en a et incluse dans $\mathring{\mathcal{B}}(c,R)$. Nous pouvons donc affirmer que

   chaque point d'une boule ouverte lui est intérieur.

[101] Les bornes sont considérées dans $\overline{\mathbb{R}}$.

6. Soit F un espace vectoriel normé, soit $B \subset F$ et montrons l'égalité[102]

$$\operatorname{Int}(A \times B) = \mathring{A} \times \mathring{B}.$$

Soit $i =: (a, b) \in A \times B$. Les boules ouvertes centrées en i étant les produits de boules ouvertes centrées resp en a et b, le produit $A \times B$ inclut une boule ouverte centrée en i ssi A (resp. B) en inclut une centrée en a (resp. b). En d'autres termes, le point i est intérieur à $A \times B$ ssi le point a (resp. b) est intérieur à A (resp. B), ce qui fournit l'égalité $\operatorname{Int}(A \times B) = \mathring{A} \times \mathring{B}$ voulue.

7. Montrons que *chaque groupe spécial linéaire est d'intérieur vide.*

Soit n un naturel, soit par l'absurde $A \in \operatorname{Int} SL_n(\mathbb{K})$ et soit $r > 0$ tel que $\mathring{\mathcal{B}}(A, r) \subset SL_n(\mathbb{K})$. La matrice $A + \lambda A$ reste alors dans $SL_n(\mathbb{K})$ pour chaque scalaire λ tel que[103] $|\lambda| < \frac{r}{\|A\|}$, ce qui montre que le polynôme $\lambda \mapsto \det(A + \lambda A) - 1$ s'annule une infinité de fois, donc s'annule partout, en particulier en -1, d'où la nullité de $\det(A - A) - 1 = -1$: contradiction.

8. Montrons que *les vecteurs de E de norme rationnelle*[104] *forment une partie d'intérieur vide.*

Soient par l'absurde $i \in E$ tel que $R := \|i\| \in \mathbb{Q}$ et $r > 0$ tel que chaque vecteur de $\mathring{\mathcal{B}}(i, r)$ est de norme rationnelle. Pour chaque réel $t \in]0, r[$, le point $i + \frac{t}{R} i$ tombe alors dans la boule $\mathring{\mathcal{B}}(i, r)$ et a pour norme

$$\left\| i + \frac{t}{R} i \right\| = \left\| \left(1 + \frac{t}{R}\right) i \right\| = \left| 1 + \frac{t}{R} \right| \|i\| = |R + t|,$$

d'où l'inclusion $]R, R + r[\subset \mathbb{Q}$, ce qui est absurde par densité des irrationnels.

9. On impose $E = \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Nous allons montrer par l'absurde que A est d'intérieur vide dans six cas. Soient donc $a \in A$ et $r > 0$ et montrons que la boule $B := \mathring{\mathcal{B}}(a, 2r)$ contient un point *hors* de A.

   (a) Lorsque A est le sous-espace vectoriel des suites tendant vers 0, la suite $a + (r, r, r, ...)$ tombe dans B et ne tend pas vers 0 (elle tend vers r).

   (b) Lorsque A est le sous-espace vectoriel des suites stationnant à 0, la suite $a + (r, r, r, ...)$ tombe dans B et ne stationne pas à 0 (elle tend vers r).

   (c) Lorsque A est le sous-espace vectoriel des suites convergentes, la suite $b := a + r\left((-1)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tombe dans B et diverge (sinon la combinaison linéaire de suites convergentes $\frac{b-a}{r} = \left((-1)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ convergerait).

   (d) Imposons A formée des suites dont 0 est valeur d'adhérence. Notons b la suite obtenue à partir de a en remplaçant par r chaque terme t tel que $|t| < r$. La suite b tombe alors dans B et n'admet aucune sous-suite tendant vers 0 (car $\inf_{n \in \mathbb{N}} |b_n| \geq r > 0$).

   (e) Imposons A formée des suites périodiques. La suite périodique a atteint alors son maximum, mettons en $N \in \mathbb{N}$. En notant δ la suite nulle partout sauf en N où elle vaut 1, la suite $a + r\delta$ tombe alors dans B et n'est pas périodique (son maximum $a_N + r$ n'est atteint qu'une seule fois).

[102] En d'autres termes, *l'intérieur respecte le produit cartésien fini.*

[103] La matrice A étant de déterminant 1 non nul, elle est non nulle et le rayon $\frac{r}{\|A\|}$ fait bien sens.

[104] Le résultat est inchangé en remplaçant $\mathbb{Q}$ par n'importe quelle partie de $\mathbb{R}$ d'intérieur vide, par exemple $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(f) Imposons enfin A formée des suites croissantes. Puisque a est bornée, elle converge alors et l'on peut évoquer un naturel N tel que $a_{N+1}-a_N < r$. En notant δ la suite nulle partout sauf en N où elle vaut 1, la suite $b := a + r\delta$ tombe alors dans B et n'est pas croissante vu les minorations

$$b_{N+1} - b_N = (a_{N+1} + r\delta_{N+1}) - (a_N + r\delta_N) = (a_{N+1} - a_N) - r < 0.$$

Remarque : bien observer à $i \in E$ fixé les équivalences des énoncés suivants :

1. i est un point intérieur de A ;
2. $i \in \mathring{A}$;
3. $\exists \mathcal{B} \subset A,\ \mathcal{B}$ boule ouverte et $i \in \mathcal{B}$;
4. $\exists r > 0,\ \mathring{\mathcal{B}}(i, r) \subset A$;
5. $\exists n \in \mathbb{N}^*,\ i + \frac{1}{n}\mathring{\mathcal{B}}(0, 1) \subset A$.

Les points 1, 2 et 4 sont équivalents par définition, ceux 3 et 4 le sont d'après l'exemple 5 et l'équivalence des points 4 et 5 résulte de la tendance $\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Lemme (hors programme) (dualité entre intérieur & adhérence)

1. *Soit $i \in E$. Alors le point i est intérieur à A ssi il n'adhère pas au complémentaire $E \backslash A$.*
2. *On a les égalités*[105] $\begin{cases} E \backslash \mathrm{Adh}\, A = \mathrm{Int}\,(E \backslash A) \\ E \backslash \mathrm{Int}\, A = \mathrm{Adh}\,(E \backslash A) \end{cases}$, i. e. $\begin{cases} {}^c\overline{A} = \overset{\circ}{\overbrace{{}^cA}} \\ {}^c\mathring{A} = \overline{{}^cA} \end{cases}$.

Démonstration

1. Supposons que i est un point intérieur à A et soit $r > 0$ tel que $\mathring{\mathcal{B}}(i, r) \subset A$. Supposons de plus que i adhère à ${}^cA$, soit $c \in ({}^cA)^{\mathbb{N}}$ tel que $c_n \longrightarrow i$ et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|c_N - i\| < r$ (permis car $c \longrightarrow i$) : on a alors l'appartenance $c_N \in \mathring{\mathcal{B}}(i, r) \subset A$, ce que contredit l'hypothèse $c \in ({}^cA)^{\mathbb{N}}$. Il en résulte l'implication $i \in \mathring{A} \Longrightarrow i \notin \overline{{}^cA}$.

   Supposons à présent $i \notin \mathring{A}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ la boule $\mathring{\mathcal{B}}\left(i, \frac{1}{n}\right)$ n'est alors pas incluse dans A, d'où un $b \in \mathring{\mathcal{B}}\left(i, \frac{1}{n}\right) \backslash A$. On dispose donc d'une suite $b \in ({}^cA)^{\mathbb{N}^*}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|b_n - i\| < \frac{1}{n}$. Ainsi i est-il limite de la suite b, laquelle prend ses valeurs dans ${}^cA$, d'où $i \in \overline{{}^cA}$. Il en résulte l'implication $i \notin \mathring{A} \Longrightarrow i \in \overline{{}^cA}$, *i. e.* (en contraposant) $i \in \mathring{A} \Longleftarrow i \notin \overline{{}^cA}$.

   Remarque – Le passage de $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists b \in {}^cA,\ \|b - i\| < \frac{1}{n}$ à $\exists b \in ({}^cA)^{\mathbb{N}^*},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|b_n - i\| < \frac{1}{n}$ est légitimé par l'axiome du choix.

[105] En d'autres termes : *les applications* Adh *et* Int *sont conjuguées par l'involution "complémentaire".*

2. Lorsque i décrit E dans le point 1, on obtient l'égalité $\mathring{A} = {}^c\overline{{}^cA}$, *i. e.* (en passant au complémentaire) ${}^c\mathring{A} = \overline{{}^cA}$. Nous avons donc montré $\forall B \subset E,\ {}^c\mathring{B} = \overline{{}^cB}$. Remplacer B par ${}^cA$ donne alors ${}^c\left(\overset{\circ}{{}^cA}\right) = \overline{{}^c\left({}^cA\right)} = \overline{A}$, *i. e.* (en passant au complémentaire) $\overset{\circ}{{}^cA} = {}^c\overline{A}$, ce qui conclut.

Remarques

• **Dualité entre les caractères dense & "d'intérieur vide"**. Vu les équivalences

$$A \text{ d'intérieur vide} \iff \mathring{A} = \emptyset \iff {}^c\mathring{A} = {}^c\emptyset \underset{\text{rieur-adhérence}}{\overset{\text{dualité inté-}}{\iff}} \overline{{}^cA} = E \iff {}^cA \text{ dense},$$

d'où résulte (en remplaçant A par ${}^cA$) l'équivalence ${}^c\left({}^cA\right)$ dense $\iff {}^cA$ d'intérieur vide, on peut affirmer que

la partie A est dense (resp. d'intérieur vide) ssi son complémentaire est d'intérieur vide (resp. dense).

Sanity check : l'exemple 8 montrait, pour chaque partie $D \subset \mathbb{R}$ d'intérieur vide, que les vecteurs de E de norme appartenant à D formaient une partie d'intérieur vide, *i. e.* de complémentaire dense. Remplacer D par $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ livre alors la densité de[106] ${}^c\mathcal{N}^{-1}\left(\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}\right) = \mathcal{N}^{-1}\left(\mathbb{Q}\right)$, densité faisant l'objet de l'exemple 3 section 3.2.

• **Comportement de** Int **vis-à-vis de** $\cap$ **et de** $\cup$. Soit $B \subset E$. D'après la dualité intérieur-adhérence, l'inclusion $\operatorname{Int}\left(A \cup B\right) \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}$ se récrit $\operatorname{Adh}\left({}^cA \cap {}^cB\right) \subset \overline{{}^cA} \cap \overline{{}^cB}$, ce qui a été établi à l'exercice 4a section 3.3. *Idem* pour l'égalité $\operatorname{Int}\left(A \cap B\right) = \mathring{A} \cap \mathring{B}$ et pour les exemples d'inclusions strictes. Il en résulte

$$\begin{array}{rcl} \textit{l'égalité } \operatorname{Int}\left(A \cap B\right) & = & \mathring{A} \cap \mathring{B} \textit{ et} \\ \textit{l'inclusion } \operatorname{Int}\left(A \cup B\right) & \supset & \mathring{A} \cup \mathring{B} \textit{ (qui peut être stricte).} \end{array}$$

Mnémo : prendre l'intérieur et intersecter sont des opérations qui "vont dans le même sens" (elles "retirent"), on retiendra donc qu'elles sont compatibles. Le sens de l'inclusion avec $\cup$ se retrouve à l'aide des exemples d'inclusion stricte.

Fixons pour la fin de cette section un point[107] $i \in E$.

Définition (voisinage)

On appelle ***voisinage*** *de i toute partie de E dont i est un point intérieur.*

Remarque – **Dualité entre intérieur & voisinage**. Vu pour chaque partie $V \subset E$ l'équivalence

$$V \text{ est un voisinage de } i \iff i \text{ est un point intérieur de } V,$$

les prédicats "être un point intérieur à" et "être un voisinage de" sont symétriques l'un de l'autre. Ainsi l'exemple 5 se transcrira-t-il en termes de voisinages comme suit :

[106] L'égalité résulte de la surjectivité de $\mathcal{N}$ quand $E \neq \{0\}$ et s'écrit sinon ${}^c\emptyset = \{0\}$ (ce qu'on a car $E = \{0\}$).

[107] i comme « **i**ntérieur ».

chaque boule ouverte est voisinage de chacun de ses points.

Propriétés[108] **(invariance des caractères "être intérieur à" et "être voisinage de" par invariance de normes)**

1. *Le point i est un point intérieur de A ssi il l'est pour chaque norme équivalente à celle de E.*
2. *La partie A est un voisinage de i ssi elle l'est pour chaque norme équivalente à celle de E.*

Démonstration : les deux points exprimant la même chose d'après la dualité intérieur-voisinage, il suffit d'établir le premier. Or le lemme ci-dessus livre l'équivalence $i \in \mathring{A} \iff i \notin \overline{{}^cA}$ et le membre de droite est inchangé par passage à une norme équivalente puisque l'application Adh l'est.

Remarques

- **Intérieur et équivalence de normes**. Le prédicat "être un point intérieur de A" étant inchangé par passage à une norme équivalente, l'ensemble $\mathring{A}$ des $i \in E$ le satisfaisant aussi. Par conséquent,

l'application Int : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{P}(E) & \longrightarrow & \mathfrak{P}(E) \\ P & \longmapsto & \mathring{P} \end{array} \right.$ *est inchangée par passage à une norme équivalente.*

- **Adhérence et voisinages**. Soit $\alpha \in E$. Déroulons les équivalences

$$\alpha \text{ n'adhère pas à } A \iff \alpha \in {}^c\overline{A} \underset{\text{rieur-adhérence}}{\overset{\text{dualité inté-}}{\iff}} \alpha \in \overset{\circ}{{}^cA} \iff \exists r > 0,\ \mathring{\mathcal{B}}(\alpha, r) \subset {}^cA$$
$$\iff \exists r > 0,\ \mathring{\mathcal{B}}(\alpha, r) \cap A = \emptyset \overset{?}{\iff} \exists V \text{ voisinage de } \alpha,\ V \cap A = \emptyset$$
$$\iff \alpha \text{ possède un voisinage ne rencontrant pas } A.$$

Pour justifier l'équivalence $\overset{?}{\iff}$, il suffit pour le sens $\Longrightarrow$ d'imposer $V := \mathring{\mathcal{B}}(\alpha, r)$ et pour le sens $\Longleftarrow$ d'observer que, si A ne rencontre pas V, alors A ne rencontre aucune partie de V, *a fortiori* aucune boule incluse dans V centrée en α (et il y a une telle boule par définition d'un voisinage de α). Contraposer les équivalences obtenues montre alors que[109]

le point α adhère à A ssi chacun de ses voisinages rencontre A.

- **Description des boules unités fermées (hors programme)**. Nous avons vu à l'exercice ? ? ? l'injectivité de l'application qui à chaque norme de E associe la boule fermé unité associée à cette norme (au passage, les égalités $\operatorname{Adh} \mathring{\mathcal{B}}(0, 1) = \overline{\mathcal{B}}(0, 1) = \operatorname{Conv} \mathcal{S}(0, 1)$ montrent que cette injectivité est conservée en remplaçant « boule fermée » par « boule ouverte » ou « sphère »). La lectrice et le lecteur intéressés

[108] En d'autres termes : les prédicats duaux "être un point intérieur de" et "être un voisinage de" sont *inchangés par passage à une norme équivalente.*

[109] Cette remarque permet de définir la notion de point adhérent uniquement en termes de voisinages, *i. e.* (à l'aide de l'exercice 2a section 4.2) uniquement en termes d'ouverts.

pourront montrer que l'image de cette injection $N \mapsto \overline{\mathcal{B}}_N(0,1)$ est formée des voisinages de 0 convexes équilibrés bornés et fermés (pour au moins une norme)[110].

Exercices d'application

1. *Montrer que la partie* $A \setminus \mathring{A}$ *est d'intérieur vide.*
2. *Montrer que l'intérieur de chaque convexe de* E *reste convexe.*
3. *Soit* S *un segment réel infini et imposons* $E = \mathcal{B}(S, \mathbb{K})$*. Déterminer alors l'intérieur de la partie de* E *formée des applications croissantes.*
4. (a) *Montrer les inclusions et égalités* $\left\{ \begin{array}{l} \mathring{A} \subset \mathring{\overline{\mathring{A}}} \subset \overline{\mathring{A}} = \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} \subset \overline{\mathring{\overline{A}}} \\ \mathring{\overline{\mathring{A}}} \subset \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} = \mathring{\overline{A}} \subset \overline{\mathring{\overline{A}}} \subset \overline{A} \end{array} \right.$.

   (b) *Étudier les inclusions réciproques.*

---

1. Soit par l'absurde $a \in \operatorname{Int}\left(A \setminus \mathring{A}\right)$, soit $\mathcal{B} \subset A \setminus \mathring{A}$ une boule ouverte contenant a. Cette boule étant en particulier incluse dans A, le point a est intérieur à A, donc tombe dans l'intersection $\mathring{A} \cap \mathcal{B} = \mathring{A} \cap A \setminus \mathring{A} = \emptyset$, ce qui est absurde.

   Interprétation : pour "vider" (rendre vide) l'intérieur d'une partie, il suffit de la priver de son intérieur.

2. On notera $\mathbb{B}$ la boule ouverte unité de E. Soit C un convexe de E, soient $i, j \in \mathring{C}$, soient $r, s > 0$ tels que $\left\{ \begin{array}{l} i + r\mathbb{B} \subset C \\ j + s\mathbb{B} \subset C \end{array} \right.$ et soient $\lambda, \mu \in [0,1]$ de somme 1. Quitte à remplacer les rayons r et s par leur minimum, on peut imposer $r = s$.

   FIG

   L'appartenance $\lambda i + \mu j \in \mathring{C}$ désirée découlera alors de l'inclusion $\lambda i + \mu j + r\mathbb{B} \subset C$, laquelle résulte à $b \in \mathbb{B}$ des égalités et inclusions[111]

$$\begin{aligned} & \lambda i + \mu j + rb \overset{\lambda+\mu=1}{=} \lambda i + \mu j + (\lambda + \mu) rb = \lambda i + \mu j + (\lambda rb + \mu rb) \\ = \quad & (\lambda i + \lambda rb) + (\mu j + \mu rb) = \lambda \underbrace{(i + rb)}_{\in i + r\mathbb{B} \subset C} + \mu \underbrace{(j + rb)}_{\in j + r\mathbb{B} \subset C} \subset \lambda C + \mu C \underset{\text{convexe}}{\overset{C \text{ est}}{\subset}} C. \end{aligned}$$

3. Montrons que l'intérieur cherché est vide, par contraposée. Soient $c \in E$ une application croissante et $r > 0$ un réel. L'idée est de caser dans chaque "bande" autour du graphe de c un segment de pente strictement négative.

---

[110] *Sanity check* : la boule fermée unité de l'espace vectoriel normé $(E, \mathcal{N})$ est une telle partie.

[111] On apprécierait ici l'avantage de la notation $i + r\mathbb{B}$ sur celle $\mathring{\mathcal{B}}(i, r)$.

Admettons un instant l'existence de deux réels $a < b$ dans S tels que $c(b) - c(a) < r$ et évoquons-en.

FIG

Notons $m := \frac{a+b}{2}$ et f l'application de $\mathbb{R}^S$ qui vaut $c(a) + r$ en m, qui coïncide avec c sauf (peut-être) sur l'intervalle $]a, b[$ et qui est affine sur $[a, m]$ et sur $[m, b]$. L'application f ne croît alors pas vu les comparaisons

$$m < b \qquad \text{et} \qquad f(m) = c(a) + r > c(b) = f(b)\,.$$

Par ailleurs, on a pour chaque $t \in [a, b]$ les majorations

$$\begin{aligned} c(t) - f(t) &\leq \max_{[a,b]} c - \min_{[a,b]} f = c(b) - c(a) < r \text{ et} \\ f(t) - c(t) &\leq \max_{[a,b]} f - \min_{[a,b]} c = f(m) - c(a) = r, \end{aligned}$$

majorations restant valides pour $t \notin [a, b]$ (chacune s'écrit alors $0 < r$), d'où l'encadrement $\|f - c\| < r$. Finalement, chaque boule ouverte centrée en c contient une application non croissante, *c. q. f. d.*.

Il reste à légitimer l'évocation de a et b. Si cela n'était pas possible, on aurait $c(b) - c(a) \geq r$ pour chaques réels $a < b$ de S, d'où pour chaque naturel $n \geq 1$ (en abrégeant $s_i := \min S + i\frac{\max S - \min S}{n}$ pour chaque $i \in [0, n|])$ les majorations et tendance

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{c(s_i) - c(s_{i-1})}_{\text{on a bien } s_i > s_{i-1} \text{ car } S \text{ est infini}} = \frac{c(\max S) - c(\min S)}{n} \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ ce qui est absurde car } r > 0. \end{aligned}$$

4. La dualité intérieur-adhérence montrant l'équivalence entre les deux lignes d'inclusions à établir, il suffit de nous occuper uniquement de la première ligne (*idem* pour les contre-exemples).

   (a) Afin d'alléger l'argumentation, on abrégera d'une part $\overset{\circ}{\nearrow}$ et $\overline{\nearrow}$ les croissances respectives des applications Int et Adh, d'autre part ${}^{i}\!\subset$ et $\subset^{a}$ les énoncés respectifs $\forall P \subset E,\ \mathring{P} \subset P$ et $\forall P \subset E,\ P \subset \overline{P}$.

   Appliquer $\subset^a$ à $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$ livre l'inclusion $\mathring{\overline{\mathring{A}}} \subset \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}}$.

   Utiliser $\overset{\circ}{\nearrow}$ puis $\overline{\nearrow}$ sur l'inclusion $A \subset \overline{A}$ donne celle $\overline{\mathring{A}} \subset \overline{\mathring{\overline{A}}}$.

   Appliquer ${}^{i}\!\subset$ à $\overline{\mathring{A}}$ donne l'inclusion $\mathring{\overline{\mathring{A}}} \subset \overline{\mathring{A}}$ d'où (d'après $\overline{\nearrow}$) l'inclusion $\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} \subset \overline{\overline{\mathring{A}}} = \overline{\mathring{A}}$.

   Appliquer $\subset^a$ à $\mathring{A}$ donne l'inclusion $\mathring{A} \subset \overline{\mathring{A}}$, d'où (d'après $\overset{\circ}{\nearrow}$) l'inclusion $\mathring{\mathring{A}} \subset \mathring{\overline{\mathring{A}}}$, *i. e.* $\mathring{A} \subset \mathring{\overline{\mathring{A}}}$. Utiliser $\overline{\nearrow}$ donne alors $\overline{\mathring{A}} \subset \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}}$.

(b) Lorsque E est nul, chaque partie de E est vide ou pleine, donc ouverte et fermée, donc les applications Int et Adh valent l'identité sur $\mathfrak{P}(E)$, ce qui réalise l'égalité dans *toutes* les inclusions. Imposons désormais E non nul.

Lorsque A est une boule ouverte, l'inclusion $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}} \subset \overline{\overset{\circ}{A}}$ s'écrit $A \subset \overline{A}$, donc est stricte.

Lorsque A est un ouvert dense strict (par exemple si $A = E \setminus \{0\}$), l'inclusion $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}$ s'écrit $A \subset E$, donc est stricte.

Lorsque A est dense et d'intérieur vide (par exemple si A est formé des vecteurs de norme rationnelle), l'inclusion $\overline{\overset{\circ}{A}} \subset \overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}$ s'écrit $\emptyset \subset E$, donc est stricte.

Remarque – Cet exercice permet de décrire tous les composés des applications Int et Adh et d'ordonner ces *six* composés[112] (sauf si E est nul) pour l'inclusion produit (ci-après notée $\preccurlyeq$). En notant resp. ι et α ces applications, on obtient ainsi le diagramme suivant[113] :

FIG avec diagramme plus propre $\iota^2 = \iota \begin{array}{c} \preccurlyeq \iota\alpha\iota \begin{array}{c} \preccurlyeq \iota\alpha\iota\alpha = \iota\alpha \preccurlyeq \\ \preccurlyeq \alpha\iota\alpha\iota = \alpha\iota \preccurlyeq \end{array} \alpha\iota\alpha \preccurlyeq \\ \preccurlyeq \iota^0 = \mathrm{Id} = \alpha^0 \preccurlyeq \end{array} \alpha = \alpha^2.$

4.2 Ouverts

Définition (ouverts, topologie)

Soit O une partie de E. Elle est dite ***ouverte*** *si chacun de ses points lui est intérieur*[114]*,* i. e. *si*

$$\forall o \in O,\ \exists r > 0,\ \overset{\circ}{\mathcal{B}}(o, r) \subset O.$$

On appelle ***ouvert*** *de E toute partie ouverte de E. L'ensemble des ouverts de E s'appelle sa* ***topologie****.*

Remarques

- Comme pour les fermés, la question « *la partie A est-elle ouverte ?* » cache une question plus fine, à savoir « *quel est son intérieur ?* ».
- Nous déconseillons l'utilisation du terme *ouverture* pour désigner le caractère ouvert (même raisons que pour le terme *fermeture*).
- Contrairement au sens vernaculaire, et comme le montre l'exemple de chaque intervalle semi-ouvert réel,

[112] Quand E est nul, il n'y a qu'*un seul* composé : le neutre Id.

[113] Ne pas oublier le composé neutre Id !

[114] Autrement dit, O est ouverte ssi elle est voisinage de chacun de ses points.

être ouvert n'équivaut pas à ne pas être fermé !

Si cependant l'on souhaite – comme l'exige la langue – trouver une "complémentarité" entre les caractères ouvert et fermé, elle sera *ensembliste* au sens où les ouverts seront les complémentaires des fermés (nous le prouverons bientôt).

Exemples

1. *Sanity checks terminologiques* : en termes d'ouverts, l'exemple 5 section 4.1 se transcrit comme suit :

   chaque boule ouverte est ouverte.

   En particulier, pour chaques réels $a < b$, l'intervalle ouvert $]a, b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

   Dans cet exemple, on ne doit pas s'attacher au fait qu'un ouvert soit privé de son bord mais plutôt à ce que l'*on dispose de place à l'intérieur*. Dans un ouvert non vide, on pourra ainsi "ouvrir" l'espace autour de chaque point, ce qui pourra éclairer la terminologie.
2. Soient $c \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$. Abrégeons $\mathring{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{B}}, \mathcal{S}$ les boule ouverte, boule fermée et sphère de centre c et rayon r. Pour chaque vecteur unitaire[115] $u \in E$, le point ru appartient alors à la sphère $\mathcal{S} \subset \overline{\mathcal{B}}$ mais pour aucun réel $\varepsilon > 0$ le point $(r + \varepsilon)\, u$ n'appartient à la boule $\overline{\mathcal{B}}$ (*a fortiori* à la sphère $\mathcal{S}$). Ceci montre qu'

   aucune sphère, aucune boule fermée n'est ouverte (sauf si E est nul).

   FIG
3. Précisons le point précédent lorsque E est non nul. Tout d'abord :

   chaque sphère est d'intérieur vide (sauf si E est nul).

   Ensuite, aucun point de la sphère $\mathcal{S}$ n'étant intérieur à $\overline{\mathcal{B}}$, l'intérieur $\operatorname{Int} \overline{\mathcal{B}}$ est inclus dans $\overline{\mathcal{B}} \backslash \mathcal{S} = \mathring{\mathcal{B}}$, cette dernière étant un ouvert inclus dans $\overline{\mathcal{B}}$, ce qui montre que[116]

   l'intérieur de chaque boule fermée est la boule ouverte de mêmes centre et rayon.
4. Imposons A ouvert, soit F un espace vectoriel normé et soit B un ouvert de F. Le produit $A \times B$ a alors pour intérieur $\operatorname{Int}(A \times B) = \mathring{A} \times \mathring{B} = A \times B$, donc est ouvert dans $E \times F$. On retiendra plus généralement que

   chaque produit (cartésien fini) d'ouverts est ouvert.

   La réciproque est cependant fausse[117] : on montre comme à l'exercice 2 section 3.3 que la somme de la diagonale de E^2 et de sa boule ouverte unité n'est pas un produit d'ouverts, l'exercice 1b montrant par ailleurs que cette somme est ouverte.

[115] On peut évoquer un tel u si $E \neq \{0\}$.

[116] Les égalités $\overset{\circ}{\overline{\mathcal{B}}} = \mathring{\mathcal{B}} = \overset{\circ}{\mathring{\mathcal{B}}}$ motivent la notation des boules ouvertes $\mathring{\mathcal{B}}(c, r)$.

[117] Les ouverts "produit" ne sont donc pas les produits d'ouverts !

5. *Culture HP*. Dans la réalité, une porte ne saurait être à la fois *ouverte et fermée* : qu'en est-il en mathématique ? Nous montrerons au chap ? ? ? que cela n'est (presque) jamais le cas, au sens où

   chaque partie ouverte et fermée est vide ou pleine.

   Nous encourageons la lectrice et le lecteur curieux de regarder déjà le cas simple $E = \mathbb{R}$.

Propriété[118] **(invariance du caractère ouvert par équivalence de normes)**

La partie A est ouverte ssi elle est ouverte pour chaque norme équivalente à celle de E.

Démonstration : la partie A est ouverte ssi chacun de ses points lui est intérieur, *i. e.* ssi $A \subset \mathring{A}$, inclusion inchangée par passage à une norme équivalente puisque l'intérieur $\mathring{A}$ l'est.

Propriété[119] **(caractérisation topologique des fermés)**

$$\boxed{\begin{array}{c}\textit{Chaque partie est ouverte (resp. fermée) ssi}\\ \textit{son complémentaire est fermé (resp. ouvert)}\end{array}}.$$

Démonstration : on a les équivalences

$$A \text{ ouverte} \iff A \subset \mathring{A} \overset{\mathring{A}\subset A}{\iff} \mathring{A} = A \iff {}^c\mathring{A} = {}^cA \underset{\text{rieur-adhérence}}{\overset{\text{dualité inté-}}{\iff}} \overline{{}^cA} = {}^cA \iff {}^cA \text{ fermée.}$$

Remplacer alors A (pensé comme symbole libre) par ${}^cA$ (où A est à nouveau fixée dans $\mathfrak{P}(E)$) livre l'équivalence ${}^cA$ ouverte $\iff A$ fermée.

Corollaire (axiomes des ouverts)

Les ouverts de E forment un ensemble :

1. *contenant la partie vide $\emptyset$ et la partie pleine E ;*
2. *stable par réunion (quelconque) ;*
3. *stable par intersection finie.*

Démonstration : il suffit de reprendre les trois propriétés analogues pour les fermés et d'y appliquer l'involution "complémentaire", laquelle échange d'une part $\emptyset$ et E, d'autre part $\cap$ et $\cup$, enfin les fermés et les ouverts.

Remarques

- En considérant les réunions de boules ouvertes, le point (2) montre que

chaque réunion de boules ouvertes est ouverte.

[118] En d'autres termes, le caractère ouvert est *invariant par passage à une norme équivalente.*
[119] En d'autres termes, l'involution "complémentaire" échange les ouverts et les fermés.

• Le point (3) tombe en défaut pour une intersection *in*finie, même dénombrable : l'intersection infinie des boules ouvertes $\mathring{\mathcal{B}}\left(0, \frac{1}{n}\right)$ lorsque n décrit $\mathbb{N}^*$ vaut la sphère $\{0\}$ qui n'est pas ouverte (sauf si E est nul).

• *Sanity check* : quand $E = \mathbb{R}$, la partie $\mathbb{Z}$ est fermée comme complémentaire de la réunion ouverte $\bigcup_{z\in\mathbb{Z}}]z, z+1[$.

• **Culture hors programme**. Comme pour les fermés, la stabilité par union quelconque et intersection finie peut être prise comme axiome définissant une topologie. Par exemple, les intervalles entiers de la forme $[n, \infty|[$ définissent (avec l'intervalle vide) une topologie sur $\mathbb{N}$ qui est le cadre sous-jacent à toute l'analyse séquentielle.

Corollaire (ouverts et intérieurs)

1. *L'intérieur $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert de E inclus dans A.*
2. *On a l'égalité* $\operatorname{Int} A = \bigcup_{O \subset A}^{O \text{ ouvert}} O$.
3. *Pour chaque partie B de E, on a l'implication $A \subset B \Longrightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$.*
4. *On a les inclusions $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A} \subset A$ avec égalité $\mathring{A} = A$ ssi A est ouverte*[120].

Démonstration : il suffit de reprendre les propriétés analogues pour l'adhérence et d'y appliquer l'involution "complémentaire", laquelle renverse le sens des inclusions.

Remarques

• Le point 4 livre en particulier les intérieurs des ouverts plein et vide :

$$\mathring{E} = E \text{ et } \mathring{\emptyset} = \emptyset.$$

• Ce même point montre par ailleurs que

les ouverts de E sont les intérieurs des parties de E.

• *Sanity check* : l'intérieur $\operatorname{Int}\left(A \Big\backslash \mathring{A}\right)$ est inclus d'une part (vu la croissance de Int et l'inclusion $A \Big\backslash \mathring{A} \subset A$) dans $\operatorname{Int} A = \mathring{A}$, d'autre part (vu à $P \subset E$ fixée l'inclusion $\operatorname{Int} P \subset P$) dans $A \Big\backslash \mathring{A} \subset {}^c\mathring{A}$, donc est inclus dans l'intersection vide $\mathring{A} \cap {}^c\mathring{A}$, ce qui permet de retrouver l'exercice d'application ? ?1 section 4.1.

Exercices d'application

1.

   (a) *Montrer que les ouverts de E sont les réunions de boules ouvertes.*

   (b) *En déduire que la somme de chaque ouvert E avec chaque partie de E est ouverte.*

2.

[120] En termes concis, les points 3 et 4 disentque l'application Int est idempotente, croissante, inférieure à l'identité et fixe exactement les ouverts.

(a) *Montrer que les voisinages de i sont les parties de E incluant un ouvert contenant i.*

(b) *Montrer que la partie A est dense ssi elle rencontre chaque ouvert non vide de E.*

3.

(a) *Montrer que A est ouverte ssi on a pour chaque ouvert $O \subset E$ l'égalité* $\operatorname{Int}(A \cup O) = \mathring{A} \cup \mathring{O}$.

(b) *En déduire l'équivalence*

$$A \text{ est fermée et ouverte} \iff \forall P \subset E, \begin{cases} \operatorname{Adh}(A \cap P) = \overline{A} \cap \overline{P} \\ \operatorname{Int}(A \cup P) = \mathring{A} \cap P \end{cases}.$$

1.

(a) Nous avons déjà vu que chaque réunion de boules ouvertes est ouverte.

Soit réciproquement $O \subset E$ un ouvert, notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des boules ouvertes incluses dans O et montrons l'égalité $O = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$, ce qui conclura[121]. L'inclusion $\supset$ découle à $B \in \mathcal{B}$ fixé de celle $O \supset B$. Par ailleurs, pour chaque $o \in O = \mathring{O}$, il y a une boule ouverte $\beta \subset O$ contenant o, d'où l'appartenance $o \in \beta \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$, ce qui conclut.

(b) Soit O un ouvert de E et montrons que la somme $O + A$ est ouverte. Pour chaque boule $\beta \in B$ du paragraphe précédent, notons resp. c_β et r_β les centre et rayon[122] de β. On a alors les égalités

$$A + O = \bigcup_{a \in A} \{a\} + \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} \beta = \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}}^{a \in A} \left(\{a\} + \mathring{\mathcal{B}}(c_\beta, r_\beta) \right) = \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}}^{a \in A} \mathring{\mathcal{B}}(a + c_\beta, r_\beta),$$

ce qui montre que la somme $A + O$ est ouverte comme réunion de boules ouvertes.

2.

(a) Soit V un voisinage de i : alors V inclut une boule ouverte centrée en i, laquelle est en particulier un ouvert contenant i.

Soient réciproquement $O, V \subset E$ tels que O est ouvert et $i \in O \subset V$: alors O est un voisinage de chacun de ses points, en particulier de i, donc inclut une boule ouverte centrée en i, laquelle est incluse dans V (car $V \supset O$), ce qui montre que V est un voisinage de i.

(b) $\boxed{\Longrightarrow}$ Soit O un ouvert non vide de E, soit $o \in O$, soit $r > 0$ tel que $\mathring{\mathcal{B}}(c, 2r) \subset O$, soit $a \in A^{\mathbb{N}}$ tendant vers c (permis par densité de A) et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(a_N, c) < r$ (permis car $d(a_n, c) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$). Le terme a_N

[121] Le cas $\mathcal{B} = \emptyset$ correspond à l'ouvert vide $O = \emptyset$.

[122] si E est nul, "le" rayon ne fait pas sens et l'on imposera $r_\beta := 1$

tombe alors dans $\mathring{\mathcal{B}}(c, 2r)$, donc dans l'intersection $A \cap O$, laquelle est du coup non vide.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $\ell \in E$. Puisque A rencontre pour chaque naturel $n > 0$ la boule $\mathring{\mathcal{B}}\left(\ell, \frac{1}{n}\right)$, l'axiome du choix nous donne une suite $a \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ d(\ell, a_n) < \frac{1}{n}$, d'où une suite de $A^{\mathbb{N}}$ tendant vers ℓ.

Remarque – Nous pourrions également utiliser la description de l'adhérence en termes de voisinages (*cf.* remarque en fin de section 4.1) puis celle des voisinages en termes d'ouverts (*cf.* exercice 2a ci-dessus) afin de raisonner directement par équivalences sans évoquer aucune suite ni aucune boule.

Remarque – Cet exercice permet de définir les notions de voisinage de i et de densité uniquement en termes d'ouverts.

3.

(a) D'après la dualité intérieur-adhérence, à O ouvert fixé l'égalité $\operatorname{Int}(A \cup O) = \mathring{A} \cup \mathring{O}$ se récrit $\operatorname{Adh}({}^cA \cap {}^cO) = \overline{{}^cA} \cap \overline{{}^cO}$, d'où les équivalences

$$\begin{array}{cl} & \forall O \subset E \text{ ouvert},\ \operatorname{Int}(A \cup O) = \mathring{A} \cup \mathring{O} \\ \Longleftrightarrow & \forall O \subset E \text{ ouvert},\ \operatorname{Adh}({}^cA \cap {}^cO) = \overline{{}^cA} \cap \overline{{}^cO} \\ \underset{F := {}^cO}{\overset{\text{reparamétrage}}{\Longleftrightarrow}} & \forall F \subset E \text{ fermé},\ \operatorname{Adh}({}^cA \cap F) = \overline{{}^cA} \cap \overline{F} \\ \underset{\text{4b section 3.3}}{\overset{\text{exercice}}{\Longleftrightarrow}} & {}^cA \text{ fermé} \Longleftrightarrow A \text{ ouvert.} \end{array}$$

(b) $\boxed{\Longleftarrow}$ Immédiat d'après le point précédent (se restreindre aux P ouvertes) et d'après l'exercice 4b section 3.3 (se restreindre aux P fermées).

$\boxed{\Longrightarrow}$ Comme au point précédent, la dualité intérieur-adhérence livre l'équivalence (en notant $B := {}^cA$, qui est ouvert et fermé)

$$\begin{array}{cl} & \forall P \subset E,\ \operatorname{Adh}(A \cap P) = \overline{A} \cap \overline{P} \\ \underset{Q := {}^cP}{\overset{\text{reparamétrage}}{\Longleftrightarrow}} & \forall Q \subset E,\ \operatorname{Int}(B \cup Q) = \mathring{B} \cap \mathring{P}. \end{array}$$

Si l'on montre l'énoncé de gauche, y remplacer alors A (pensé comme symbole libre) par B (où A est à nouveau fixée dans $\mathfrak{P}(E)$) livrera l'énoncé de droite. Il suffit par conséquent de montrer les égalités de gauche.

Soit donc $P \subset E$ et montrons l'égalité $\operatorname{Adh}(A \cap P) = \overline{A} \cap \overline{P}$. Vu l'inclusion $\overline{A \cap P} \subset \overline{A} \cap \overline{P}$ (*cf.* l'exercice 4a section 3.3), il suffit de montrer l'inclusion $\overline{A \cap P} \supset \overline{A} \cap \overline{P}$, *i. e.* (vu que A est fermé) $A \cap \overline{P} \subset \overline{A \cap P}$. Soit donc $a \in A \cap \overline{P}$ et soit $p \in P^{\mathbb{N}}$ tel que $p \longrightarrow a$. Puisque A est ouvert, il y a une boule centrée en a incluse dans A : vu par ailleurs la tendance $p \longrightarrow a$, chaque terme de la suite p tombe dans cette boule à partir d'un certain rang, donc est dans $A \cap P$, d'où l'appartenance $\lim p \in \overline{A \cap P}$, *c. q. f. d.*

4.3 Frontière

Définition (frontière)

*On appelle **frontière** de A la partie*

$$\operatorname{Fr} A := \operatorname{Adh} A \setminus \operatorname{Int} A .$$

Culture : la frontière de A s'appelle également son ***bord*** et est alors noté

$$\partial A := \overline{A} \Big\backslash \mathring{A} .$$

La notation ∂ vient probablement du $\mathfrak{d}$ gothique, simplification de $\mathfrak{Rd}$ abrégeant[123] l'allemand $\mathfrak{Rand}$ signifiant *bord*.

Exemples

1. Soient $c \in E$ et $r \geq 0$. En abrégeant $\mathring{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{B}}, \mathcal{S}$ les boule ouverte, boule fermée et sphère de centre c et rayon r, on a alors les égalités

$$\partial\mathring{\mathcal{B}} = \overline{\mathring{\mathcal{B}}} \Bigg\backslash \mathring{\mathring{\mathcal{B}}} = \overline{\mathcal{B}} \Big\backslash \mathring{\mathcal{B}} = \mathcal{S} \qquad \text{et} \qquad \partial\overline{\mathcal{B}} = \overline{\overline{\mathcal{B}}} \Bigg\backslash \mathring{\overline{\mathcal{B}}} = \overline{\mathcal{B}} \Big\backslash \mathring{\mathcal{B}} = \mathcal{S},$$

   ce qui montre[124] que

   la frontière de chaque boule est la sphère de mêmes centre et rayon.

2. Imposons $E = \mathbb{R}$, soient $a < b$ deux réels et imposons A formée des rationnels de $[a, b]$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense et d'intérieur vide, la frontière de A vaut

$$\operatorname{Fr} A = \overline{A} \Big\backslash \mathring{A} = [a, b] \setminus \emptyset = [a, b] .$$

   La frontière de cette frontière vaut alors

$$\operatorname{Fr}\operatorname{Fr} A = \operatorname{Fr}[a, b] = \operatorname{Fr}\overline{\mathcal{B}}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right) \underset{1}{\overset{\text{exemple}}{=}} \mathcal{S}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right) = \{a, b\} .$$

3. Si A est fermée et ouverte, elle vaut son adhérence et son intérieur, donc est de bord $\overline{A} \Big\backslash \mathring{A} = A \setminus A$ vide. En particulier,

   les parties pleine et vide sont de frontière vide : $\operatorname{Fr} E = \emptyset = \operatorname{Fr} \emptyset$.

4. Cas dégénéré : lorsque E est nul, l'application Fr est constante égale à $\emptyset$ (résulte de la remarque précédente).

[123] Cette abréviation est explicite dans le §16 dans le *Lehrbuch der Topologie* de Herbert Seifert et William Threlfall publié en 1934.
[124] Cet exemple motive à lui seul la terminologie *frontière* ou *bord*.

Remarques

- Chaque adhérence est réunion disjointe d'un intérieur et d'un bord :

$$\overline{A} = \mathring{A} \amalg \partial A.$$

- *Chaque frontière est fermée*[125] comme intersection de deux adhérences :

$$\partial A = \overline{A} \Big\backslash \mathring{A} = \overline{A} \cap {}^c\mathring{A} = \overline{A} \cap \overline{{}^cA}.$$

- Le bord de chaque *fermé* est d'intérieur vide vu pour chaque fermé F les inclusions[126]

$$\operatorname{Int} \partial F = \operatorname{Int}\left(\overline{F} \cap {}^c\left(\mathring{F}\right)\right) = \underbrace{\operatorname{Int} \overline{F}}_{=\operatorname{Int} F} \cap \underbrace{\operatorname{Int}\left({}^c\left(\mathring{F}\right)\right)}_{\subset {}^c\left(\mathring{F}\right)} \subset \mathring{F} \cap {}^c\left(\mathring{F}\right) = \emptyset.$$

En particulier, *chaque bord de bord est un fermé d'intérieur vide.*

- Réciproquement, chaque fermé d'intérieur vide est un bord vu les égalités,

$$\text{pour chaque } F \text{ fermé d'intérieur vide, } \partial F = \overline{F} \Big\backslash \mathring{F} = F \setminus \emptyset = F.$$

Ces égalités montrent mieux, à savoir que l'application Fr vaut l'identité sur les fermés d'intérieur vide : la suite des itérés de Fr stationne donc dès le rang 2. Par ailleurs, quand A est formée des vecteurs dont la norme tombe dans $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, les frontières ∂A et $\partial\partial A$ valent respectivement $\overline{\mathcal{B}}(0,1)$ et $\mathcal{S}(0,1)$, d'où les distinctions $A \neq \partial A \neq \partial\partial A$ et celles $\operatorname{Id} \neq \operatorname{Fr} \neq \operatorname{Fr}^2$. Finalement, on peut écrire

$$(\text{si } E \text{ est non nul}) \ \operatorname{Id} \neq \operatorname{Fr} \neq \operatorname{Fr}^2 = \operatorname{Fr}^3 = \operatorname{Fr}^4 = \operatorname{Fr}^5 = \cdots.$$

Sanity check : tester ces trois remarques sur les exemples précédents.

Exercices d'application

1. (a) *Montrer les inclusions $\partial\overline{A} \subset \partial A \supset \partial\mathring{A}$. Donner un exemple d'inclusions strictes.*

   (b) *En déduire l'inclusion $\partial\left(A \Big\backslash \mathring{A}\right) \subset \partial A$. Donner un exemple d'égalité et un exemple d'inclusion stricte.*

2. *Soit F un espace vectoriel normé et soit $B \subset F$. Établir alors l'égalité $\partial(A \times B) = \left(\partial A \times \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \times \partial B\right)$ et décrire le cas où l'union est disjointe.*

3. *Montrer et commenter pour chaque fermé $F \subset E$ l'égalité $F = \partial F \cup \overline{\mathring{F}}$ (on précisera les intérieurs respectifs de ∂F et $\overline{\mathring{F}}$).*

4. *(plus difficile) On impose E non nul. Nous proposons alors d'établir que les bords de E sont les fermés de E.*

[125] La réciproque est proposée en exercice.

[126] Rappelons que Int préserve $\cap$ d'après une remarque section 4.1.

(a) *Montrer que E possède une partie dense d'intérieur vide.*

On évoque pour la suite D une telle partie. Soit F un fermé de E et notons[127] $\Delta := \partial F \amalg \left(\mathring{F} \cap D\right)$.

(b) *Soit i un point intérieur à Δ. Montrer que la distance*[128] $d(i, \partial F)$ *est nulle. En déduire l'égalité $\mathring{\Delta} = \emptyset$.*

(c) *Montrer les inclusions $\overline{\Delta} \subset F$, $\partial F \subset \overline{\Delta}$, $\mathring{F} \subset \Delta$ et en déduire l'égalité $\overline{\Delta} = F$.*

(d) *Conclure.*

1.

(a) L'inclusion $\mathring{A} \subset A$ et la croissance de Adh livre l'inclusion $\overline{\mathring{A}} \subset \overline{A}$, d'où celles

$$\partial \mathring{A} = \overline{\mathring{A}} \setminus \mathring{A} \underset{\overline{\mathring{A}} \subset \overline{A}}{\subset} \overline{A} \setminus \mathring{A} = \partial A.$$

L'inclusion $A \subset \overline{A}$ et la croissance de Int livre l'inclusion $\mathring{A} \subset \mathring{\overline{A}}$, d'où celles

$$\partial \overline{A} = \overline{\overline{A}} \setminus \mathring{\overline{A}} = \overline{A} \setminus \mathring{\overline{A}} \underset{\mathring{A} \subset \mathring{\overline{A}}}{\subset} \overline{A} \setminus \mathring{A} = \partial A.$$

Lorsque E est nul, chaque bord est vide et l'on a égalité partout. Sinon, lorsque A est dense et d'intérieur vide (par exemple quand A est formé par les vecteurs de norme rationnelle), son bord vaut $\overline{A} \setminus \mathring{A} = E \setminus \emptyset = E$ mais celui de son adhérence E et de son intérieur $\emptyset$ est vide, d'où les inclusions strictes $\partial \overline{A} \subsetneq \partial A \supsetneq \partial \mathring{A}$.

(b) La partie $A \setminus \mathring{A}$ étant d'intérieur vide (*cf.* exercice 1 section 4.1), son bord vaut son adhérence

$$\partial\left(A \setminus \mathring{A}\right) = \overline{A \setminus \mathring{A}} = \overline{A \cap {}^c\mathring{A}} \underset{\text{section 3.3}}{\overset{\text{exercice 4a}}{\subset}} \overline{A} \cap \overline{{}^c\mathring{A}}$$
$$\underset{\text{intér.-adhér.}}{\overset{\text{dualité}}{=}} \overline{A} \cap {}^c \operatorname{Int} \mathring{A} = \overline{A} \cap {}^c\mathring{A} = \partial A.$$

Si A est fermée, la partie $A \setminus \mathring{A} = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \partial A$ est fermée (comme bord) et d'intérieur vide, donc vaut son bord, d'où l'égalité $\partial\left(A \setminus \mathring{A}\right) = \partial(A)$.

Si A est une boule ouverte, la partie $A \setminus \mathring{A}$ est alors vide, donc de bord vide, tandis que ∂A est une sphère non vide, d'où l'inclusion stricte $\partial\left(A \setminus \mathring{A}\right) \subsetneq \partial A$.

[127] Δ comme « **d**ense dans F »

[128] *Rappel* : la distance $d(i, A)$ est définie par $\inf_{a \in A} \|i - A\|$.

2. L'égalité attendue doit être motivée par le cas simple où A et B sont deux segments réels

FIG

En se souvenant que Adh et Int respectent le produit cartésien (fini), cette égalité va résulter simplement d'un calcul ensembliste. Nous présenterons les produits cartésiens *verticalement* afin de faciliter la lecture :

$$\begin{aligned} & \operatorname{Fr}\left(\times\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right)=\operatorname{Adh}\left(\times\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right)\Big\backslash\operatorname{Int}\left(\times\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right)=\left(\times\begin{matrix}\overline{A}\\\overline{B}\end{matrix}\right)\cap{}^c\left(\times\begin{matrix}\mathring{A}\\\mathring{B}\end{matrix}\right)\\ = & \left(\times\begin{matrix}\overline{A}\\\overline{B}\end{matrix}\right)\cap\left[\left(\times\begin{matrix}{}^c\mathring{A}\\F\end{matrix}\right)\cup\left(\times\begin{matrix}E\\{}^c\mathring{B}\end{matrix}\right)\right]\\ = & \left[\left(\times\begin{matrix}\overline{A}\\\overline{B}\end{matrix}\right)\cap\left(\times\begin{matrix}{}^c\mathring{A}\\F\end{matrix}\right)\right]\cup\left[\left(\times\begin{matrix}\overline{A}\\\overline{B}\end{matrix}\right)\cap\left(\times\begin{matrix}E\\{}^c\mathring{B}\end{matrix}\right)\right]\\ = & \left[\times\begin{matrix}\overline{A}\cap{}^c\mathring{A}\\\overline{B}\cap F\end{matrix}\right]\cup\left[\times\begin{matrix}\overline{A}\cap E\\\overline{B}\cap{}^c\mathring{B}\end{matrix}\right]=\left[\times\begin{matrix}\partial A\\\overline{B}\end{matrix}\right]\cup\left[\times\begin{matrix}\overline{A}\\\partial B\end{matrix}\right],\ c.\ q.\ f.\ d. \end{aligned}$$

Les réunis ci-dessus ont pour intersection $\left[\times\frac{\partial A}{\overline{B}}\right]\cap\left[\times\frac{\overline{A}}{\partial B}\right]=\times\frac{\partial A\cap\overline{A}}{\overline{B}\cap\partial B}=\times\frac{\partial A}{\partial B}$, donc la réunion ci-dessus est disjointe ssi A et B sont chacun de bord vide.

Remarque – Si l'on pense la réunion comme une somme (comme le ferait le langage vernaculaire) et le symbole ∂ comme un opérateur de dérivation, l'égalité démontrée ressemble fort à la formule de Leibniz donnant la dérivée d'un produit. Pour un lien (très hors programme) entre différentielle et bord, nous renvoyons la lectrice et le lecteur vers un billet de Terence Tao publié en novembre 2010 sur MathOverflow.net (mots clef : *boundary analogous derivative*).

3. Soit F un fermé. Il vaut alors l'adhérence de son adhérence

$$F=\overline{\overline{F}}=\overline{\partial F\cup\mathring{F}}\underset{\text{section 3.3}}{\overset{\text{exercice 4a}}{=}}\overline{\partial F}\cup\overline{\mathring{F}}\underset{\text{est fermé}}{\overset{\text{chaque bord}}{=}}\partial F\cup\overline{\mathring{F}}.$$

Vu par ailleurs les inclusions[129] $\mathring{F}\subset\mathring{\overline{\mathring{F}}}\subset\mathring{\overline{F}}\overset{F\text{ fermé}}{=}\mathring{F}$, on a égalité partout et les fermés F et $\overline{\mathring{F}}$ ont même intérieur. Chaque bord de fermé étant en outre d'intérieur vide, nous avons montré que *chaque fermé se décompose en un fermé d'intérieur vide et un fermé d'intérieur "plein"*, à l'instar de la "sucette" $\overline{\mathcal{B}}(0,1)\cup[0,a]$ associée à chaque vecteur a de norme au moins 1.

FIG

Remarque – C'est cette décomposition qui a motivé notre définition de la partie Δ dans l'exercice 4.

4.

[129] *cf.* exercice 4 section 4.1

(a) Nous avons vu en exemple dans le cours que les vecteurs de norme rationnelle formaient une partie dense d'intérieur vide lorsque E est non nul.

(b) Soit $r > 0$ tel que $\mathring{\mathcal{B}}(i, r) \subset \Delta$ et supposons par l'absurde $d := d(i, \partial F) > 0$. On peut alors imposer $r < d$, de sorte qu'aucun point de $\mathring{\mathcal{B}}(i, r)$ ne tombe dans ∂F (un tel point serait à distance $< r$ de i, ce qui contredirait la minimalité de d). Il s'ensuit les inclusions

$$\mathring{\mathcal{B}}(i, r) \subset \Delta \backslash \partial F = \left[\partial F \amalg \left(\mathring{F} \cap D\right)\right] \backslash \partial F \subset \mathring{F} \cap D \subset D,$$

ce qui montre que i est un point intérieur à D, contredisant la vacuité de $\mathring{D}$.

On a donc la nullité $d(i, \partial F) = 0$, laquelle équivaut à l'appartenance $i \in \overline{\partial F} = \partial F$ (chaque bord est fermé). Il en résulte l'inclusion $\mathring{\Delta} \subset \partial F$, d'où (en prenant les intérieurs) l'inclusion $\mathring{\Delta} \subset \operatorname{Int} \partial F = \emptyset$ (le bord de chaque fermé est d'intérieur vide), *c. q. f. d.*

(c) On a les inclusions

$$\Delta = \underbrace{\partial F}_{\subset \overline{F} = F} \cup \underbrace{\left(\mathring{F} \cap D\right)}_{\subset \mathring{F} \subset F} \subset F \cup F = F, \text{ d'où } \overline{\Delta} \subset \overline{F} = F.$$

Puisque Δ inclut le fermé ∂F, son adhérence $\overline{\Delta}$ inclut déjà ∂F.

Soit $f \in \mathring{F}$, soit $O \subset F$ un ouvert contenant f. Soit (par densité de D) une suite $d \in D^{\mathbb{N}}$ tendant vers f. Puisque O est ouvert, chaque terme de la suite d tombe à partir d'un certain dans $O \subset \mathring{F}$, *a fortiori* dans $\mathring{F} \cap D$, d'où l'appartenance $\ell = \lim d \in \overline{\mathring{F} \cap D} \subset \overline{\Delta}$.

Des trois inclusions précédentes résultent

$$F = \mathring{F} \cup \partial F \subset \Delta \cup \overline{\Delta} = \overline{\Delta} \subset F, \text{ d'où l'égalité désirée } \overline{\Delta} = F.$$

(d) Nous avons déjà vu que chaque bord est fermé. Par ailleurs, le fermé F s'écrit $F \backslash \emptyset = \overline{\Delta} \Big\backslash \mathring{\Delta} = \partial \Delta$, donc est un bord (mieux : est le bord d'une partie *d'intérieur vide*).

—

5 Topologie trace

On garde l'espace vectoriel normé E et la partie $A \subset E$ évoqués.

Afin d'unifier le vocabulaire, nous dirons

« *trace sur* A *de* » au lieu de « *intersection avec* A *de* » (visualiser que A laisse une "trace" après intersection).

FIG

Définition – Propriété (fermés, ouverts, voisinages relativement à une partie)

On appelle ***fermé (relatif) de*** *A la trace de tout fermé sur A.*

On appelle ***ouvert (relatif***[130]*)* ***de*** *A la trace de tout ouvert sur A.*

Soit $a \in A$. On appelle ***voisinage de*** *a* ***dans*** *A (ou* ***relativement à*** *A) la trace de tout voisinage de a sur A.*

Remarque – L'intérêt en classes préparatoires de la topologie trace[131] est de pouvoir faire de l'analyse sur des parties d'espaces vectoriels normés qui *ne sont pas elles-mêmes des espaces vectoriels normés*, à l'instar de $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}^*$, $[0,1]$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{U}$, des groupes linéaires matriciels... Un point de vue plus commode (mais hors programme) serait de parler de la distance de E restreinte à A^2 et de faire de la topologie avec cette distance induite.

Exemples[132]

1. $[0,1[$ est ouvert dans $\mathbb{R}_+$ (trace de l'ouvert $]-1,1[$ de $\mathbb{R}$).
2. $]0,1]$ est fermé dans $\mathbb{R}^*$ (trace du fermé $\mathbb{R}_+$ de $\mathbb{R}$).
3. $[0,1]$ est ouvert dans $[0,1]$ (trace de l'ouvert plein de $\mathbb{R}$).
4. $\{18\}$ est ouvert dans $\mathbb{Z}$ (trace de l'ouvert $]17,19[$ de $\mathbb{R}$).
5. $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ est fermé dans $\mathbb{Q}$ (trace du fermé $[0,1]$ de $\mathbb{R}$).
6. $\left\{e^{i\theta}\right\}_{\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]}$ est fermé dans $\mathbb{U}$ (trace du fermé $\mathbb{R}_+^2$ de $\mathbb{C}$).
7. $\{(a,a)\}_{a \in [0,2]}$ est voisinage de $(1,1)$ dans la diagonale de $\mathbb{R}^2$ (trace du voisinage $[0,2]^2$ dans $\mathbb{R}^2$).
8. chaque demi-disque de diamètre "horizontal" et "bombé vers le haut" est voisinage de son centre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ (trace du disque plein associée dans $\mathbb{R}^2$).

FIG pour chaque

9. $\left\{\begin{pmatrix} \operatorname{th} a & \sin\theta \\ 0 & \arctan t \end{pmatrix}\right\}_{a,t,\theta \in \mathbb{R}}$ est voisinage de la matrice nulle dans l'ensemble des matrices réelles triangulaires supérieures (trace du voisinage[133] $\begin{matrix} \operatorname{Im}\operatorname{th} \times \operatorname{Im}\sin \\ \times\, \mathbb{R} \times \operatorname{Im}\arctan \end{matrix} = \begin{matrix}]-1,1[\times [-1,1] \\ \times\, \mathbb{R} \times \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\end{matrix}$ dans $M_2(\mathbb{R})$).

[130] On dit aussi d'une telle partie qu'elle est ***fermée dans*** *A* ou encore ***fermée relativement à*** *A*. (*Idem* en remplaçant « fermé » par « ouvert ».)

[131] *Culture* : la ***topologie trace*** de A est formée des ouverts de A.

[132] Dans chacun de ces exemples, le contexte doit permettre de pouvoir retrouver un espace vectoriel normé E sous-jacent à la partie considérée.

[133] Ainsi abusivement présenté, le produit cartésien se rapporte aux quatre coordonnées dans $M_2(\mathbb{R})$ selon la place de chacun des facteurs.

Remarques[134]

• Chaque ouvert de A est une partie de A.

• Chaque partie de E est ouverte (tout court) ssi elle est ouverte dans E, ce qui motive la terminologie.

• Les parties $A = E \cap A$ et $\emptyset = \emptyset \cap A$ sont ouvertes dans A (car E et $\emptyset$ sont ouverts). Plus généralement, on vérifiera aisément que les ouverts de A satisfont les axiomes d'une topologie (stabilité par intersection finie et par réunion).

• Chaque partie de A ouverte (tout court) est un ouvert de A : en effet, chaque ouvert inclus dans A est la trace d'un ouvert (lui-même) sur A.

• La réciproque est fausse dès que E est non nul : en effet, la partie $A = E \cap A$ étant ouverte dans A (car E est ouvert), la réciproque impliquerait le caractère ouvert de A, ce qui est faux quand A est une boule fermée (car $E \neq \{0\}$).

Culture hors programme **(topologie trace)**. À l'aide de la topologie trace de A, on pourrait définir relativement à A, outre les fermés et les voisinages (au programme), toutes les notions topologiques habituelles :

1. boule ouverte (trace sur A d'une boule ouverte centrée dans A), boule fermée, sphère (définitions analogues)[135] ;
2. tendance séquentielle (tendance d'une suite de $A^{\mathbb{N}}$ vers un élément de A) ;
3. convergence, divergence (tendance ou non vers un point de A) ;
   (Pour les points suivants, on évoque une partie $P \subset A$.)
4. point adhérent de P (point de A adhérant à P) ;
5. point intérieur à P (centre d'une boule de A incluse dans P) ;
6. adhérence $A \cap \overline{P}$ (ensemble des points adhérents de P dans A, plus petit fermé de A incluant P) ;
7. intérieur $A \Big\backslash \left(A \cap \overline{A \setminus P}\right)$ (ensemble des points intérieurs à P dans A, plus grand ouvert de A inclus dans P) ;
8. frontière $A \cap \operatorname{Fr} P$ (adhérence dans A privée de l'intérieur).

On prendra garde à ce que la *convergence* n'est pas toujours conservée, les limites de suites convergentes pouvant "s'échapper" de la partie A quand celle-ci n'est pas fermée. Par exemple, chaque suite de rationnels tendant vers $\sqrt{2}$ n'est pas convergente dans $\mathbb{Q}$ et la suite $\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{X^N}{N!}\right)_{N \in \mathbb{N}}$ tendant uniformément dans $C([0,1], \mathbb{R})$ vers $\exp$ n'est pas convergente dans $\mathbb{R}[X]$.

Propriétés[136] (caractérisation des fermés, voisinages et ouverts relatifs)

1. *Les fermés (resp. ouverts) de A sont les complémentaires dans A des ouverts (resp. fermés) de A.*
2. *Soit $a \in A$. Les voisinages de a dans A sont alors les parties de A incluant un ouvert de A contenant a.*

[134] Toutes ces remarques ont un homologue obtenu en remplaçant « ouvert » par « fermé ».

[135] *Attention* : les boules et sphères de A peuvent avoir plusieurs centres et rayons.

[136] *Sanity check* : quand $A = E$, on retrouve la caractérisation topologique des fermés, celle des voisinages en termes d'ouverts et celles des ouverts en termes de boules.

3. *(hors programme) Soit $O \subset A$. Alors O est un ouvert de A ssi, pour chaque $o \in O$, il y a une boule ouverte de A contenant o et incluse dans O.*

Démonstration

1. L'application "complémentaire dans A" (définie sur $\mathfrak{P}(A)$) étant involutive, les deux énoncés respectifs sont équivalents. Montrons le premier.

   Soit F un fermé de A, soit F' fermé tel que $F = F' \cap A$. Le complémentaire de F dans A s'écrit alors

   $$A \setminus F = A \setminus (F' \cap A) = A \setminus F' = A \cap (E \setminus F') \text{ où } E \setminus F' \text{ est ouvert } (F' \text{ étant fermé}),$$

   donc est un ouvert de A. Échanger « fermé » et « ouvert » montrerait réciproquement que le complémentaire dans A de chaque ouvert de A est fermé dans A.
2. Soit V un voisinage de a dans A, soit V' un voisinage de a tel que $V = V' \cap A$, soit $O \subset V'$ un ouvert contenant a. Alors la partie $V = V' \cap A$ de A inclut $O \cap A$, laquelle intersection est un ouvert de A contenant a.

   FIG $V' := V \cup O$ après

   Soit $V \subset A$ incluant un ouvert de A contenant a, soit O ouvert tel que $a \in O \cap A \subset V$. La partie $V' := V \cup O$ est alors un voisinage de a et sa trace sur A vaut

   $$V' \cap A = (V \cup O) \cap A = \underbrace{(V \cap A)}_{=V \text{ car } V \subset A} \cup (O \cap A) = V \cup \underbrace{(O \cap A)}_{\subset V} = V, \text{ ce qui conclut.}$$
3. $\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $O' \subset E$ ouvert tel que $O = A \cap O'$. Soit $o \in O$. On a alors d'une part $o \in O'$, d'où (puisque O' est ouvert) une boule ouverte $\mathcal{B}$ telle que $o \in \mathcal{B} \subset O'$, d'autre part $o \in A$, d'où $o \in A \cap \mathcal{B} \subset A \cap O' = O$, ce qui conclut.

   $\boxed{\Longleftarrow}$ On montre comme à l'exercice 1a section 4.2 que O est la réunion des boules ouvertes de A incluses dans O. La partie O est donc ouverte dans A comme réunion d'ouverts de A.

   Remarque – La démonstration montre que les ouverts de A sont les réunions de boules ouvertes de A.

Propriété[137] (critère séquentiel pour être fermé dans une partie donnée)

Soit $F \subset E$. Alors F est fermé dans A ssi

$$F \subset A \text{ et } \begin{matrix} \forall f \in F^{\mathbb{N}} \\ \forall \alpha \in A \end{matrix}, \ f_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \alpha \Longrightarrow \alpha \in F.$$

Démonstration

[137] *Sanity check* : quand $A = E$, on retrouve la caractérisation séquentielle des fermés.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit F' fermé tel que $F = F' \cap A$. Le fermé F' inclut alors F, donc son adhérence $\overline{F}$, d'où les égalités

$$F \overset{F \subseteq \overline{F}}{=} \overline{F} \cap F = \overline{F} \cap (F' \cap A) = \left(\overline{F} \cap F'\right) \cap A \overset{\overline{F} \subseteq F'}{=} \overline{F} \cap A.$$

Soient ensuite $f \in F^{\mathbb{N}}$ et $\alpha \in A$ tels que $f \longrightarrow \alpha$. La limite $\alpha = \lim f$ tombe alors dans $\overline{F}$; étant par ailleurs dans A, elle tombe dans $\overline{F} \cap A = F$, *c. q. f. d.*

$\boxed{\Longleftarrow}$ Pour chaque $\alpha \in \overline{F} \cap A$, on a $\alpha \in \overline{F}$, d'où un $f \in F^{\mathbb{N}}$ tel que $f \longrightarrow \alpha$, donc $\alpha \in F$, ce qui montre l'inclusion $\overline{F} \cap A \subset F$ et l'on a égalité vu par ailleurs les inclusions $\left\{ \begin{array}{l} F \subset \overline{F} \\ F \subset A \end{array} \right.$. La partie $F = \overline{F} \cap A$ est alors fermée dans A vu que $\overline{F}$ est fermé.

Remarque – La démonstration montre que F est fermé dans A ssi $F = \overline{F} \cap A$, ce qui permet d'expliciter un fermé[138] F' tel que $F = F' \cap A$.

Exercices d'application

1. *Décrire les fermés de $\mathbb{Z}$, ses ouverts, ses frontières.*
   Bonus : *décrire ses boules et ses sphères.*
2. *Soit F un espace vectoriel normé dont E est un sous-espace vectoriel et dont la norme étend*[139] *celle de E.*
   (a) *Montrer que les fermés de A vu comme partie de E sont ceux de A vu comme partie de F.*
   (b) *Même question en remplaçant « fermés » par « ouverts ».*

---

1. Imposons $E = \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{Z}$. La partie $A = \bigcup_{a \in A} \{a\} = \bigcup_{a \in A}]a-1, a+1[$ est alors ouverte dans $\mathbb{Z}$ comme réunion d'ouverts de $\mathbb{Z}$, donc (par passage au complémentaire) chaque partie de $\mathbb{Z}$ est fermée. Puisque $\mathring{A} = A = \overline{A}$, la frontière $\operatorname{Fr} A = A \backslash A$ est vide. Finalement, chaque partie de $\mathbb{Z}$ est fermée et ouverte et l'unique frontière est le vide.

   Soient $z \in \mathbb{Z}$ et $r > 0$: la sphère $\mathcal{S}(z, r) \cap \mathbb{Z}$ est alors ou bien la paire $\{z - r, z + r\}$ (si r est entier) ou bien vide (sinon) et est de diamètre pair dans tous les cas ($2r$ ou 0). Réciproquement, chaque paire entière de diamètre pair est de la forme $\{a, a + 2n\} = \mathcal{S}(a + n, n) \cap \mathbb{Z}$ pour un certain $(a, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ et la partie vide est n'importe quelle sphère de $\mathbb{Z}$ de rayon $\frac{1}{2}$. On montrerait de même grâce aux égalités

$$\begin{array}{l} \forall a \in \mathbb{Z} \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{array}, \ \overline{\mathcal{B}}(a + n, n) = [a, a + 2n] = \mathring{\mathcal{B}}(a + n, n + 1)$$

[138] On pourra en effet toujours imposer $F' := \overline{F}$.

[139] On dit que E est un ***sous-espace vectoriel normé*** de F.

que les boules[140] de $\mathbb{Z}$ sont les segments entiers de diamètre pair, *i. e.* de cardinal impair.

Remarque – Chaque point de z admettant un voisinage $\{z\}$ sans autre point que lui, il n'"interfère" pas avec ses "voisins", il reste "discret". C'est pourquoi la topologie trouvée $\mathfrak{P}(\mathbb{Z})$ (la plus grande possible) est qualifiée de ***discrète***.

2. Indiquons en indice l'espace vectoriel normé (E ou F) dont on voit A comme partie.

   (a) Soit $C \subset F$ et rappelons le critère séquentiel des fermés de A_F :

$$C \text{ fermé dans } A_F \iff C \subset A \text{ et } \begin{array}{c} \forall c \in C^{\mathbb{N}} \\ \forall \alpha \in A \end{array}, \ c \longrightarrow \alpha \Longrightarrow \alpha \in C.$$

   Le seul endroit où apparaît l'espace vectoriel normé F est la tendance $c \longrightarrow \alpha$, laquelle se réécrit $d_F(c_n, \alpha) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Or, dans le contexte du membre de droite de l'équivalence ci-dessus, les inclusions $C \subset A \subset E$ forcent les appartenances $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n, \alpha \in E$, d'où les égalités $\forall n \in \mathbb{N},\ d_F(c_n, \alpha) = d_E(c_n, \alpha)$ sachant que la norme de F (*a fortiori* sa distance) prolonge celle de E, ce qui montre que la tendance $c \longrightarrow \alpha$ de ce membre de droite peut être vue dans F comme dans E. Ce membre de droite est par conséquent inchangé si l'on remplace F par E, donc celui de gauche non plus, d'où l'équivalence désirée $[C \text{ fermé dans } A_F] \iff [C \text{ fermé dans } A_E]$.

   Remarque – **Culture hors programme**. Dans le critère séquentiel des fermés de A, la tendance $c \longrightarrow \alpha$ se réécrit $d_A(c_n, \alpha) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ où d_A dénote la distance de A (*i. e.* la restriction de d_E à A^2), seule "trace" du cadre E sous-jacent. "Être fermé dans A" s'exprime donc entièrement en termes de l'espace métrique A : on dit que c'est une notion *intrinsèque* à A.

   (b) Les ouverts de A_E sont les complémentaires des fermés de A_E, *i. e.* (par la question 2a) les complémentaires des fermés de A_F, *i. e.* sont les ouverts de A_F.

Remarque – Il n'y a donc aucune ambigüité à parler des fermés ou des ouverts de E tout court.

---

6 Annexe

6.1 Récapitulatif des notions invariantes par passage à une norme équivalente

Cette section rassemble les notions invariantes par passage à une norme équivalente vues précédemment :

[140] On exclut comme d'habitude la "boule ouverte de rayon nul" $\emptyset$.

1. le caractère *borné* (d'une partie, d'une suite, d'une application) ;
2. la "relation" de *tendance séquentielle* (entre suites et points) ;
3. les caractères *convergent* et *divergent* (d'une suite) ;
4. les "relations" "être *adhérent/intérieur* à" (entre points et parties) ;
5. la "relation" "être un *voisinage* de" (entre parties et points) ;
6. la relation "être *dense dans*" (entre parties) ;
7. les caractères *dense* et "d'*intérieur vide*" ;
8. les applications "*adhérence*" $P \mapsto \overline{P}$ et "*intérieur*" $P \mapsto \mathring{P}$;
9. les caractères *ouvert*, *fermé* et "être une *frontière*".

Par soucis de complétude, nous rajoutons dès à présent les notions à venir :

1. la "relation" de *tendance fonctionnelle* en un point donné (entre applications et points) ;
2. la *continuité en* un point donné, la *continuité sur* une partie donnée et la *continuité* tout court (d'une application) ;
3. la *continuité uniforme* et le caractère *lipschitzien*[141] ;
4. la *compacité* (d'une partie) ;
5. les *composantes connexes par arcs* (d'une partie) ;
6. le caractère *connexe par arcs* (d'une partie).

Résumé express de preuve. Soient N une norme sur E et $\alpha > 0$ un réel tel que $N \leq \alpha\mathcal{N}$. Chaque suite tendant vers 0 pour $\mathcal{N}$ tend alors vers 0 pour N, donc chaque tendance $a \longrightarrow \ell$ pour $\mathcal{N}$ reste une tendance pour N, donc (par la caractérisation séquentielle des fermés) chaque fermé pour N l'est pour $\mathcal{N}$, donc (par la caractérisation topologique des fermés) chaque ouvert pour N est ouvert pour $\mathcal{N}$. Or toutes les notions ci-dessus peuvent s'exprimer en termes d'ouverts (à l'exception des caractères borné, uniformément continu et lipschitzien qui se traitement directement à l'aide de la majoration $N \leq \alpha\mathcal{N}$).

6.2 Sur le choix du corps de base (hors programme)

Contrairement au cas des espaces vectoriels où le programme propose un corps de base K quelconque (tout en limitant la pratique au corps $\mathbb{K}$), il y a une "véritable" raison pour imposer $K = \mathbb{K}$ dans les espaces vectoriels normés.

Avant d'exposer cette raison, prenons le temps de préciser en quoi le corps $\mathbb{R}$ serait ou non "naturel", "intuitif".

Les réels sont introduits par Issac Newton dans ses *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*[142] (1687) où furent couchés les axiomes de la dynamique encore

[141] Caractère parfois appelé *lipschitzianité*.

[142] Signalons que la science s'appelait à l'époque « philosophie naturelle ». La lectrice et le lecteur curieux de l'historicité de ce terme pourront consulter *l'invention de la science* de Guillaume Carnino (2015).

enseignés de nos jours en classes préparatoires – sous un langage certes différent. Même s'il faudra attendre Richard DEDEKIND pour parler effectivement de *nombres* réels, ces derniers sont vus par NEWTON, et dans l'esprit des "proportions" des *Éléments* d'EUCLIDE (env. -300 av. J.-C.), comme "*rapports* de grandeurs" : ils permettent d'associer à chaque "grandeur" une *mesure* en la rapportant à une grandeur étalon (unité). Ils se distinguent en cela des nombres entiers, consacrés à l'*itération* de nos actes, à l'instar du dénombrement (où l'on itère "ajouter 1") ou de la définition de suites par récurrence :

les naturels servent à *itérer*, les réels à *mesurer*.

Contrairement toutefois aux "nombres-actes" (les naturels), les "nombres-mesures" (les réels) sont une *pure fiction*. En pratique, on mesure une longueur en rapportant un certain nombre de fois la longueur étalon – éventuellement subdivisée un certain nombre de fois –, chacun de ces "nombres-de-fois" étant un "nombre-acte" (reporter ou diviser). La mesure se fonde ainsi sur notre *action* et nous n'avons besoin à ce titre pragmatique que d'une infime portion des entiers et des rationnels pour mesurer (les naturels pour *itérer* un acte donné, les rationnels pour le *décomposer* en une succession d'actes plus "fins").

Au risque d'insister, les nombres réels ne font *pas* – quoi que suggère la terminologie ! – partie de la réalité physique. Prétendre les y trouver par un acte de mesure tout en ayant d'une part conscience de la marge d'erreur inhérente à chaque mesure pratique, d'autre part connaissance de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, relèverait d'une attitude incohérente. Quel sens *pratique* par exemple donner à l'incommensurabilité[143] de la longueur du côté d'un carré avec celle de sa diagonale ? à un énoncé tel que « *le rapport des périodes de telle et telle planètes est rationnel* » ?

Il est vrai que les règles-instruments de la réalité physique semblent "coller" à notre intuition du corps $\mathbb{R}$: d'une part le théorème des valeurs intermédiaires semble "réalisé" au sens propre (comment passer d'un pays à un autre frontalier sans en traverser une frontière ?), d'autre part la possibilité de graduer ces règles aussi finement que possible "modélise" bien la densité des rationnels. Quoi qu'il en soit, c'est un fait d'*expérience*, une *habitude* consacrée par la *pratique* que les règles de la réalité physique sont de bons "guides intuitifs"[144] pour étudier le corps $\mathbb{R}$, *a fortiori* ses puissances – comme le corps $\mathbb{C}$.

Mis à part toutefois ce fait d'expérience (qui par ailleurs concerne uniquement le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), le corps $\mathbb{K}$ n'a aucune raison "naturelle" de s'imposer *a priori* comme corps de base dans un espace vectoriel. De fait, le programme propose l'étude sur un corps quelconque et ne se restreint à $\mathbb{K}$ que pour la pratique.

Il existe cependant une telle raison dans les espaces vectoriels *normés*, une raison *mathématique* : un théorème attribué à Alexander Markowich OSTROWSKI[145] dit en substance que les corps "sans trous" (on dirait ***complets***) et munis d'une "norme" telle que $\mathbb{N}$ n'est pas borné (on dirait ***archimédiens)*** sont précisément $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ (et le corps $\mathbb{H}$ des quaternions si l'on retire l'axiome de commutativité).

[143] Le terme *incommensurable* (ancêtre de *irrationel*) signifie littéralement "sans commune mesure" et pointe l'absence *théorique* d'étalon dont les longueurs considérées seraient chacune un multiple entier.

[144] Ces guides intuitifs "échelonnables" motivent d'ailleurs la terminologie de *scalaire* (de *scala* : *échelle*).

[145] On pourra trouver ce théorème dans le chapitre VI (*Valuations*) du tome *Algèbre commutative* de Nicolas BOURBAKI (à la page 127).

Dissipons pour conclure un dernier mythe :

la "continuité" du corps $\mathbb{R}$ n'a rien à voir avec la géométrie d'EUCLIDE.

Soient en effet trois points O, I, J non alignés dans "l'espace", plaçons-nous dans "le plan" (OIJ) et intéressons-nous aux points obtenus à partir du repère (O, I, J) par (itération de) constructions géométriques (droites et cercles). On montrerait alors que les coordonnées de ces points forment un sous-corps $C \subset \mathbb{R}$ stable par racine carré (stabilité signifiant $\forall c \in C,\ c \geq 0 \Longrightarrow \sqrt{c} \in C$) et qu'il s'agit même *du* plus petit tel sous-corps : ses éléments sont appelés les nombres ***constructibles*** (sous-entendu : à la règle et au compas). Or, d'une part une description interne de C par ajouts successifs de racines carrées montrerait que chaque nombre constructible est racine d'un polynôme rationnel de degré une puissance de 2 (l'idée étant que chaque droite ou cercle est déterminé par un polynôme affine ou quadratique), donc est *algébrique*, d'autre part nous verrons au chapitre ? ? ? que les nombres algébriques forment une partie dénombrable de $\mathbb{R}$, au contraire de ce dernier. Par conséquent[146] :

« toute la Géométrie d'Euclide demeure sans lacune si, ayant choisi un système de coordonnées et une unité, on ne considère comme existant que les points dont les coordonnées sont des nombres algébriques [...]. Dans la géométrie euclidienne, si longtemps tenue pour refléter l'espace réel, la discontinuité est donc partout présente, bien qu'elle ne soit pas perçue. *Rien dans les axiomes ni dans les assomptions implicites d'Euclide ne nous conduit logiquement à la continuité. L'idée est d'autant plus importante qu'elle paraît contre-intuitive.*
Il est donc vain d'espérer trouver dans la géométrie euclidienne un concept rigoureux de la continuité. »

[146] Citation extraite de *La création des nombres* de Hourya BENIS SINACEUR (2008), en introduction à la traduction de l'ouvrage *Continuité et nombres irrationnels* de Richard DEDEKIND (1854).

7 Le point des compétences

Formulaire

On fixe un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et une partie $A \subset E$.
La borne supérieure $\sup \emptyset = 0$ sera toujours pensée dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

1. Normes et espaces vectoriels normés

- On appelle ***norme*** sur E toute application $\mathcal{N} : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

1. $\begin{matrix} \forall a \in E \\ \forall \lambda \in \mathbb{K} \end{matrix}$, $\mathcal{N}(\lambda a) = |\lambda| \mathcal{N}(a)$;
2. $\forall a \in E,\ \mathcal{N}(a) = 0 \iff a = 0$;
3. $\forall a, b \in E,\ \mathcal{N}(a+b) \leq \mathcal{N}(a) + \mathcal{N}(b)$.

On appelle ***espace vectoriel normé*** tout espace vectoriel muni d'une norme.

- Pour chaque naturel $n \geq 1$, les trois applications suivantes (définies sur $\mathbb{K}^n$) sont des normes sur $\mathbb{K}^n$:

$$a \mapsto \|a\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |a_i| \qquad a \mapsto \|a\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2} \qquad a \mapsto \|a\|_\infty := \max_{i \in [1,n|]} |a_i|.$$

- Pour chaque ensemble $\mathcal{E}$, l'application $f \mapsto \sup_{\mathcal{E}} |f|$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{B}(\mathcal{E}, \mathbb{K})$ des fonctions $\mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{K}$ bornées, appelée ***la norme de la convergence uniforme***.

- Pour chaque segment réel S infini, les applications $f \mapsto \int_S |f|$ et $f \mapsto \sqrt{\int_S |f|^2}$ sont des normes sur $C(S, \mathbb{K})$, appelées resp. ***la norme de la convergence en moyenne*** et ***la norme de la convergence en moyenne quadratique***.

- Lorsque E est muni d'un produit scalaire, l'application $a \mapsto \sqrt{\langle a \mid a \rangle}$ fait sens et est une norme sur E, appelée ***norme associée*** au produit scalaire de E.

- Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille *finie* d'espaces vectoriels normés, notons $e \mapsto \|e\|_i$ la norme de E_i pour chaque $i \in I$. Est alors une norme sur l'espace vectoriel produit $\prod_{i \in I} E_i$ l'application

$$(a_i)_{i \in I} \mapsto \sup_{i \in I} \|a_i\|_i, \text{ appelée } \textbf{\textit{la norme produit}} \text{ sur } \prod_{i \in I} E_i.$$

Ainsi normé, l'espace $\prod_{i \in I} E_i$ s'appelle ***l'espace vectoriel normé produit*** des E_i (pour i parcourant I).

Pour la suite du formulaire, on évoque une norme sur E, notée indifféremment $\mathcal{N}$ ou $e \mapsto \|e\|$.

- Chaque norme vérifie les ***comparaisons triangualaires*** :

$$\forall a, b \in E,\ |\|a\| - \|b\|| \leq \|a - b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

- On qualifie d'***unitaire*** tout vecteur de norme 1.

- On appelle ***distance*** la fonction $d := \left\{ \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (a,b) & \longmapsto & \|b-a\| \end{array} \right.$. Elle vérifie les trois propriétés suivantes :

1. $\forall a, b \in E,\ d(a,b) = d(b,a)$;
2. $\forall a, b \in E,\ d(a,b) = 0 \Longleftrightarrow a = b$;
3. $\forall a, b, c \in E,\ d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$.

- Soient $c \in E$ un point et $r > 0$ un réel. On appelle ***boule ouverte*** (resp. ***boule fermée***, resp. ***sphère***) de centre c et rayon r les ensembles respectifs

$$\begin{array}{rcl} \mathring{\mathcal{B}}(c,r) & := & \{a \in E\ ;\ d(c,a) < r\} =: \mathcal{B}_o(c,r), \\ \overline{\mathcal{B}}(c,r) & := & \{a \in E\ ;\ d(c,a) \leq r\} =: \mathcal{B}_f(c,r), \\ \mathcal{S}(c,r) & := & \{a \in E\ ;\ d(c,a) = r\} = \overline{\mathcal{B}}(c,r) \Big\backslash \mathring{\mathcal{B}}(c,r)\,. \end{array}$$

On appelle ***boule*** de E toute boule ouverte ou boule fermée de E.

- Chaque boule de E est convexe.

- La partie A est dite ***bornée*** si elle est incluse dans une boule. Chaque application (en particulier chaque suite) à valeurs dans E est dite ***bornée*** si son image est une partie bornée de E.

- On étend les définitions de $\overline{\mathcal{B}}(c,r)$ et $\mathcal{S}(c,r)$ au cas $r = 0$: les singletons sont alors les boules fermées (resp. sphères) de rayon nul au sens des égalités

$$\forall c \in E,\ \overline{\mathcal{B}}(c,0) = \{c\} = \mathcal{S}(c,0)\,.$$

L'on préférera cependant exclure des boules ouvertes la "boule ouverte de rayon nul", de sorte que

chaque boule ouverte est non vide.

2. Suites à valeurs dans un espace vectoriel normé

Soient $a \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$.

- On dit que la suite a ***tend vers*** ℓ si la suite réelle $n \mapsto \|a_n - \ell\|$ tend vers 0, tendance notée alors $a \longrightarrow \ell$ ou

$$a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in [N, \infty[\![,\ \|a_n - \ell\| < \varepsilon.$$

• On dit que la suite a ***converge*** (ou on la qualifie de ***convergente***).s'il y a un point de E vers lequel elle tend. Dans ce cas, un tel point est unique, est appelé ***la limite de*** a et est noté $\lim a$ ou $\lim_{n\to\infty} a_n$.

• Les suites à valeurs dans E convergentes forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$ sur lequel l'application lim est linéaire. En particulier, chaque suite convergente est bornée.

• Lorsque E est une algèbre à multiplication continue, *i. e.* telle que $\sup_{\|a\|=1=\|b\|}^{a,b\in E} \|ab\| < \infty$, le morphisme d'espaces vectoriels lim est un morphisme d'algèbres. Ce sera en particulier le cas si E est une algèbre *de dimension finie*.

• Imposons que E soit une famille *finie* d'espaces vectoriels normés. La convergence de la suite a équivaut alors à celle de chacune de ses suites coordonnées et, dans ce cas, la limite de a est la famille des limites de ses suites coordonnées.

• Imposons E *de dimension finie* et soit $B \subset E$ une partie basique. La suite a converge alors ssi la suite "coordonnée[147]" a^β converge pour chaque $\beta \in B$.

• On dit que la suite a ***diverge*** (ou on la qualifie de ***divergente***) lorsqu'elle ne converge pas.

• On appelle ***extractrice*** (ou ***extraction***) toute application $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ croissant strictement. On appelle ***sous-suite*** (ou ***suite extraite***) de a toute suite de la forme $a \circ x = \left(a_{x(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ où x est une extractrice.

• On appelle ***valeur d'adhérence*** de la suite a la limite de toute sous-suite de a convergente.

• Si a converge, alors chacune de ses sous-suites tend vers $\lim a$. En d'autres termes, la suite a diverge dès qu'elle possède au moins deux valeurs d'adhérence.

3. Topologie

• On appelle ***point intérieur*** de A le centre de toute boule ouverte incluse dans A. On qualifie la partie A d'***ouverte*** (ou on l'appelle un ***ouvert*** de E) si chacun de ses points lui est intérieur. Par exemple, chaque boule ouverte de E est ouverte.

• L'ensemble des ouverts de E est stable par intersection finie et par réunion.

• Pour chaque point $i \in E$, on appelle ***voisinage*** de i toute partie de E dont i est intérieur.

• Pour chaque point $\alpha \in E$, il y a une suite à valeurs dans A tendant vers α ssi chaque voisinage de α rencontre A : on appelle alors α un ***point adhérent*** de A (ou on dit que α ***adhère à*** A).

[147] définie par la composée de a à gauche par la projection sur la droite $\mathbb{K}\beta$ parallèlement à $\bigoplus_{b\neq\beta}^{b\in B} \mathbb{K}b$

• On qualifie la partie A de ***dense*** si chaque point de E lui adhère, *i. e.* si $\overline{A} = E$.

• La partie A contient chacun de ses points adhérents ssi elle est le complémentaire d'un ouvert de E : on qualifie alors la partie A de ***fermée*** (ou on l'appelle un ***fermé*** de E). Par exemple, sont fermées chaque sphère de E, chaque boule fermée de E et chaque sous-espace vectoriel de dimension finie de E.

• L'ensemble des fermés de E est stable par réunion finie et par intersection.

• On appelle resp. ***intérieur***, ***adhérence***, ***frontière*** de A l'ensemble resp.

1. de ses points intérieurs $\operatorname{Int} A := \left\{a \in E \ ; \ \exists r > 0, \ \mathring{\mathcal{B}}(a, r) \subset A\right\} =: \mathring{A}$;
2. des points lui adhérant $\operatorname{Adh} A := \left\{\ell \in E \ ; \ \exists a \in A^{\mathbb{N}}, \ a \longrightarrow \ell\right\} =: \overline{A}$;
3. de ses points adhérents non intérieurs $\operatorname{Fr} A := \operatorname{Adh} A \setminus \operatorname{Int} A = \overline{A} \Big\backslash \mathring{A}$.

• Pour chaque partie $F \subset E$, on a l'équivalence

$$\left[\begin{array}{c} F \text{ est l'intersection} \\ \text{d'un fermé avec } A \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[F \subset A \text{ et } \begin{array}{c} \forall f \in F^{\mathbb{N}} \\ \forall \alpha \in A \end{array}, \ f_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \alpha \Longrightarrow \alpha \in F\right] :$$

la partie F est alors appelée un ***fermé*** (***relatif***) ***de*** A.

• Pour chaque partie $O \subset E$, on a l'équivalence

$$\left[\begin{array}{c} O \text{ est l'intersection} \\ \text{d'un ouvert avec } A \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} O \text{ est le complémentaire} \\ \text{dans } A \text{ d'un fermé de } A \end{array}\right] :$$

la partie O est alors appelée un ***ouvert*** (***relatif***) ***de*** A.

• Soit $a \in A$. Pour chaque $V \subset E$ on a alors l'équivalence

$$\left[\begin{array}{c} V \text{ est l'intersection d'un} \\ \text{voisinage de } a \text{ avec } A \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} V \text{ inclut un ouvert} \\ \text{de } A \text{ contenant } a \end{array}\right] :$$

la partie V est alors appelée un ***voisinage de*** a ***dans*** A (ou ***relativement à*** A).

4. Normes équivalentes

• Soit N une norme sur E. Les normes N et $\mathcal{N}$ sont qualifiées d'***équivalentes*** si

$$\exists \alpha, \beta > 0, \ \alpha N \leq \mathcal{N} \leq \beta N, \ i. \ e. \text{ si les quotients } \frac{\mathcal{N}}{N} \text{ et } \frac{N}{\mathcal{N}} \text{ sont bornés sur } E \setminus \{0\}.$$

La relation "être équivalente à" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes de E.

• **Équivalence des normes en dimension finie.** (démonstration non exigible)

Quand E est *de dimension finie*, ses normes forment une seule classe d'équivalence.

• Toutes les notions suivantes sont invariantes par passage à une norme équivalente :

1. le caractère *borné* (d'une partie, d'une suite, d'une application) ;
2. la "relation" de *tendance séquentielle* (entre suites et points) ;
3. les caractères *convergent* et *divergent* (d'une suite) ;
4. les "relations" "être *adhérent/intérieur* à" (entre points et parties) ;
5. la "relation" "être un *voisinage* de" (entre parties et points) ;
6. les caractères *dense* et "d'*intérieur vide*" (d'une partie) ;
7. les applications "*adhérence*" $P \mapsto \overline{P}$ et "*intérieur*" $P \mapsto \mathring{P}$;
8. les caractères *ouvert*, *fermé* et "être une *frontière*" (d'une partie).

En particulier, il suffit pour nier l'équivalence de deux normes données d'exhiber deux suites aux tendances différentes.

Exercices d'entraînement

On évoque pour ces exercices un espace vectoriel normé E, une partie $A \subset E$ et un segment réel infini S.

1. ★

   (a) *Montrer que A est fermée ssi elle inclut sa frontière.*

   (b) *Montrer que A est ouverte ssi elle est disjointe de sa frontière.*

2. ★*Soit n un naturel, soit N une norme sur $C(S, \mathbb{K})$ et soit $\overrightarrow{f}$ un n-uplet de fonctions éléments de $C(S, \mathbb{K})$. Donner une condition suffisante et nécessaire simple pour que l'application $a \mapsto N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right)$ soit une norme sur $\mathbb{K}^n$.*

3. ★ *On note resp. G et D le graphe de $\ln$ et la droite $\{0\} \times \mathbb{R}$. Montrer que ce sont des fermés de $\mathbb{R}^2$ dont la somme n'est pas fermée.*

4. ★★

   (a) *Montrer que A est dense ssi $A \backslash \Phi$ est dense pour chaque partie finie $\Phi \subset E$.*

   (b) *Montrer qu'est dense l'intersection de chaque partie dense avec chaque ouvert dense. Discuter les hypothèses.*

5. ★★*Soit t un réel. Donner une condition suffisante et nécessaire "simple" pour que soit une norme sur $\mathbb{R}^2$ l'application $\binom{a}{b} \mapsto \sqrt{a^2 + 2tab + b^2}$. Lorsque cette condition est vérifiée, donner une condition suffisante et nécessaire "simple" pour que cette norme soit équivalente à la norme euclidienne.*

6. ★★*Notons δ l'application*[148] $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{P}(E) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \\ P & \longmapsto & \sup_{a,b \in P} d(a,b) \end{array} \right.$.

   (a) *Montrer que les parties de E bornées sont celles de diamètre fini.*

   (b) *Montrer l'égalité $\delta(A) = \delta\left(\overline{A}\right)$.*

   (c) *Établir pour chaque partie $B \subset E$ les majorations*

   $$\delta(A+B) \leq \delta(A) + \delta(B) \qquad \text{et} \qquad \delta(A \cup B) \leq \delta A + \delta B + \inf_{a \in A, b \in B} d(a,b).$$

   Donner pour chacune des exemples de majoration stricte.

7. ★★*Imposant A fermé, montrer que A est convexe ssi $\frac{A+A}{2} \subset A$.*

8. ★★★*On impose E formé des suites scalaires bornées et muni de la norme uniforme.*

   (a) *Soit $\left({}^n a\right)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente de suites scalaires périodiques dont on note L la limite et soient p et q deux naturels tels que les périodes des suites ${}^p a$ et ${}^q a$ sont premières entre elles. Montrer alors la majoration*

   $$\left\|\left(L_{n+1} - L_n\right)_{n \in \mathbb{N}}\right\| \leq 2\left\|{}^p a - L\right\| + 2\left\|{}^q a - L\right\|.$$

[148] Le réel $\delta(P)$ est appelé le ***diamètre*** de la partie P.

(b) *Montrer que, pour chaque naturel T, les suites T-périodiques forment une partie fermée.*

(c) *Déduire des questions précédentes que les suites périodiques forment une partie fermée de E.*

9. ★★★*Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $s \in S^n$ de coordonnées distinctes et soit N un n-uplet de normes sur $C(S, \mathbb{K})$.*

   (a) *Montrons que l'espace vectoriel $C^n(S, \mathbb{K})$ est normable pour chaque $m \in [0, n|]$ par*
   $$f \mapsto \sum_{i=1}^{m} \left| f^{(i-1)}(s_i) \right| + \sum_{i=m}^{n} N_i\left(f^{(i)}\right).$$

   (b) *On impose que chaque coordonnée de N est la norme uniforme, on évoque un $f \in C^n(S, \mathbb{K})$ et l'on note L la longueur du segment S.*

      i. *Montrer alors les majorations*
      $$\forall i \in [0, n|[, \ \left\| f^{(i)} \right\|_\infty \leq L^{n-i} \left\| f^{(n)} \right\|_\infty + \sum_{j=0}^{n-i-1} L^j \left| f^{(i+j)}(s_{i+j+1}) \right|.$$

      ii. *En déduire pour chaque $m \in [0, n|]$, en abrégeant $C := \sum_{i=0}^{n} L^i$, la majoration*
      $$\sum_{i=m}^{n} \left\| f^{(i)} \right\|_\infty \leq C \left(\left\| f^{(n)} \right\|_\infty + \sum_{i=m}^{n-1} \left| f^{(i-1)}(s_i) \right| \right).$$

      iii. *Conclure à l'équivalence des $n+1$ normes ci-dessus.*

   (c) *Cette équivalence demeure-t-elle dans le cas général ?*

10. ★★★ *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $p, q \geq 1$ deux réels. Montrer alors que*

    l'application $M \mapsto \sup_{\substack{V \in \mathbb{K}^n \\ \|V\|_p = 1}} \|MV\|_q$ *est une norme d'algèbre sur $M_n(\mathbb{K})$ ssi $p \geq q$.*

    *Pour le sens direct, on pourra calculer la norme du projecteur obtenu à partir de la matrice remplie de 1 et utiliser la croissance des moyennes généralisées (*cf. *exo ? ? ? chapitre ? ? ?). Pour le sens réciproque, on pourra établir la sous-additivité de l'application $t \mapsto t^{\frac{q}{p}}$.*

Solutions des exercices d'entraînement

1.

(a) Si A est fermée, *i. e.* si $\overline{A} = A$, on a alors les inclusions $\operatorname{Fr} A = \overline{A} \Big\backslash \mathring{A} = A \Big\backslash \mathring{A} \subset A$. Réciproquement, si A inclut $\operatorname{Fr} A$, vu qu'elle inclut par ailleurs $\mathring{A}$, elle en includra alors la réunion $\mathring{A} \cup \operatorname{Fr} A = \overline{A}$, donc inclura son adhérence, *i. e.* sera fermée.

(b) Si A est ouverte, sa frontière vaudra alors une certaine partie privée de $\mathring{A} = A$, donc sera disjointe de A. Réciproquement, vu que A est toujours incluse dans $\overline{A} = \mathring{A} \cup \operatorname{Fr} A$, si A est de plus disjointe de $\operatorname{Fr} A$, elle sera alors incluse dans $\mathring{A}$, *i. e.* sera ouverte (on pourra – si un besoin formel se fait sentir – développer l'intersection $\left(\mathring{A} \cup \operatorname{Fr} A\right) \cap A$).

2. Notons ν l'application considérée et montrons qu'elle est positivement homogène et vérifie les comparaisons triangulaires. Soient $a, b \in \mathbb{K}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On alors les égalités $\sum_{i=1}^n [\lambda a]_i f_i = \sum_{i=1}^n \lambda a_i f_i = \lambda \sum_{i=1}^n a_i f_i$,

$$\text{d'où } \nu(\lambda a) = N\left(\lambda \sum_{i=1}^n a_i f_i\right) \underset{\text{homogène}}{\overset{N \text{ positiv.}}{=}} |\lambda| \ N\left(\sum_{i=1}^n a_i f_i\right) = \lambda \nu(a).$$

Par ailleurs, vu les égalités

$$\sum_{i=1}^n [a+b]_i f_i = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) f_i = \sum_{i=1}^n (a_i f_i + b_i f_i) = \sum_{i=1}^n a_i f_i + \sum_{i=1}^n b_i f_i,$$

on peut (en utilisant les comparaisons triangulaire pour N) majorer

$$\nu(a+b) = N\left(\sum_{i=1}^n a_i f_i + \sum_{i=1}^n b_i f_i\right) \underset{\text{triangulaire}}{\overset{\text{comparaison}}{\leq}} N\left(\sum_{i=1}^n a_i f_i\right) + N\left(\sum_{i=1}^n b_i f_i\right)$$

par $\nu(a) + \nu(b)$. Vu enfin les équivalences

$$\nu(a) = 0 \iff N\left(\sum_{i=1}^n a_i f_i\right) = 0 \underset{\text{les points}}{\overset{N \text{ sépare}}{\iff}} \sum_{i=1}^n a_i f_i = 0,$$

on peut conclure

$$\begin{aligned}
\nu \text{ est une norme} \quad & \iff \quad \nu \text{ sépare les points de } \mathbb{K}^n \\
& \iff \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}^n, \ [\nu(\lambda) = 0 \implies \lambda = 0] \\
& \iff \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}^n, \ \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0 \implies \lambda = 0\right] \\
& \iff \quad (f_i)_{i \in [1,n|]} \text{ est libre.}
\end{aligned}$$

3. La droite D est fermée en tant que produit cartésien des fermés $\{0\}$ (singleton) et $\mathbb{R}$ (fermé plein) de $\mathbb{R}$. Soient par ailleurs $g \in G^{\mathbb{N}}$ et $c \in \mathbb{R}^2$ tels

que $g \longrightarrow c$. Notons a et b les coordonnées de c et appelons resp. x et y les suites coordonnées de g, de sorte à avoir les tendances $\begin{array}{c} x \longrightarrow a \\ y \longrightarrow b \end{array}$. La continuité de ln en a livre alors la tendance $\ln x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ln a$; or la suite $g : n \mapsto \binom{x_n}{y_n}$ est à valeurs dans le graphe de ln, ce qui s'écrit $\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = \ln x_n$, donc cette tendance se réécrit $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ln a$, d'où les égalités $\ln a = \lim y = b$ et l'appartenance $\binom{a}{b} \in G$, *c. q. f. d.*.

Graphiquement, la somme $G+D$ semble valoir le demi-plan ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, lequel n'est pas fermé (son adhérence $\overline{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}} = \overline{\mathbb{R}_+^*} \times \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ l'inclut strictement). De fait, la suite $n \mapsto \binom{e^{-n}}{-n} + \binom{0}{n}$ est à valeurs dans $G + D$ et tend vers $\binom{0}{0}$: montrons que ce dernier point ne reste pas dans $G + D$, ce qui conclura. Chaque point $g \in G$ a pour abscisse un élément du domaine $\mathbb{R}_+^*$ de définition de ln, donc a une abscisse non nulle ; or cette abscisse est inchangée par ajout à g d'un élément de $\{0\} \times \mathbb{R}$, ce qui montre qu'aucun point de $G + D$ n'est d'abscisse nulle – *a fortiori* $\binom{0}{0}$.

Remarque – Voici un exemple plus algébrique de somme non fermée de fermés (nécessite de connaître la dénombrabilité – *cf.* chp ? ? ?). Les groupes $\mathbb{Z}$ et $\sqrt{2}\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$ sont fermés et dénombrables, leur somme est un sous-groupe dénombrable non discret d'après l'exo ? ? ? (le rapport $\frac{\sqrt{2}}{1}$ étant irrationnel) donc dense : si cette somme dénombrable était fermée, elle vaudra $\mathbb{R}$, lequel n'est pas dénombrable.

4.

(a) Le sens réciproque s'obtient en imposant $\Phi = \emptyset$. Pour le sens direct, une récurrence immédiate permet d'imposer $\operatorname{Card} \Phi = 1$: soit donc $e \in E$, supposons A dense, soit $\ell \in E$ et soient $a \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $a \longrightarrow \ell$ (permis par densité de A). Si la suite a évite e à partir d'un certain rang N, la suite $(a_{n+N})_{n\in\mathbb{N}}$ prendra alors ses valeurs dans $A \setminus \{e\}$ et tend vers ℓ, ce qui conclut. Sinon, on peut extraire de a une suite valant partout e, d'où (par unicité de la limite) l'égalité $e = \ell$ et la suite $\left(\frac{n}{n+1} e\right)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $A \setminus \{e\}$ tend vers ℓ.

Remarque – La dualité adhérence-intérieur livre une solution expéditive : pour chaque partie $\Phi \subset E$ finie, l'intérieur $\mathring{\Phi}$ est vide, donc le complémentaire ${}^c\mathring{\Phi} = \overline{{}^c\Phi}$ est plein.

(b) Soit $D \subset E$ dense, soit $O \subset E$ un ouvert dense, soit $e \in E$, soit $o \in O^{\mathbb{N}}$ telle que $o \longrightarrow e$ (permis par densité de O), soit $r \in \mathbb{R}_+^{*\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathring{\mathcal{B}}(o_n, r_n) \subset O$ (permis par le caractère ouvert de O et par l'axiome du choix), notons ε la suite $n \mapsto \min\left\{r_n, \frac{1}{n+1}\right\}$ (laquelle tend vers 0) et soit $d \in D^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ d_n \in \mathring{\mathcal{B}}(o_n, \varepsilon_n)$ (permis par densité de D et par l'axiome du choix).

FIG

La suite d prend alors ses valeurs dans O (car $d_n \in \mathring{\mathcal{B}}(o_n, r_n) \subset O$ pour chaque naturel n) et tend vers e (car $\|d_n - o_n\| \leq \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $o \longrightarrow e$), ce qui conclut.

Sans le caractère ouvert, le résultat devient faux : les vecteurs de norme resp. rationnelle et irrationnelle forment deux parties denses disjointes. Sans le caractère dense, imposer $D = \emptyset$ ou $O = \emptyset$ empêche l'intersection $D \cap O = \emptyset$ d'être dense (remplacer « vide » par « bornée » suffirait).

5. L'espace $\mathbb{R}^2$ étant de dimension finie, ses normes forment une seule classe d'équivalence, donc la norme $N := \binom{a}{b} \mapsto \sqrt{a^2 + 2tab + b^2}$ est équivalente à celle euclidienne dès lors qu'elle fait sens, ce qui nous ramène à la première question.

Supposons que N soit une norme. Le radical $\sqrt{a^2 + 2tab + b^2}$ fait alors sens pour chaque $\binom{a}{b} \in \mathbb{R}^2$, en particulier quand $\binom{a}{b} = \binom{t}{-1}$, d'où la positivité (sous la racine) de $t^2 + 2tt(-1) + (-1)^2 = 1 - t^2$, ce qui s'écrit aussi $t^2 \leq 1$, *i. e.* $|t| \leq 1$. Par ailleurs, le vecteur $\binom{t}{-1}$ est non nul, donc est d'image par N non nulle (car N sépare les points), ce qui s'écrit $\sqrt{1 - t^2} > 0$, *i. e.* $|t| < 1$.

Supposons réciproquement $|t| < 1$, ce qui donne sens pour chaque $\binom{a}{b} \in \mathbb{R}^2$ à la racine carrée de

$$a^2 + 2tab + b^2 = \underbrace{(a + tb)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(1 - t^2)}_{>0 \text{ car } |t|<1} \underbrace{b^2}_{\geq 0}.$$

Cette décomposition montre par ailleurs l'égalité $N = \binom{a}{b} \mapsto \left\| i\binom{a}{b} \right\|_2$ où l'on a défini $i := \binom{a}{b} \mapsto \binom{a+tb}{\sqrt{1-t^2}b}$. Si l'on montre que i est injective et linéaire, sa composée N avec la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$ fournira (suivant l'exercice d'application 3a section ? ? ?) une norme comme souhaité. La linéarité de i est immédiate. Soit enfin $\binom{a}{b} \in \operatorname{Ker} i$: la nullité de l'ordonnée $\sqrt{1 - t^2}b$ et la distinction $t^2 \neq 1$ livrent alors la nullité de b, d'où celle de l'abscisse $a + tb = a$, ce qui conclut.

Remarque – L'injection i fait plus que transporter la norme euclidienne, elle en transporte le produit scalaire. On vérifiera en effet que la norme N est induite par le produit scalaire associé à la base $\left(\binom{1}{0}, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\binom{-t}{1}\right)$. Lorsque $t = 0$, on retrouve la norme euclidienne, le produit scalaire usuel ainsi que la base canonique.

6.

(a) Soit $P \subset E$. Supposons P bornée et soit $R > 0$ tel que $P \subset \mathring{\mathcal{B}}(0, R)$. On a alors pour chaques $a, b \in P$ les majorations

$$\|a - b\| \leq \|a\| + \|b\| \leq R + R, \text{ d'où } \delta(P) \leq 2R.$$

Supposons à présent $\delta(P)$ fini. La partie vide étant bornée, on peut imposer $P \neq \emptyset$. On évoque alors un $p \in P$, ce qui donne sens pour chaque $a \in P$ aux majorations

$$\|a\| \leq \|p\| + \|a - p\| \leq \|p\| + \delta(P), \text{ d'où le caractère borné de } P.$$

FIG

(b) La borne supérieure $\delta\left(\overline{A}\right)$ portant sur un ensemble $\overline{A}^2$ plus grand que l'ensemble A^2 sur lequel porte $\delta(A)$, on a la minoration $\delta\left(\overline{A}\right) \geq \delta(A)$. Montrons réciproquement $\forall \varepsilon > 0,\ \delta\left(\overline{A}\right) \leq \delta(A) + 2\varepsilon$, ce qui conclura à la majoration $\delta\left(\overline{A}\right) \leq \delta(A)$ et à l'égalité voulue. Soit donc $\varepsilon > 0$, soient $\alpha, \beta \in \overline{A}$ et soient $a, b \in A$ tels que $d(a, \alpha), d(b, \beta) < \varepsilon$. On a alors les majorations

$$d(\alpha, \beta) \leq d(\alpha, a) + d(a, b) + d(b, \beta) \leq \varepsilon + \delta(A) + \varepsilon, \text{ ce qui conclut.}$$

(c) Soit $B \subset E$ et abrégeons $d(A, B) := \inf_{a \in A}^{b \in B} d(a, b)$.
Soient $a, \alpha \in A$ et $b, \beta \in B$. On a alors les majorations

$$\begin{aligned} \|a + b - (\alpha + \beta)\| &= \|(a - \alpha) + (b - \beta)\| \leq \|a - \alpha\| + \|b - \beta\| \\ &\leq \delta(A) + \delta(B), \text{ d'où la première majoration.} \end{aligned}$$

Lorsque $E = \mathbb{C}$ normé par le module et A (resp. B) est le segment reliant 0 à 1 (resp. i), la somme $A + B$ est le carré de côtés $0, 1, 1 + i, i$, donc est de diamètre $\sqrt{2}$ (longueur des diagonales), ce qui est un cas de majoration stricte.

FIG

Soient par ailleurs $c, \gamma \in A \cup B$. Si c et γ tombent dans A (resp. B), la distance les séparant est majorée par $\delta(A)$ (resp. $\delta(B)$), donc par $\delta(A) + \delta(B)$, *a fortiori* par $\delta(A) + \delta(B) + d(A, B)$. Supposons à présent $(c, \gamma) \in A \times B$, soit $\varepsilon > 0$ et soient $(a, b) \in A \times B$ tel que $d(a, b) < d(A, B) + \varepsilon$. On a alors les majorations

$$\begin{aligned} \delta(A \cup B) &\leq d(c, \gamma) \leq d(c, a) + d(a, b) + d(b, \gamma) \\ &\leq \delta(A) + d(A, B) + \varepsilon + \delta(B), \text{ ce qui conclut} \end{aligned}$$

(raisonnement symétrique si $(c, \gamma) \in B \times A$).

FIG

Lorsque A vaut B et contient au moins deux points (soient-en $a \neq b$), la majoration obtenue se réécrit $\delta(A) \leq 2\delta(A)$ et est stricte car $\delta(A) \geq d(a, b) > 0$.

7. On raisonne par dichotomie comme dans l'exo 3b ? ? ? section *Convexité de l'épigraphe, graphe et cordes* chapi convex ? ? ?. Soient $a, b \in A$ et $t \in [a, b]$: par dichotomie, on peut évoquer une suite $(t_n) \in [a, b]^{\mathbb{N}}$ tendant vers t telle que

$$\begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ et } \forall n \in [2, \infty[\![, \ \exists p, q \in [\![0, n[\![, \ t_n = \frac{t_p + t_q}{2}.$$

Vu la caractère fermé et A et la tendance $t_n \longrightarrow t$, il suffit d'établir les appartenances

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ t_n \in A, \text{ ce que nous allons faire par récurrence forte.}$$

Puisque $\{t_0, t_1\} = \{a, b\} \subset A$, on a bien les appartenances ci-dessus aux rangs 0 et 1. Soit ensuite $n \in [2, \infty[\![$ tel que $\forall i \in [\![0, n[\![, \ t_i \in A$ et soient $p, q \in [\![0, n[\![$ tels que $t_n = \frac{t_p + t_q}{2}$ (permis par construction de la suite dichotomique) : on a alors l'appartenance $t_n = \frac{t_p + t_q}{2} \in \frac{A + A}{2} \subset A$, *c. q. f. d.*

Sanity check : retrouvons le résultat de l'exercice mentionné. Soit f continue sur I. Son épigraphe $\mathcal{E}$ est alors fermé (preuve pédestre), donc sa convexité se réécrit $\frac{\mathcal{E}+\mathcal{E}}{2} \subset \mathcal{E}$, *i. e.* $\begin{array}{c}\forall a,b\in I\\ \forall a',b'\in\mathbb{R}\end{array}$, $\left\{\begin{array}{c} a'\geq f(a)\\ b'\geq f(b)\end{array}\right. \Longrightarrow \frac{a'+b'}{2} \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, ou encore $\forall a,b\in I,\ f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}$.

8.

(a) Abrégeons $\binom{u}{v} := \binom{^p a}{^q a}$ et notons U et V les périodes respectives des suites u et v. Soient $\lambda,\mu\in\mathbb{Z}$ tels que $\lambda U+\mu V=1$ (légitime car U et V sont premiers entre eux). Si $\lambda\mu>0$, le membre de gauche est alors ou bien négatif (cas $\lambda,\mu<0$) ou bien minoré par 2 (car $\lambda,\mu,U,V\geq 1$), ce qui est absurde. Nous pouvons donc, quitte à échanger $\binom{u}{\lambda}$ et $\binom{v}{\mu}$, imposer $\lambda\geq 0\geq\mu$. On a alors pour chaque naturel n les égalités

$$u_n \underset{U\text{-périodique}}{\overset{u\text{ est}}{=}} u_{n+\lambda U} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} \underset{V\text{-périodique}}{\overset{v\text{ est}}{=}} v_{n+1+|\mu|V} \overset{\lambda V-|\mu|U=1}{=} u_{n+\lambda U},$$

d'où les majorations

$$|u_{n+1}-v_n| = |u_{n+\lambda U}-v_{n+\lambda U}| \leq \|u-v\| \leq \|u-L\|+\|L-v\|,$$

ce qui permet de majorer $|L_{n+1}-L_n|$ par

$$\underbrace{|L_{n+1}-u_{n+1}|}_{\leq\|L-u\|}+\underbrace{|u_{n+1}-v_n|}_{\leq\|u-L\|+\|L-v\|}+\underbrace{|v_n-L_n|}_{\leq\|v-L\|}\leq 2\|v-L\|+2\|u-L\|, \text{ c. q. f. d.}$$

(b) Soit $T\in\mathbb{N}$, notons $\mathcal{T}$ l'espace des suites scalaires T-périodiques, soient $a\in\mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ et $\ell\in E$ tels que ${}^n a \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$. On peut alors à $n\in\mathbb{N}$ fixé et pour chaque naturel N majorer $|\ell_{n+T}-\ell_n|$ par

$$\underbrace{\left|\ell_{n+T}-{}^N a_{n+T}\right|}_{\leq\|\ell-{}^N a\|}+\underbrace{\left|{}^N a_{n+T}-{}^N a_n\right|}_{=0\text{ car }{}^N a\text{ est }T\text{-périodique}}+\underbrace{\left|{}^N a_n-\ell_n\right|}_{\leq\|{}^N a-\ell\|}\leq 2\underbrace{\left\|{}^N a-\ell\right\|}_{\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}0\text{ car }a\longrightarrow\ell},$$

d'où la nullité de $|\ell_{n+T}-\ell_n|$, *i. e.* l'égalité $\ell_{n+T}=\ell_n$, laquelle conclut à la T-périodicité de ℓ.

Autre solution, expéditive (nécessite de connaître la continuité des applications linéaires – *cf.* chp ? ? ?). Pour chaque naturel n, notons ${}^n\delta$ l'évaluation en n, qui est une forme linéaire sur E continue (car 1-lipschitzienne). Pour chaque $n\in\mathbb{N}$, le noyau de la forme linéaire continue ${}^n\delta-{}^{n+T}\delta$ est alors fermé, donc l'intersection $\mathcal{T}$ de ces noyaux est fermée.

(c) Si pour chaque naturel N on peut trouver deux naturels $p,q\geq N$ vérifiant l'hypothèse de la question 8a, le membre de droite $2\|{}^p a-L\|+2\|{}^q a-L\|$ pourra alors être rendu aussi petit que souhaité dans $\mathbb{R}_+^*$ vu la tendance $\|{}^n a-L\|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$, donc le membre de gauche $\left\|(L_{n+1}-L_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|$ sera nul, d'où la constance de la suite L et son caractère périodique.

Supposons donc le contraire et soit N un naturel tel que pour chaques naturels $p,q\geq N$ les périodes des suites ${}^p a$ et ${}^q a$ ont un diviseur commun autre que 1, notons T la période de ${}^N a$ et appelons $\mathcal{D}$ l'ensemble des diviseurs de T autres que 1. Remplacer q par N donne alors sens à l'application

$$\left\{\begin{array}{ccc} [N,\infty|[& \longrightarrow & \mathcal{D} \\ n & \longmapsto & \text{p. g. c. d. de } T \text{ et de la période de } {}^{n}a \end{array}\right. .$$

L'ensemble source étant infini et celui but fini, il y a une valeur $d \in \mathcal{D}$ atteinte une infinité de fois, d'où une extractrice x telle que la suite ${}^{x(n)}a$ soit d-périodique pour chaque naturel n. La suite $L = \lim_{n\to\infty} {}^{x(n)}a$ adhère par conséquent à l'ensemble des suites d-périodiques, lequel est fermé d'après la question 8b, donc est périodique.

Remarque – Le résultat ne tient plus avec les *fonctions* périodiques (de source $\mathbb{R}$). On pourrait en effet montrer que la limite uniforme $\lim_{N\to\infty}\left[t \mapsto \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos\frac{t}{n}}{2^n}\right]$ fait sens et et n'est pas périodique (l'image de 0 n'est atteinte qu'en 0, chaque cosinus devant valoir 1).

9.

(a) Soit $m \in [0,n|]$ et notons ν l'application $f \mapsto \sum_{i=1}^{m}\left|f^{(i-1)}(s_i)\right| + \sum_{i=m}^{n} N_i\left(f^{(i)}\right)$. Il est aisé de vérifié la positive homogénéité de ν ainsi que ses comparaisons triangulaires. Montrons d'autre part par récurrence que ν sépare les points. Soit $f \in C^n(S,\mathbb{K})$ annulé par ν et, pour chaque $a \in [0,m|]$, notons E_a l'égalité $f^{(a)} = 0$. La nullité de $N_m\left(f^{(m)}\right)$ livre l'égalité E_m. Soit par ailleurs $a \in [1,m|]$ tel que E_a : l'application $f^{(a-1)}$ fait alors sens, est constante (car de dérivée nulle) et est nulle en s_a (nullité du a-ième terme de $\nu(f)$), donc est nulle, d'où E_{a-1}. Il en résulte E_0 par récurrence descendante, *c. q. f. d.*.

(b)

i. On utilisera la majoration $\|\varphi\|_\infty \leq L\|\varphi'\|_\infty + |\varphi(\sigma)|$ établie dans le cours (*cf.* exemple 3 section 2.1) pour chaque $\varphi \in C^1(S,\mathbb{K})$ et pour chaque $\sigma \in S$.

Soit $i \in [0,n|[$ et notons $g := f^{(i)}$. Pour chaque $a \in [0,n-i|]$, notons M_a la majoration

$$\|g\|_\infty \leq L^a\left\|g^{(a)}\right\|_\infty + \sum_{j=0}^{a-1} L^j\left|g^{(j)}(s_{i+j+1})\right|$$

et montrons $\forall a \in [0,n-i|]\,,\ M_a$ par récurrence, d'où il résultera M_{n-i} comme souhaité.

La majoration M_0 s'écrit $\|g\|_\infty \leq L^0\left\|g^{(0)}\right\|_\infty + 0$, ce qu'on a (avec égalité).

Soit $a \in [0,n-i|[$ tel que M_a. Puisque $g^{(a)} = f^{(a+i)}$ est alors de classe M^1 (l'exposant $a+i$ vaut au plus $n-1$), il fait sens d'utiliser la majoration rappelée où l'on a remplacé (φ,σ) par $\left(g^{(a)}, s_{i+a+1}\right)$, ce qui donne (après multiplication par L^a)

$$L^a\left\|g^{(a)}\right\|_\infty \leq L^{a+1}\left\|g^{(a+1)}\right\|_\infty + L^a\left|g^{(a)}(s_{a+i+1})\right|.$$

Ajouter $\sum_{j=0}^{a-1} L^j\left|g^{(j)}(s_{i+j+1})\right|$ et utiliser M_a livre alors M_{a+1}, *c. q. f. d.*

ii. Soit $m \in [0, n|]$ et ajoutons les majorations précédentes lorsque i décrit $[m, n|]$. Le membre de gauche obtenu est celui de la majoration attendue. Le membre de droite obtenu est la somme de deux termes que l'on majore comme suit : d'une part

$$\sum_{i=m}^{n} L^{n-i} \left\| f^{(n)} \right\|_\infty = \left(\sum_{i=m}^{n} L^{n-i} \right) \left\| f^{(n)} \right\|_\infty \leq C \left\| f^{(n)} \right\|_\infty, \text{ d'autre part}$$

$$\sum_{i=m}^{n} \sum_{j=0}^{n-i-1} L^j \left| f^{(i+j)} \left(s_{i+j+1} \right) \right| \underset{\text{à } i+j=:k \text{ constant}}{\overset{\text{reparamétrage}}{=}} \sum_{k=m}^{n-1} \sum_{j=0}^{k} L^j \left| f^{(k)} \left(s_{k+1} \right) \right|$$

$$= \sum_{k=m}^{n-1} \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{k} L^j \right)}_{\leq C} \left| f^{(k)} \left(s_{k+1} \right) \right| \leq C \sum_{k=m}^{n-1} \left| f^{(k)} \left(s_{k+1} \right) \right|.$$

On obtient après addition le membre de droite de la majoration voulue.

iii. Pour chaque $m \in [0, n|]$, notons ν_m la norme $f \mapsto \sum_{i=1}^{m} \left| f^{(i-1)} (s_i) \right| + \sum_{i=m}^{n} \left\| f^{(i)} \right\|_\infty$. Soit $a \in [0, n|]$. La majoration obtenue à la question 9(b)ii en remplaçant m par a puis en ajoutant la majoration $\sum_{i=1}^{a} \left| f^{(i-1)} (s_i) \right| \leq \sum_{i=1}^{a} C \left\| f^{(i-1)} \right\|_\infty$ (valide car $C \geq L^0 = 1$) s'écrit alors $\nu_a (f) \leq C \nu_n (f)$. Vu par ailleurs les majorations

$$\begin{aligned} \nu_n (f) &= \sum_{i=1}^{a} \left| f^{(i-1)} (s_i) \right| + \sum_{j=a}^{n-1} \underbrace{\left| f^{(j)} (s_{j+1}) \right|}_{\leq \left\| f^{(j)} \right\|_\infty} + \left\| f^{(n)} \right\|_\infty \\ &\leq \sum_{i=1}^{a} \left| f^{(i-1)} (s_i) \right| + \sum_{j=a}^{n} \left\| f^{(j)} \right\|_\infty = \nu_a (f), \end{aligned}$$

nous pouvons affirmer l'encadrement $\nu_n \leq \nu_a \leq C \nu_n$, ce qui montre que la norme ν_a est équivalente à ν_n, d'où la conclusion. (*Sanity check* : lorsque $n = 1$, on retrouve l'équivalence de l'exemple 3 section 2.1.)

REMARQUE – Nous retrouverons au chapitre ? ? ? (critère ? ? ?) le fait que la convergence pour la norme ν_0 implique celle pour ν_∞.

(c) Montrons que la réponse est non en général. Imposons $n = 1$, $S = [0, 1]$, $s_1 = 1$, $N = f \mapsto \max_{t \in [0,1]} |(1-t) f(t)|$ (il s'agit bien d'une norme d'après l'exercice ? ? ?), soit $\nu \in \mathbb{N}^*$ et notons P le monôme X^ν. On vérifie alors le polynôme $(1-X) P$ a une dérivée du signe de $\frac{\nu}{\nu+1} - X$, donc est maximal sur S en $\frac{\nu}{\nu+1}$ où il vaut $\frac{1}{\nu+1} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu} \underset{\nu \to \infty}{\sim} \frac{1}{\nu e}$; on en déduit (remplaçant ν par $\nu - 1$) les égalité et tendance $N((1-X) P') = \nu \frac{1}{\nu} \left(1 - \frac{1}{\nu}\right)^{\nu-1} \underset{\nu \to \infty}{\longrightarrow} e^{-1}$. Il en résulte les tendances $N(P) + N(P') \underset{\nu \to \infty}{\longrightarrow} 0 + e^{-1}$ et $|P(s)| + N(P') \underset{\nu \to \infty}{\longrightarrow} 1 + e^{-1}$ aux limites *distinctes*, d'où la non-équivalence des normes $f \mapsto N(f) + N(f')$ et $f \mapsto |f(s)| + N(f')$.

10. Notons $\mathbb{S} := \left\{ a \in \mathbb{K}^n \; ; \; \|a\|_p = 1 \right\}$ la sphère unité de $\mathbb{K}^n$ pour la norme d'indice p et omettons parfois de préciser l'indice q afin d'alléger les écritures. Soient $a, b \in M_n(\mathbb{K})$.

Notons N l'application considérée et montrons – sans hypothèse additionnelle – qu'il s'agit d'une norme (d'espace vectoriel). Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a déjà

les égalités $N(\lambda a) = \sup_{v\in\mathbb{S}} \|(\lambda a) v\| = \sup_{v\in\mathbb{S}} |\lambda| \|av\| \overset{|\lambda|\geq 0}{=} |\lambda| \sup_{v\in\mathbb{S}} \|av\| = |\lambda| N(a)$.

Supposons par ailleurs $N(a) = 0$, *i. e.* $\sup_{v\in\mathbb{S}} \|av\| = 0$. L'application $v \mapsto \|av\|$ est alors nulle sur $\mathbb{S}$, donc l'application $v \mapsto av$ aussi, ce qui s'écrit $\mathbb{S} \subset \operatorname{Ker} a$. Or la sphère $\mathbb{S}$ inclut une partie génératrice de $\mathbb{K}^n$ (en évoquer une base dont on unitarisera les vecteurs), d'où la nullité de la matrice a vue comme endomorphisme s'annulant sur une partie génératrice. On conclut en majorant à $v \in \mathbb{S}$ fixé $\|(a+b)v\|$ par

$$\|av + bv\| \leq \|av\| + \|bv\| \leq \sup_{u\in\mathbb{S}} \|au\| + \sup_{u\in\mathbb{S}} \|bu\| = N(a) + N(b).$$

Supposons N sous-multiplicative, notons Θ la matrice remplie de 1 et soit $v \in \mathbb{S}$. L'image Θv vaut alors $\left(\sum_{i=1}^n v_i\right)(1,1,...,1)$, donc est de norme

$$\|\Theta v\|_q = \left|\sum_{i=1}^n v_i\right| \|(1,1,...,1)\|_q \leq \sum_{i=1}^n |v_i| \sqrt[q]{n} \quad \text{(avec égalité si les } v_i \text{ sont de même signe).}$$

Or la moyenne $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |v_i|$ d'ordre 1 est majorée par celle $\sqrt[p]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |v_i|^p}$ d'ordre p (car $p \geq 1$), à savoir (vu l'égalité $\|v\|_p = 1$) par $\frac{1}{\sqrt[p]{n}}$ (avec égalité ssi les $|v_i|$ sont égaux). Finalement, on peut majorer

$$\|\Theta v\|_q \leq n\frac{\sqrt[q]{n}}{\sqrt[p]{n}} \text{ avec égalité si } v = \frac{(1,1,...,1)}{\sqrt[p]{n}}, \text{ d'où l'égalité } N\left(\frac{\Theta}{n}\right) = n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}.$$

Pour conclure, on observe que la matrice $\theta := \frac{\Theta}{n}$ est idempotente, d'où les majorations $N(\theta) = N(\theta^2) \leq N(\theta)^2$ et (car $\theta \neq 0$) la minoration $N(\theta) \geq 1$, ce qui s'écrit $n^{\frac{1}{q}} \geq n^{\frac{1}{p}}$, *i. e.* $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p}$ (car $n > 0$), ou encore $p \geq q$.

Supposons réciproquement $p \geq q$ et soit $v \in \mathbb{S}$. Si bv est non nul, fait alors sens la majoration

$$\|abv\|_q = \left\|a\frac{bv}{\|bv\|_p}\right\|_q \|bv\|_p \leq \sup_{u\in\mathbb{S}} \|au\| \; \|bv\|_p = N(a)\|bv\|_p,$$

laquelle sinon reste valide (elle s'écrit alors $\|a0\|_q \leq N(a)\|0\|_p$, *i. e.* $0 \leq 0$). Il suffit donc pour conclure de majorer $\|bv\|_p \leq N(b)$. Abrégeons $w := bv$. L'hypothèse $p \geq q$ revenant à la concavité de l'application $f := t \mapsto t^{\frac{q}{p}}$, cette dernière est sous-additive d'après un exercice (chapitre ? ? ?), ce qui permet de majorer

$$\begin{aligned}
\|bv\|_p &= \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |w_i|^p} = \sqrt[q]{f\left(\sum_{i=1}^n |w_i|^p\right)} \underset{\text{et } t\mapsto \sqrt[q]{t} \text{ croît}}{\overset{f \text{ sous-additive}}{\leq}} \sqrt[q]{\sum_{i=1}^n f(|w_i|^p)} \\
&= \sqrt[q]{\sum_{i=1}^n |w_i|^q} = \|w\|_q = \|bv\|_q \leq \sup_{u\in\mathbb{S}} \|bu\|_q = N(b).
\end{aligned}$$