Réduction (première partie) : langage spectral, polynômes caractéristiques

Marc SAGE (collab. Michel WIGNERON)

19 septembre 2017

Table des matières

On fixe pour tout ce cours :

1. un corps K ;
2. un K-espace vectoriel E ;
3. un naturel n ;
4. un endomorphisme $f \in L(E)$;
5. une matrice carrée $A \in M_n(K)$.

1 Préliminaires

1.1 Rappels

Les propriétés et définitions suivantes sont des rappels de première année.

Vocabulaire : on qualifiera de ***simplement scindé*** tout polynôme scindé à racines simples. On dira également d'un tel polynôme qu'il ***se scinde simplement***.

Une remarque tout d'abord sur la décomposition des polynômes unitaires : pour chaque polynôme $P \in K[X]$ unitaire dont on note R l'ensemble des racines, on a l'équivalence[1]

$$P \text{ est scindé (ou vaut 1)} \Longleftrightarrow P = \prod_{\rho \in R} (X - \rho)^{\omega_\rho}$$

où pour chaque scalaire λ on a noté ω_λ l'ordre de multiplicité de λ comme racine de P.

La précision « ou vaut 1 » est là uniquement pour tenir compte du cas pathologique où $\deg P = 0$: le polynôme P est alors constant, *i. e.* vaut 1 (car il est unitaire), donc n'a pas de racines (car $1 \neq 0$ dans le corps K), *i. e.* R est vide et le produit (vide) ci-dessus vaut $1 = P$, de sorte que l'équivalence reste valide.

En pratique, la dimension nulle n'apparaît presque jamais et l'on pourra oublier la parenthèse « (ou vaut 1) ».

Définition – Propriété

Soient $S \subset X \subset Y$ trois ensembles et $\alpha : X \longrightarrow Y$ une application.

*On dit que le sous-ensemble S est **stable** par α ou[2] que l'application α **stabilise** S si ce dernier inclut son image par α :*

$$S \text{ stable par } \alpha \overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow} \alpha(S) \subset S \overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow} \alpha \text{ stabilise } S.$$

[1] Cette équivalence éclairera des propositions à venir sur les polynômes caractéristiques et minimaux.

[2] Bien savoir jongler entre formes *active* (où le sujet est *l'application*) et *passive* (où le sujet est *la partie*).

L'application $\left\{\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & S \\ s & \longmapsto & \alpha(s) \end{array}\right.$ *fait sens ssi* α *stabilise* S*. On dit alors que* α ***induit***[3] *une application par restriction à* S *et corestriction à* S*.*

Il est usuel de confondre une application avec chacune de ses corestrictions. Suivant cet usage (visant à éviter la lourde notation $\alpha^{|S}$ de toute façon hors programme),

lorsque α *stabilise* S*, nous confondrons*
la restriction $\alpha_{|S} : S \longrightarrow Y$ *avec l'induite* $\alpha_{|S}^{|S} : S \longrightarrow S$ *.*

Exemple : soit $e \in E$. Décrivons la plus petite partie de E stable par f et contenant e.

Une telle partie doit contenir les itérés par f de chacun de ses éléments, en particulier les itérés de e. Réciproquement, l'ensemble des itérés de e par f contient bien e (le 0-ième itéré de e) et est stable par f (vu l'égalité $f\left(f^N(e)\right) = f^{N+1}(e)$ pour chaque $N \in \mathbb{N}$). Finalement,

la plus petite partie de E *stable par* f *et contenant* e *est l'ensemble des itérés*[4] *de* e *par* f *:*

$$\left\{f^{\circ N}(e)\right\}_{N\in\mathbb{N}} = \{e, f(e), f(f(e)), f(f(f(e)))...\}.$$

Cet exemple est important ! On *doit* y penser pour construire des parties stables contenant un élément donné.

Définition – Propriété

On appelle ***endomorphisme canoniquement***[5] ***associé*** *à la matrice* A *la multiplication*

$$\left\{\begin{array}{ccc} K^n & \longrightarrow & K^n \\ V & \longmapsto & AV \end{array}\right.$$

à gauche par A *avec l'identification abusive usuelle de* K^n *avec* $M_{n,1}(K)$*.*

En notant[6] $A\cdot$ *cet endomorphisme et b. c. la base canonique de* K^n*, on a l'égalité*

$$\underset{b.\ c.}{\operatorname{Mat}}(A\cdot) = A.$$

En d'autres termes, l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A *est l'endomorphisme de* K^n *qui a, pour matrice* A *dans la base canonique de* K^n*.*

Plus précisément, est un isomorphisme d'algèbres l'application

$$\left\{\begin{array}{ccc} M_n(K) & \xrightarrow{\sim} & L(K^n) \\ M & \longmapsto & M\cdot \end{array}\right. \text{ de réciproque } \left\{\begin{array}{ccc} L(K^n) & \xrightarrow{\sim} & M_n(K) \\ f & \longmapsto & \underset{b.\ c.}{\operatorname{Mat}} f \end{array}\right. .$$

[3] La restriction de α à S est notée $\alpha_{|S}$, la corestriction de α à S est notée $\alpha^{|S}$, d'où la notation $\alpha_{|S}^{|S}$ de l'induite.

[4] *Culture* : l'ensemble des itérés de e par f s'appelle l'***orbite*** de e (sous l'action de f).

[5] L'adjectif *canonique* signifie *selon le canon*, selon le droit chemin, il est synonyme de *naturel* (selon la nature).

[6] Remplacer le point $\cdot$ par l'argument V pour obtenir son image AV.

Il est usuel de confondre la matrice A et l'endomorphisme $A\cdot$. Cet abus est légitimé par les égalités

$$\forall V \in K^n, \ [A\cdot](V) = AV.$$

Par conséquent, chaque notion définie sur les endomorphismes se transposera *ipso facto* aux matrices. C'est ainsi que nous procéderons dans ce chapitre.

Définition – Propriété

Soit $B \in M_n(K)$.

*On dit que les matrices A et B sont **semblables**[7] s'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(K)$ telle que $A = PBP^{-1}$:*

$$A \text{ semblable à } B \overset{\text{déf.}}{\iff} \exists P \in GL_n(K), \ B = P^{-1}AP.$$

*La relation binaire « est semblable à » est une relation d'équivalence sur $M_n(K)$, appelée relation de **similitude** et dont les classes d'équivalence sont appelées **classes de similitude**.*

Si E est de dimension finie n, alors A et B sont semblables ssi elles représentent un même endomorphisme de E.

La théorie de la réduction sur l'espace vectoriel K^n étudie les classes de similitude sur $M_n(K)$ en cherchant à les classifier à l'aide de représentants "simples". *Réduire* la matrice A, c'est en ce sens lui trouver une matrice semblable "simple", par exemple diagonale ou triangulaire[8].

Signalons de suite que cette classification est achevée depuis la fin XIX^e^ (ce n'est plus un problème ouvert) et qu'elle est – bien que hors programme – compréhensible et accessible par un élève de classes préparatoires. La lectrice et le lecteur intéressés par l'histoire des matrices pourront consulter les travaux de Frédéric Brechmacher, en particulier sa thèse.

Plus généralement, la théorie de la réduction sur l'espace vectoriel E étudie les classes de conjugaison[9] sur $L(E)$ en cherchant à les classifier à l'aide de représentants "simples". *Réduire* l'endomorphisme f, c'est en ce sens trouver un endomorphisme "simple" qui lui soit conjugué. Lorsque E est de dimension finie, on retombe sur le terrain de la réduction des matrices, ce qui permet d'utiliser toute la combinatoire matricielle.

Exercice d'application

Soit $B \in M_n(K)$ (on rappelle $A \in M_n(K)$).

a. *Montrer que, dans la base canonique de $M_n(K)$, les matrices des endomorphismes $M \mapsto AMB$ et $M \mapsto {}^tB\ M\ {}^tA$ sont semblables.*

b. *Soit A' semblable à A et soit B' semblable à B. Montrer que, dans la base canonique de $M_n(K)$, les matrices des endomorphismes $M \mapsto AMB$ et $M \mapsto A'MB'$ sont semblables.*

[7] On dit aussi que A et B sont ***conjuguées*** et on parle alors de relation de ***conjugaison***.

[8] Garder son enthousiasme : une telle réduction n'est pas toujours possible.

[9] *Culture* : on dit que f et g sont ***conjugués*** dans $L(E)$ s'il y a un automorphisme $\alpha \in GL(E)$ tel que $f = \alpha \circ g \circ \alpha^{-1}$.

a. Notons resp. u et v les endomorphismes considérés. Appelons t (comme « **t**ransposition ») la symétrie vectorielle $M \mapsto {}^tM$. On a alors pour chaque matrice $M \in M_n(K)$ les égalités

$$t\left(u\left(t^{-1}(M)\right)\right) = {}^t\left(A\, t(M)\ B\right) = {}^tB\ {}^t\left({}^tM\right)\ {}^tA = {}^tB\ M\ {}^tA = v(M),$$

ce qui montre que les endomorphismes u et $v = t \circ u \circ t^{-1}$ sont conjugués. Par conséquent, leurs matrices dans n'importe quelle base de $M_n(K)$ sont semblables, en particulier dans celle canonique.

b. Soient P et Q deux matrices inversibles telles que $\binom{A'}{B'} = \binom{P^{-1}AP}{Q^{-1}BQ}$, appelons u' l'endomorphisme $M \mapsto A'MB'$ et notons α l'automorphisme $M \mapsto PMQ$ (de réciproque $M \mapsto P^{-1}MQ^{-1}$). Vu à $M \in M_n(K)$ fixé les égalités

$$\begin{aligned}\alpha\left(u'\left(\alpha^{-1}(M)\right)\right) &= P\ \left[\left(P^{-1}AP\right)\ \alpha^{-1}(M)\ \left(Q^{-1}BQ\right)\right]\ Q \\ &= AP\ \left(P^{-1}MQ^{-1}\right)\ QB = AMB = u(M),\end{aligned}$$

les endomorphismes u' et $u = \alpha \circ u' \circ \alpha^{-1}$ sont conjugués, donc leurs matrices (dans chaque base de $M_n(K)$) sont semblables.

1.2 Sous-espaces vectoriels stables & endomorphismes induits

Propriété

Soit V un sous-espace vectoriel de E. Alors f induit par restriction à V un endomorphisme de V ssi ce dernier est stable par f :

$$f_{|V} \in L(V) \Longleftrightarrow f \text{ stabilise } V.$$

Démonstration

Puisque f est linéaire, sa restriction à chaque sous-espace vectoriel l'est, en particulier la restriction $r := f_{|V}$. On en déduit[10] (avec l'identification abusive $r = r^{|V}$) l'équivalence

$$r \in L(V) \Longleftrightarrow r \in V^V.$$

Ensuite, la source de r étant déjà V, on a l'équivalence (en notant[11] $W := V$)

$$r \in W^V \Longleftrightarrow \operatorname{Im} r \subset W.$$

[10] La suite de la preuve est entièrement ensembliste (elle ne fait plus appel au caractère linéaire de f).

[11] L'utilisation de deux symboles différents pour V permet de se rappeler si on le pense comme *source* ou bien comme *but*.

Enfin, on a explicitement

$$\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} f_{|V} = f(V), \text{ ce qui conclut.}$$

Exemple : soit $e \in E$. Décrivons le plus petit sous-espace vectoriel de E stable par f et contenant e.

Un tel sous-espace vectoriel doit contenir e et ses itérés par f, *a fortiori* le sous-espace vectoriel V engendré par ces derniers. Réciproquement, V contient les itérés de e (donc le 0-ième e) et est stable par f vu pour chaque suite $\lambda \in K^{(\mathbb{N})}$ presque nulle de scalaires l'égalité et l'appartenance

$$f\left(\sum_{N\in\mathbb{N}} \lambda_N f^N(e)\right) \overset{f \text{ linéaire}}{=} \sum_{N\in\mathbb{N}} \lambda_N f^{N+1}(e) \in V.$$

Finalement,

le plus petit sous-espace vectoriel de E stable par f et contenant e est l'engendré $\operatorname{Vect}_{N\in\mathbb{N}}\left\{f^{\circ N}(e)\right\}$ des itérés de e par f.

Exemple à retenir ! Construction *typique* de sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme.

Remarque – **Matrices diagonales par blocs et sous-espaces stables**. Imposons E de dimension finie. Le fait que f stabilise *plusieurs* sous-espaces vectoriels en somme directe (par exemple des sous-espaces vectoriels supplémentaires) s'interprète alors agréablement en termes matriciels.

Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$, soit $(V_1, V_2, ..., V_\ell)$ une famille de sous-espaces vectoriels de E supplémentaires, soit $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, ..., \mathcal{B}_\ell)$ telle que $\mathcal{B}_i$ est une base de V_i pour chaque $i \in [1, \ell|]$ et dont on note $\mathcal{B}$ la concaténée[12] (qui est une base de E). On a alors l'équivalence

$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} f \textit{ diagonale par blocs} \iff \forall i \in [1, \ell|], \ f \textit{ stabilise } V_i$$

et, lorsque ces conditions sont vérifiées, on dispose de l'égalité

$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_1} f_{|V_1} & & & \\ & \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_2} f_{|V_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_\ell} f_{|V_\ell} \end{pmatrix}.$$

Propriété

Imposons E de dimension finie, soit V un sous-espace vectoriel de E, soit $\mathcal{B}$ une base de E obtenue[13] en complétant une base de V. On voit $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f$ comme matrice 2×2 blocs en séparant les $\dim V$ premières rangées des autres.

[12] Une telle base est dite ***adaptée*** à la décomposition $E = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_\ell$.

[13] Une telle base est dite ***adaptée*** à V.

Alors V est stable par f ssi la matrice par blocs $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f$ est triangulaire supérieure :

$$f \text{ stabilise } V \iff \operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} f \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} M & R \\ 0 & N \end{pmatrix} \text{ avec } M \text{ de taille } \dim V \times \dim V.$$

Démonstration

Notons $d := \dim V$ et soit $(v_1, v_2, ..., v_d)$ une base de V. On a alors les équivalences

$$\begin{array}{rcl} \operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} f \text{ a la forme voulue} & \underset{\text{matricielle}}{\overset{\text{lecture}}{\iff}} & \forall i \in [1, d|] \,, \ f(v_i) \in V \\ & \underset{\text{espace vectoriel}}{\overset{V \text{ est un sous-}}{\iff}} & \operatorname*{Vect}_{i \in [1,d|]} f(v_i) \subset V \\ & \underset{\text{linéaire}}{\overset{f \text{ est}}{\iff}} & f\left(\operatorname*{Vect}_{i\in[1,d|]} v_i\right) \subset V \\ & \iff & f(V) \subset V. \end{array}$$

Remarques

• Lorsque V est une droite, la matrice ci-dessus prend la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & ? & \cdots & ? \\ 0 & ? & \cdots & ? \\ | & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ? & \cdots & ? \end{pmatrix} \text{ pour un certain scalaire } \lambda.$$

On lit alors l'égalité $f(v) = \lambda v$ où l'on a noté v le premier vecteur de la base. Cette égalité

$$f(v) = \lambda v \text{ (propre à la réduction de } f\text{)}$$

est centrale dans ce chapitre et c'est avec elle que nous ouvrirons la section suivante.

• *Culture hors programme* : en remplaçant V par un nombre fini de sous-espaces vectoriels $V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_{s-1}$ en somme directe, en adaptant $\mathcal{B}$ à ces sous-espaces vectoriels et en découpant $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f$ en s^2 blocs selon ces sous-espaces vectoriels, on obtiendrait la généralisation suivante :

$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} f \text{ triangulaire supérieure par blocs} \iff \forall i \in [1, s|[\,, \ f \text{ stabilise } V_i.$$

Dans le cas extrême où $s = \dim E$, chaque V_i est une droite $K v_i$ et l'on obtient l'équivalence

$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} f \text{ triangulaire supérieure} \iff$$
$$\forall i \in [1, \dim E|[\,, \ f \text{ stabilise } \operatorname{Vect}\{v_1, v_2, ..., v_i\}.$$

Exercice d'application

Imposons E de dimension finie et soit V un sous-espace vectoriel de E.

a. *Soient* $(f_1, f_2, ..., f_n)$ *une famille de* n *endomorphismes de* E *stabilisant chacun* V. *Montrer alors que l'endomorphisme induit sur* V *par le produit des* f_i *fait sens et vaut le produit des endomorphismes induits sur* V *par chacun des* f_i :

$$[f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n]_{|V} = [f_1]_{|V} \circ [f_2]_{|V} \circ \cdots \circ [f_n]_{|V} \text{ dans } L(V).$$

b. *En déduire que l'égalité suivante fait sens et est vérifiée dès que* f *stabilise* V :

$$[f^{\circ n}]_{|V} = \left[f_{|V}\right]^{\circ n} \text{ dans } L(V).$$

---

a. Soit $\mathcal{V}$ une base de V et soit $\mathcal{B}$ une base de E obtenue[14] en complétant $\mathcal{V}$ (légitime car E et V sont des espaces de dimension finie). Pour chaque $i \in [1, n|]$, puisque f_i stabilise V, sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} f_i = \begin{pmatrix} M_i & R_i \\ 0 & N_i \end{pmatrix} \text{ avec } M_i \text{ de taille } \dim V \times \dim V.$$

L'endomorphisme[15] $f_1 f_2 \cdots f_n$ a donc dans la base $\mathcal{B}$ pour matrice

$$\begin{aligned} \operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} (f_1 f_2 \cdots f_n) &= \left(\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} f_1\right)\left(\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} f_2\right)\cdots\left(\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} f_n\right) \\ &= \begin{pmatrix} M_1 & R_1 \\ 0 & N_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_2 & R_2 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} M_n & R_n \\ 0 & N_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} M_1 M_2 \cdots M_n & ? \\ 0 & N_1 N_2 \cdots N_n \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c}\text{d'après le calcul} \\ \text{triangulaire par blocs}\end{array}, \end{aligned}$$

laquelle est de la forme $\begin{pmatrix} M & ? \\ 0 & N \end{pmatrix}$, ce qui montre que $f_1 f_2 \cdots f_n$ stabilise V : l'induit $[f_1 f_2 \cdots f_n]_{|V}$ fait donc sens. On lit en outre dans les égalités précédentes la matrice de cet induit

$$\begin{aligned} \operatorname*{Mat}_{\mathcal{V}} \ [f_1 f_2 \cdots f_n]_{|V} &= M_1 M_2 \cdots M_n \\ &= \left(\operatorname*{Mat}_{\mathcal{V}} \ [f_1]_{|V}\right)\left(\operatorname*{Mat}_{\mathcal{V}} \ [f_2]_{|V}\right)\cdots\left(\operatorname*{Mat}_{\mathcal{V}} \ [f_n]_{|V}\right) \\ &= \operatorname*{Mat}_{\mathcal{V}} \ \left([f_1]_{|V} \ [f_2]_{|V} \ \cdots \ [f_n]_{|V}\right), \text{ d'où l'égalité désirée.} \end{aligned}$$

b. Appliquer le point précédent à la famille constante $(f, f, ..., f) \in L(E)^n$.

---

[14] L'hypothèse « E de dimension finie » nous permet ici l'utilisation agréable des matrices mais nous pourrions en fait nous en passer.

[15] Le symbole de composition est sous-entendu (multiplication dans l'algèbre $L(E)$).

1.3 Éléments nilpotents

À des fins unificatrices, abrégeons par $\binom{\mathcal{A}}{a}$ l'un des couples $\binom{L(E)}{f}$ ou $\binom{M_n(K)}{A}$ ($\mathcal{A}$ comme « **a**lgèbre »).

Définition – Notation

On dit que a est ***nilpotent***[16] *si l'une de ses puissances est nulle,* i. e. *si*

$$\exists \nu \in \mathbb{N},\ a^\nu = 0.$$

Dans ce cas, on appelle ***indice de nilpotence*** *de a le plus petit naturel ν tel que $a^\nu = 0$ et on le note dans ce cours*[17]

$$\nu(a) := \min\left\{N \in \mathbb{N}\ ;\ a^N = 0\right\} \text{ si } a \text{ nilpotent.}$$

Remarques

• L'indice de nilpotence de a est nul ssi $a^0 = 0$, *i. e.* ssi $1 = 0$, ce qui revient à la nullité de l'algèbre $\mathcal{A}$ (cas pathologique) :

$$\nu(a) = 0 \iff \mathcal{A} = 0.$$

• L'indice de nilpotence de a vaut au plus 1 ssi $a^1 = 0$, *i. e.* ssi a est nul :

$$\nu(a) \leq 1 \iff a = 0.$$

• Lorsque a *n*'est *pas* nilpotent, parfois ∞ est appelé son indice de nilpotence.

• Rappelons que[18] l'ordre de chaque élément g dans chaque groupe G vaut celui de son image par chaque isomorphisme de groupes φ de source G. En remplaçant dans notre preuve de ce fait $(\mathbb{N}^*, g, 1_G)$ par $(\mathbb{N}, a, 0_{\mathcal{A}})$, on obtient une preuve du fait suivant : *l'indice de nilpotence de chaque élément de $\mathcal{A}$ vaut celui de son image par chaque isomorphisme d'algèbres de source $\mathcal{A}$.*

En particulier, l'indice de nilpotence est inchangé par conjugaison[19] :

$$\forall i \in \mathcal{A}^\times,\ \nu\left(iai^{-1}\right) = \nu(a).$$

Autre cas particulier[20] : lorsque E est de dimension finie, l'endomorphisme f et sa matrice dans chaque base de E ont même indice de nilpotence :

$$\nu(f) = \nu\left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f\right) \text{ pour chaque base } \mathcal{B} \text{ de } E.$$

• Imposons a nilpotent et montrons

$$\text{la liberté de la famille } \left(a^i(e)\right)_{i\in[0,\nu(a)[[} \text{ pour chaque vecteur } e \notin \operatorname{Ker} a^{\nu(a)-1}.$$

[16] *nil* = nul, *potent* = puissance, donc *nil-potent* = puissance nulle.
[17] ν (*nu*) comme « **n**ilpotent »
[18] Découle à $N \in \mathbb{N}^*$ fixé de l'équivalence $g^N = 1_G \iff \varphi(g)^N = 1_G$.
[19] *Rappel* : la conjugaison par chaque inversible de $\mathcal{A}$ est un automorphisme de l'algèbre $\mathcal{A}$.
[20] *Rappel* : chaque base $\mathcal{B}$ de E induit un isomorphisme d'algèbres $\left\{\begin{array}{ccc} L(E) & \xrightarrow{\sim} & M_{\dim E}(K) \\ u & \longmapsto & \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u \end{array}\right.$.

Soit un tel[21] e et soit $\lambda \in K^{\nu(a)}$ tel que $\sum_{i=0}^{\nu(a)-1} \lambda_i a^i (e) = 0$. Supposons par l'absurde la famille λ non nulle. La partie $\{i \in [0, \nu(a)[[\ ; \ \lambda_i \neq 0\}$ de $\mathbb{N}$ est alors non vide, ce qui donne sens à son miminum

$$m := \min \{i \in [0, \nu(a)[[\ ; \ \lambda_i \neq 0\} .$$

La relation de liaison se réécrit alors $0 = \sum_{i=m}^{\nu(a)-1} \lambda_i a^i (e)$ et appliquer $a^{\nu(a)-m-1}$ donne $0 = \lambda_m a^{\nu(a)-1} (e)$. Or le scalaire λ_m est non nul (par définition de m) et le vecteur $a^{\nu(a)-1} (e)$ est non nul (vu l'évocation de e), donc le vecteur de droite est non nul : contradiction.

• En dimension finie, le point précédent montre la majoration suivante de l'indice de nilpotence :

$$\begin{array}{rcll} A \text{ nilpotente} & \Longrightarrow & \nu(A) \leq n & (i.\ e.\ A^n = 0) \\ f \text{ nilpotent} & \Longrightarrow & \nu(f) \leq \dim E & (\text{si } \dim E \text{ fait sens}). \end{array}$$

• Imposons f nilpotent et injectif. Soit $\nu \in \mathbb{N}$ tel que $f^\nu = 0$. Pour chaque $e \in E$, les égalités $0 = f^\nu (e) = f\left(f^{\nu-1} (e)\right)$ et l'injectivité de f montrent l'égalité $f^{\nu-1} (e) = 0$ et une récurrence immédiate conduit à $e = 0$, d'où la nullité de E. On retiendra l'implication

$$a \text{ nilpotent} \Longrightarrow a \text{ non injectif} \qquad (\text{sauf si } \mathcal{A} = \{0\}).$$

Le même raisonnement tiendrait si la matrice A est nilpotente et injective (imposer $E = K^n$).

• *Culture hors programme* : on appelle plus généralement ***indice*** de a le rang à partir duquel la suite croissante des noyaux de ses itérés stationne (si un tel rang n'existe pas, ∞ est appelé l'***indice*** de a). Quand a est nilpotent, son indice vaut son indice de nilpotence, ce qui légitime l'abus de langage souvent rencontré

« *a est nilpotent d'indice ν* » signifiant
« *a est nilpotent d'indice de nilpotence ν* ».

Exemples

1. Dans $L(K^n)$, les deux applications "tapis roulants"

$$\begin{array}{lll} \delta := v \mapsto (0, v_1, v_2, ..., v_{n-1}) & \text{vers la } \mathbf{d}\text{roite} & (\delta \text{ comme« } \mathbf{d}\text{roite »}) \\ \gamma := v \mapsto (v_2, v_3, ..., v_n, 0) & \text{vers la } \mathbf{g}\text{auche} & (\gamma \text{ comme« } \mathbf{g}\text{auche »}) \end{array}$$

sont chacune annulées après n itérations (récurrence immédiate) et pas moins[22] (si $n \geq 1$) vu les égalités

$$\begin{cases} \delta^{n-1} (1, 0, 0..., 0) = (0, 0, ..., 0, 1) \neq 0 \\ \gamma^{n-1} (0, 0, ..., 0, 1) = (1, 0, 0..., 0) \neq 0 \end{cases},$$

donc sont chacune nilpotentes d'indice n. (Si $n = 0$, alors $\delta = 0 = \gamma$ est encore nilpotent d'indice $n = 0$.)

[21] Un tel e existe dès que $\mathcal{A}$ est non nulle.

[22] La restriction $n \geq 1$ donne sens aux $(n-1)$-ièmes itérés de δ et γ et équivaut à la non-nullité des images considérées.

2. Plus généralement, lorsque E est de dimension finie n, chaque base de E induit deux endomorphismes nilpotents "tapis roulant" par décalage des coordonnées dans la base donnée[23] (l'exemple précédent utilisait la base canonique de K^n).

En particulier, lorsque $E = \mathbb{C}$ muni de la $\mathbb{R}$-base $(1, i)$, le "tapis roulant" vers la gauche est l'endomorphisme "partie imaginaire" $\operatorname{Im} : u + vi \mapsto v + 0i$ (sous-entendu : u et v sont *réels*) et le "tapis roulant" vers la droite est l'endomorphisme $i \operatorname{Re} : u + vi \mapsto 0 + ui$. Tous deux sont nilpotents d'indice 2.

De même, la dérivation dans $K_n[X]$ est un "tapis roulant" vers la gauche en choisissant pour base $\left(\frac{X^d}{d!}\right)_{d \in [0,n|]}$, donc est nilpotente d'indice $n+1$.

3. Matriciellement, dans la base canonique de K^n, les "tapis roulants" γ et δ ont pour matrices respectives[24]

$$J := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1} \text{ et sa transposée } {}^tJ = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La lectrice et le lecteur doivent connaître les puissances de ces deux matrices. Il suffit pour cela d'observer que J agit par multiplication à droite sur chaque matrice écrite en colonnes comme un "tapis roulant" vers la droite :

$$\left(C_1\ C_2\ ...\ C_n\right)\ J = \left(0\ C_1\ C_2 ...\ C_{n-1}\right).$$

Lorsque les colonnes C_j sont celles d'une puissance de la matrice J, on obtient successivement les égalités[25]

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ J^2 = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ J^3 = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ...,$$
$$J^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & I_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ J^n = 0,$$

ce qui montre que J est nilpotente d'indice n. (*Sanity check* : J est la matrice d'un endomorphisme nilpotent d'indice n.)

Formellement, on montrerait par une récurrence immédiate les égalités

$$\forall N \in \mathbb{N},\ J^N = \begin{pmatrix} 0 & I_{\max\{n-N,0\}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Réciproquement, si E est de dimension finie n et si f est nilpotent d'indice n, pour chaque $e \in E \setminus \operatorname{Ker} f^{n-1}$, la famille $\left(f^i(e)\right)_{i \in [0,\nu(f)|[}$ est libre et est de longueur $\nu(f) = n$, donc est une base de E et f y a pour matrice[26] J. Vu les rangs des itérés de J, la formule du rang livre les égalités

$$\forall N \in [0, n|],\ \dim \operatorname{Ker} f^N = N.$$

[23] Formellement, chaque isomorphisme $\varphi : K^n \xrightarrow{\sim} E$ induit deux nilpotents $\varphi\delta\varphi^{-1}$ et $\varphi\gamma\varphi^{-1}$ de $L(E)$ chacun d'indice $n = \dim E$.

[24] La lettre J pourra évoquer le nom du français Camille Jordan.

[25] Chaque membre de droite est une matrice de taille $n \times n$ écrite sous forme de 2×2 blocs.

[26] Quand $n = 0$, la seule matrice de f est vide, *i. e.* est J.

Exercices d'application

1. *Soit b un élément de $\mathcal{A}$ commutant avec a. On notera α et β les indices de nilpotence respectifs de a et b.*
   (a) *Imposons a ou b nilpotent. Montrer que le produit ab est alors nilpotent d'indice au plus* $\min\{\alpha,\beta\}$*. Discuter le majorant demandé de l'indice ainsi que la nécessité de chacune des hypothèses. (On imposera pour la discussion que $\mathcal{A}$ inclut un plan vectoriel.)*
   (b) *Imposons a et b nilpotents. Montrer que la somme $a+b$ est alors nilpotente d'indice au plus $\alpha+\beta-1$. Discuter le majorant demandé de l'indice ainsi que la nécessité de chacune des hypothèses. (On imposera pour la discussion que $\mathcal{A}$ est de dimension finie au moins 2.)*
2. *Imposons A nilpotente, soit B une matrice nilpotente (non nécessairement de même taille que A). Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est nilpotente d'indice* $\max\{\nu(A),\nu(B)\}$*. Énoncer (sans preuve) une généralisation aux matrices diagonales par blocs (non nécessairement nilpotents).*

---

1. (a) En notant $m := \min\{\alpha,\beta\}$ (qui est fini car α ou β est fini), l'hypothèse $ab=ba$ permet de développer la puissance $(ab)^m = a^m b^m$. Si $m=\alpha$, alors le facteur $a^m = a^{\nu(a)}$ est nul ; si $m=\beta$, c'est alors b^m qui s'annule ; dans les deux cas, le produit $a^m b^m$ vaut 0, ce qui montre que le produit ab est nilpotent d'indice au plus m.

   Lorsque $a=b=0$, on a $\alpha=1=\beta$ (car $\mathcal{A}$ est non nulle) et $\nu(ab)=\nu(0)=1=\min\{\alpha,\beta\}$: le majorant donné étant atteint, on ne peut pas l'abaisser d'une constant strictement positive.

   Lorsque $(a,b)=(1,1)$, le produit $ab=ba$ vaut alors 1 qui n'est pas nilpotent (puisque $\mathcal{A}$ est non nulle), ce qui montre la nécessité de l'hypothèse « a ou b nilpotent ».

   Quand $\mathcal{A}=M_n(K)$, les matrices nilpotentes J et ${}^tJ$ ont pour produits $\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$, projecteurs[27] tous deux non nilpotents (car $n\geq 2$). De même, les nilpotents $E_{1,2}$ et $E_{2,1}$ d'indice 2 font sens et fournissent un contre-exemple que nous allons adapter au cas où $\mathcal{A}=L(E)$.

   Imposons $\mathcal{A}=L(E)$. L'hypothèse sur $\mathcal{A}$ revenant alors à imposer que E inclut un plan, soit $(u,v)\in E^2$ libre, soit une base[28] de E complétant (u,v) et appelons δ et γ les endomorphismes de E qui envoient (u,v)

[27] *Mnémo* : la composée de "tapis roulants" de sens contraires est un "tapis fixe" (à un effet de bord près).

[28] Une telle base existe même si E n'est pas de dimension finie (il suffit d'utiliser l'axiome du choix).

resp. sur $(0,u)$ et $(v,0)$ et qui annulent les autres vecteurs de la base évoquée[29]. Les éléments δ et γ sont alors nilpotents d'indice 2 et ont pour produits deux projecteurs non nuls de E (annuler chaque coordonnée sauf celle sur u ou sur v), *a fortiori* non nilpotents, ce qui montre la nécessité de l'hypothèse « a et b commutent ».

(b) L'hypothèse $ab = ba$ permet de développer le binôme

$$(a+b)^{\alpha+\beta-1} = \sum_{i+j=\alpha+\beta-1}^{i,j\in\mathbb{N}} \binom{\alpha+\beta-1}{i} a^i b^j.$$

Lorsque $i \geq \alpha$, la puissance a^i dans la sommande est nulle, donc[30] seuls les indices $i < \alpha$ contribuent (peut-être) à la somme. Or cette dernière comparaison équivaut à $(\alpha+\beta-1) - j \leq \alpha - 1$, *i. e.* à $j \geq \beta$ et c'est alors la puissance b^j qui s'annule. Finalement, la sommande est toujours nulle et la somme $a + b$ est nilpotente d'indice au plus $\alpha + \beta - 1$.

Lorsque $a = b = 0$, on a $\alpha = 1 = \beta$ (car $\mathcal{A}$ est non nulle) et $\nu(a+b) = \nu(0) = 1 = \alpha + \beta - 1$: le majorant donné étant atteint, on ne peut pas l'abaisser d'une constant strictement positive.

Lorsque $(a,b) = (1,0)$, la somme $a + b$ vaut alors 1 qui n'est pas nilpotent (puisque $\mathcal{A}$ est non nulle), ce qui montre la nécessité de l'hypothèse « a et b nilpotent ».

Si $\mathcal{A} = M_n(K)$, les matrices J et $E_{n,1}$ sont alors nilpotentes (car $n \geq 2$) mais leur somme est inversible (ses colonnes forment la base canonique de K^n à une permutation près), *a fortiori* non nilpotente, ce qui montre la nécessité de l'hypothèse « a et b commutent ». Autre contre-exemple : la somme des nilpotents $E_{1,2}$ et $E_{2,1}$ est un projecteur non nul, donc non nilpotent.

Transposons ce dernier contre-exemple lorsque $\mathcal{A} = L(E)$. Soient v et w deux vecteurs libres de E (permis car $\dim \mathcal{A} \geq 2$), soit une base de E complétant (v,w) (permis car E est imposé de dimension finie), notons v^* et w^* les formes linéaires "coordonnée" selon v et w resp. dans la base évoquée et définissons

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi := e \mapsto v^*(e)\, w \\ \psi := e \mapsto w^*(e)\, v \end{array} \right. \quad \text{dans } L(E).$$

Les endomorphismes φ et ψ sont alors nilpotents d'indice 2 et une récurrence immédiate montrerait

$$\forall N \in \mathbb{N},\ [\varphi+\psi]^{2N}(v) = v, \text{ empêchant la nilpotence de } \varphi+\psi.$$

Remarque – On manipule ici des endomorphismes de rang fini. Lorsque E n'est plus de dimension finie, on pourrait construire à peu de frais un contre-exemple où la somme $\varphi + \psi$ est involutive (donc bijective).

[29] Les endomorphismes δ et γ doivent être pensés comme les "tapis roulants" associés à la base (u,v) du plan évoqué.

[30] *Rappel* : pour chaques relatifs r et s, on a l'équivalence $r < s \Longleftrightarrow r \leq s - 1$.

2. Notons $D := \begin{pmatrix} A & {\scriptscriptstyle 0} \\ {\scriptscriptstyle 0} & B \end{pmatrix}$ et $m := \max\{\nu(A), \nu(B)\}$. Le calcul par blocs livrant les égalités

$$D^N = \begin{pmatrix} A^N & {\scriptscriptstyle 0} \\ {\scriptscriptstyle 0} & B^N \end{pmatrix} \text{ pour chaque } N \in \mathbb{N},$$

on obtient

$$D^m = \begin{pmatrix} A^m & {\scriptscriptstyle 0} \\ {\scriptscriptstyle 0} & B^m \end{pmatrix} \underset{m\geq\nu(b)}{\overset{m\geq\nu(a)}{=}} \begin{pmatrix} 0 & {\scriptscriptstyle 0} \\ {\scriptscriptstyle 0} & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Or, si $m = \nu(A)$, le premier bloc de D^{m-1} vaut alors $A^{\nu(A)-1}$, qui est non nul, d'où $D^{m-1} \neq 0$, et si $m = \nu(B)$ c'est alors le second bloc de D^{m-1} qui est non nul. On obtient finalement

$$D^m = 0 \neq D^{m-1},$$

ce qui montre que D est nilpotent d'indice m.

Une généralisation possible serait la suivante : on a pour chaque liste finie $(A_1, A_2, ..., A_\ell)$ de matrices l'égalité

$$\nu(\operatorname{Diag}(A_1, A_2, ..., A_\ell)) = \max\{\nu(A_1), \nu(A_2), ..., \nu(A_\ell)\}.$$

1.4 Un lemme et une notation utiles

Notation : pour chaque scalaire λ, on abrégera[31]

$$E_\lambda := \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}) = \{v \in E \; ; \; f(v) = \lambda v\}$$

la dernière égalité découlant à $v \in E$ fixé des équivalences

$$v \in E_\lambda \iff [f - \lambda \operatorname{Id}](v) = 0 \iff f(v) - \lambda v = 0 \iff f(v) = \lambda v.$$

Par exemple, E_0 est le noyau de f et E_1 est formé des vecteurs fixés par f.

Il pourra nous arriver en contexte matriciel d'abréger

$$E_\lambda := \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) = \{V \in K^n \; ; \; AV = \lambda V\},$$

le contexte levant toute ambigüité quand à savoir si l'on parle de $E_\lambda(A)$ ou de $E_\lambda(f)$.

Remarque – Il nous arrivera de rajouter à f une homothétie. L'effet sur les espaces E_λ est aisé à décrire vu (pour chaques scalaires λ, ρ) les égalités

$$E_\lambda(f + \rho \operatorname{Id}) = \operatorname{Ker}((f + \rho \operatorname{Id}) - \lambda \operatorname{Id}) = \operatorname{Ker}(f - (\lambda - \rho)\operatorname{Id}) = E_{\lambda-\rho}(f).$$

On retiendra de même l'égalité[32]

$$\forall \lambda, \rho \in K, \; E_\lambda(A + \rho I_n) = E_{\lambda-\rho}(A).$$

[31] Si l'on change d'endomorphisme, on précisera alors ce dernier en écrivant $E_\lambda(f)$.
[32] ρ pour « **r**apport » (de l'homothétie).

Lemme (hors programme)

f stabilise les noyau et image de chaque endomorphisme commutant avec lui[33] *:*

$$\forall c \in L(E), \ fc = cf \Longrightarrow \operatorname{Ker} c \textit{ et } \operatorname{Im} c \textit{ stables par } f.$$

Démonstration

Soit[34] $c \in L(E)$ qui commute avec f. Pour chaque $k \in \operatorname{Ker} c$, on a alors les égalités

$$c(f(k)) = cf(k) = fc(k) = f(c(k)) = f(0) = 0, \text{ d'où } f(k) \in \operatorname{Ker} c.$$

Pour chaque $i \in \operatorname{Im} c$, en évoquant un antécédent a de i par c, on a l'appartenance

$$f(i) = f(c(a)) = c(f(a)) \in \operatorname{Im} c.$$

Corollaire

f stabilise l'espace $E_\lambda(c)$ pour chaque scalaire λ et pour chaque endomorphisme c commutant avec f.

Démonstration

Soit $c \in L(E)$ tel que $cf = fc$, soit $\lambda \in K$. Alors l'endomorphisme c et l'homothétie $\lambda \operatorname{Id}$ commutent avec f, donc leur différence $c - \lambda \operatorname{Id}$ aussi, donc (d'après le lemme précédent) f stabilise le noyau $\operatorname{Ker}(c - \lambda \operatorname{Id}) = E_\lambda(c)$, *c. q. f. d.*

Corollaire

f stabilise l'espace E_λ pour chaque scalaire λ.

Démonstration : imposer $c := f$ dans le corollaire précédent.

Remarque – Voici un argument direct sans le lemme : pour chaque $v \in E_\lambda$, l'image $f(v) = \lambda v$ reste dans E_λ puisque ce dernier est un sous-espace vectoriel.

Exercice d'application

a. *Soient λ un scalaire et α un automorphisme de E Montrer alors l'égalité*

$$E_\lambda\left(\alpha f \alpha^{-1}\right) = \alpha\left(E_\lambda(f)\right).$$

b. *En déduire, pour chaque endomorphisme g conjugué à f, les égalités ensemblistes*

$$\{\lambda \in K \ ; \ E_\lambda(f) \neq 0\} = \{\lambda \in K \ ; \ E_\lambda(g) \neq 0\}.$$

[33] *Rappel* : la multiplication dans l'algèbre $L(E)$ est la composition. Ainsi la notation fc signifie-t-elle $f \circ c$.

[34] c pour « **c**ommute », k pour « **K**er », i pour « **I**m » et a pour « **a**ntécédent ».

a. On a à $v \in E$ fixé les équivalences

$$\begin{aligned} v \in E_\lambda\left(\alpha f \alpha^{-1}\right) & \iff \left[\alpha f \alpha^{-1}\right](v) = \lambda v \overset{\text{appliquer } \alpha^{-1}}{\iff} \left[\alpha^{-1}\alpha f \alpha^{-1}\right](v) = \alpha^{-1}(\lambda v) \\ & \iff f\left(\alpha^{-1}(v)\right) = \lambda\left(\alpha^{-1}(v)\right) \iff \alpha^{-1}(v) \in E_\lambda(f) \\ & \iff v \in \alpha\left(E_\lambda(f)\right), \text{ d'où l'égalité voulue.} \end{aligned}$$

Remarque – On aurait pu également d'abord montrer le résultat pour $\lambda = 0$ puis utiliser la factorisation

$$\alpha f \alpha^{-1} - \lambda \operatorname{Id} = \alpha\left(f - \lambda \operatorname{Id}\right)\alpha^{-1}.$$

b. On a pour chaque scalaire $\lambda \in K$ les équivalences

$$E_\lambda\left(\alpha f \alpha^{-1}\right) = \{0\} \underset{\text{précède}}{\overset{\text{ce qui}}{\iff}} \alpha\left(E_\lambda(f)\right) = \{0\} \underset{\text{et } \alpha(0)=0}{\overset{\alpha \text{ bijective}}{\iff}} E_\lambda(f) = \{0\},$$

d'où l'égalité des ensembles

$$\left\{\lambda \in K \; ; \; E_\lambda\left(\alpha f \alpha^{-1}\right) = 0\right\} = \left\{\lambda \in K \; ; \; E_\lambda(f) = 0\right\}.$$

On conclut en appliquant le complémentaire dans K et en se souvenant que les conjugués de f sont précisément les $\alpha f \alpha^{-1}$ lorsque α décrit $GL(E)$.

2 Langage spectral

2.1 Cas des endomorphismes

2.1.1 Valeurs propres, vecteurs propres, spectre

Définition

*On appelle **valeur propre**[35] de f tout scalaire λ tel que*

$$\exists v \in E, \ v \neq 0 \text{ et } f(v) = \lambda v.$$

*Un tel v est alors dit **associé** à la valeur propre λ (pour f).*

*On appelle **vecteur propre**[36] de f tout vecteur v non nul tel que*

$$\exists \lambda \in K, \ f(v) = \lambda v.$$

[35] En anglais : *eigenvalue* (le *eigen* se prononce « aï-gueune » et non « ii-jêne »).
[36] Suggestion d'abréviation : $\overrightarrow{v}p$. En anglais : *eigenvector*.

*Un tel λ est alors dit **associé** au vecteur propre v (pour f).*

Remarques

• L'égalité $f(0) = \lambda 0$ étant vérifiée pour chaque scalaire λ (elle équivaut à $0 = 0$ par linéarité de f), distinguer de tels λ n'a aucun intérêt. C'est pourquoi la définition précédente impose la non-nullité de chaque vecteur propre :

Un vecteur propre n'est jamais nul[37] *!*

• Un couple $(\lambda, v) \in K \times E$ tel que $\begin{cases} f(v) = \lambda v \\ v \neq 0 \end{cases}$ est appelé un ***couple propre*** de f. Ainsi la détermination du spectre de f passe-t-elle par la recherche[38] de ses couples propres.

• Une égalité $f(v) = \lambda v$ possède une lecture matricielle immédiate. Soit $\mathcal{B}$ une base de E (imposé ici de dimension finie) et soit v un vecteur de $\mathcal{B}$. Alors, pour chaque scalaire λ, le couple (λ, v) est propre pour f ssi

$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} f(v) = {}^t(0, 0, ..., 0, \lambda, 0, 0, ..., 0) \text{ où } \lambda \text{ est en position diagonale.}$$

En corollaires immédiats[39] :

$\text{Mat}_{\mathcal{B}} f$ *est diagonale ssi* $\mathcal{B}$ *est constituée de vecteurs propres de* f

et

si $\text{Mat}_{\mathcal{B}} f$ *est triangulaire supérieure (resp. inférieure), alors le premier (resp. dernier) vecteur de* $\mathcal{B}$ *est un vecteur propre de* f.

Notation : l'ensemble des valeurs propres de f sera dans ce cours noté

$$\text{Vp} f := \{\lambda \in K \; ; \; \exists v \in E \setminus \{0\} \, , \; f(v) = \lambda v\} \, .$$

Définition

*Lorsque E est de dimension finie, on appelle **spectre** de f l'ensemble de ses valeurs propres et on le note*

$$\text{Sp} f := \text{Vp} f \qquad \textit{(quand } E \textit{ est de dimension finie).}$$

Remarques

• *Culture physique* : la terminologie *spectre* possède une interprétation *lumineuse* en mécanique quantique où l'équation dite de Schrödinger s'écrit[40] (sous sa forme dite indépendante du temps)

$$H(\Psi) = \mathcal{E}\Psi \qquad \text{où } H \in L(E) \, , \; \Psi \in E \text{ et } \mathcal{E} \text{ est une énergie.}$$

[37] *Aide mnémonique* : $\overrightarrow{0}$ est un vecteur "sale".

[38] *Culture* : l'équation $f(v) = \lambda v$ d'inconnue $(\lambda, v) \in K \times E \setminus \{0\}$ est appelée ***équation aux éléments propres*** (de f).

[39] La lectrice et le lecteur pointilleux vérifieront, dans le cas pathologique où E est nul, le caractère tautologique des équivalences affirmées (alors vides de sens).

[40] Les vecteurs Ψ s'appellent les ***états*** du système et l'opérateur H s'appelle son ***hamiltonien*** (d'après William Rowan Hamilton).

Vu la correspondance[41] entre énergie et longueur d'onde, donc entre énergies et raies du spectre du champ électrique $\overrightarrow{E}$, les énergies "propres à l'opérateur H" (au sens de l'équation ci-dessus) correspondent à un ensemble de longueurs d'onde[42] λ "propres à l'opérateur H", *i. e.* à une partie du spectre lumineux "propre à H" : *le spectre* de H.

- *Culture hors programme* : en dimension quelconque, le spectre de f est défini par les valeurs dites ***spectrales*** de f (à savoir les scalaires λ tels que $f - \lambda \operatorname{Id}_E \notin GL(E)$) dont font partie les valeurs propres de f, la réciproque tenant quand E est de dimension finie (mais devenant sinon fausse en général). Ceci devrait éclairer la terminologie *spectrale* employée en dimension finie.

Exemples

1. Soit I un intervalle infini réel. Si $\left\{ \begin{array}{c} E = C^\infty(I, \mathbb{K}) \\ f = [v \mapsto v'] \end{array} \right.$, l'égalité $\exp' = \exp$ montre que 1 est valeur propre de f. Plus généralement, pour chaque scalaire λ le couple $\left(\lambda, t \mapsto e^{\lambda t}\right)$ est un couple propre de f, lequel a donc pour ensemble de valeurs propres tout le corps de base :
$$\operatorname{Vp}[v \mapsto v'] = \mathbb{K} \text{ sur } C^\infty(I, \mathbb{K}).$$

2. Imposons que f soit la dérivation polynomiale sur $E = K[X]$. Soit (λ, P) un couple propre de f. On a alors l'égalité
$$\deg P' = \deg \lambda P = \left\{ \begin{array}{l} -\infty \text{ si } \lambda = 0 \\ \deg P \text{ sinon} \end{array} \right. .$$
Or l'égalité $\deg P' = \deg P$ est à exclure vu que $P \neq 0$: on obtient donc $\lambda = 0$. Réciproquement, chaque polynôme constant non nul est un vecteur propre associée à la valeur propre 0. Par conséquent,
$$\operatorname{Vp}[v \mapsto v'] = \{0\} \text{ sur } K[X].$$

3. Déterminons le spectre d'une homothétie. Soit r un scalaire et imposons $f = r \operatorname{Id}$. Alors le couple (r, v) est un couple propre de f pour chaque vecteur $v \neq 0$, d'où l'inclusion $\{r\} \subset \operatorname{Vp} f$ sous l'hypothèse $E \neq \{0\}$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $\lambda \in \operatorname{Vp} f$, soit v un vecteur propre associé : le vecteur $f(v)$ vaut alors d'une part λv (par définition d'une valeur propre), d'autre part rv (puisque $f = r \operatorname{Id}$), d'où l'égalité $\lambda v = rv$, la non-nullité du vecteur propre v permettant[43] de déduire l'égalité $\lambda = r$ souhaitée. Conclusion :
$$\forall \lambda \in K, \ \operatorname{Vp}(\lambda \operatorname{Id}) = \{\lambda\} \text{ sauf si } E = \{0\}.$$
Remarque – Lorsque $E = \{0\}$, il n'y pas de vecteur non nul, donc il n'y a aucun couple propre et l'unique endomorphisme de E a un spectre vide :
$$E = \{0\} \Longrightarrow \operatorname{Sp} f = \emptyset.$$

[41] Cette correspondance se fait *via* l'égalité $\lambda \mathcal{E} = hc$ où h dénote la constante de Planck et c la célérité de la lumière (dans le vide).

[42] λ comme « longueur d'onde » : ainsi l'utilisation de cette lettre pour désigner les valeurs propres – et, partant, les scalaires.

[43] Bien observer ce que permet la non-nullité d'un vecteur propre !

4. Soit $(\lambda, g) \in K \times K^{\mathbb{N}}$. Alors le couple (λ, g) est propre pour le "tapis roulant"

$$\gamma := \left\{ \begin{array}{ccc} K^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & K^{\mathbb{N}} \\ (a, b, c, d, ...) & \longmapsto & (b, c, d, ...) \end{array} \right. \text{ vers la gauche}$$

ssi la suite g est géométrique de raison λ et de premier terme non nul, ce qui montre que chaque scalaire est valeur propre de γ.

Si l'on remplace $K^{\mathbb{N}}$ par son sous-espace vectoriel formé des suites *bornées*, alors l'ensemble des valeurs propres du "tapis roulant" induit est le disque unité fermé (une suite géométrique non nulle étant bornée ssi sa raison est majorée par 1 en module).

5. On impose $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ et que f soit l'opérateur[44]

$$\varphi \mapsto \left[t \mapsto \varphi\left(\frac{t}{2}\right) + \varphi\left(\frac{t+1}{2}\right) \right].$$

Montrons alors que chaque valeur propre de f est de module au plus 2.

Soit (λ, φ) un couple propre pour f. Vu que φ est continue et que son domaine $[0,1]$ est un segment, l'application $|\varphi|$ atteint son maximum en un certain $t \in [0,1]$. On a alors les comparaisons

$$\begin{aligned} |\,[f(\varphi)](t)\,| &= \left| \varphi\left(\frac{t}{2}\right) + \varphi\left(\frac{t+1}{2}\right) \right| \leq \left| \varphi\left(\frac{t}{2}\right) \right| + \left| \varphi\left(\frac{t+1}{2}\right) \right| \\ &\leq \max|\varphi| + \max|\varphi| = 2\,|\varphi(t)|\,. \end{aligned}$$

Puisque $|\varphi|$ est non nulle (la fonction φ est un vecteur propre), son maximum est non nul et il fait sens de diviser par ce dernier dans les comparaisons précédentes, ce qui livre la comparaison $\left| \frac{[f(\varphi)](t)}{\varphi(t)} \right| \leq 2$. Or, la fonction φ étant propre pour f, le rapport $\frac{[f(\varphi)](t)}{\varphi(t)}$ vaut $\frac{[\lambda\varphi](t)}{\varphi(t)} = \lambda$, d'où la conclusion $|\lambda| \leq 2$.

Remarque – L'intérêt de ce résultat est d'en dériver l'égalité[45]

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\,,\ \sum_{z \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(t-z)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin \pi t}\right)^2.$$

En effet, un peu d'analyse montrerait que la différence des deux membres peut être vue comme une fonction élément de E sur laquelle f agit par multiplication par 4. Ce dernier scalaire n'était pas valeur propre, la fonction associée doit être nulle.

Exercice d'application

Déterminer les valeurs propres de l'opérateur

$$u := \left\{ \begin{array}{ccc} K[X] & \longrightarrow & K[X] \\ P & \longmapsto & (X^2-1)P' - 2nXP \end{array} \right. \textit{ (on rappelle } n \in \mathbb{N}\textit{).}$$

[44] Bien s'assurer que f fait sens.

[45] Nous verrons au chapitre ? ? ? quel sens donner à la somme de gauche.

Résolvons l'équation aux éléments propres de u. Soient λ un scalaire et P un polynôme non nul dont on note C le coefficient dominant et ω_ρ l'ordre de multiplicité de chaque scalaire $\rho \in K$. On a alors les équivalences

$$\begin{array}{rcl}
u(P) = \lambda P & \iff & \left(X^2-1\right) P' - 2nXP = \lambda P \\
& \iff & \dfrac{P'}{P} = \dfrac{2nX+\lambda}{X^2-1} \text{ dans } K(X) \\
& \overset{\text{décomposition en}}{\underset{\text{éléments simples}}{\iff}} & \displaystyle\sum_{\rho\in K} \frac{\omega_\rho}{X-\rho} = \frac{n+\frac{\lambda}{2}}{X-1} + \frac{n-\frac{\lambda}{2}}{X+1} \\
& \overset{\text{unicité de}}{\underset{\text{la d. é. s.}}{\iff}} & \begin{cases} \forall \rho \in K\backslash\{-1,1\}, \ \omega_\rho = 0 \\ \omega_1 = n + \frac{\lambda}{2} \\ \omega_{-1} = n - \frac{\lambda}{2} \end{cases} \\
& \overset{\omega_1 \text{ et } \omega_{-1}}{\underset{\text{entiers positifs}}{\iff}} & \begin{cases} n+\frac{\lambda}{2} \in \mathbb{N} \text{ et } n-\frac{\lambda}{2} \in \mathbb{N} \\ P = C(X-1)^{n+\frac{\lambda}{2}} (X+1)^{n-\frac{\lambda}{2}} \end{cases} \text{, d'où l'égalité} \\
\operatorname{Vp} u & = & 2(\mathbb{N}-n) \cap 2(n-\mathbb{N}) = 2[-n,n|] .
\end{array}$$

En français : les valeurs propres de u sont les entiers pairs compris entre $-2n$ et $2n$.

Rappel : chaque décomposition $P = \prod_{\rho\in R} (X-\rho)^{\omega_\rho}$ où R est un ensemble fini livre une égalité

$$\frac{P'}{P} = \sum_{\rho\in R} \frac{\omega_\rho}{X-\rho}.$$

2.1.2 Sous-espaces propres

Propriété – Définition

Soit $\lambda \in K$. Alors λ est valeur propre de f ssi E_λ est non nul[46].

*Dans ce cas, le sous-espace E_λ est appelé le **sous-espace propre**[47] (de f) associé à λ.*

Démonstration

On a les équivalences

$$\begin{array}{rl}
\lambda \in \operatorname{Vp} f & \iff \exists v \in E\backslash\{0\}, \ f(v) = \lambda v \overset{\text{déf. de } E_\lambda}{\iff} \exists v \in E\backslash\{0\}, \ v \in E_\lambda \\
& \iff \exists v \in E_\lambda, \ v \notin \{0\} \overset{\text{contraposée}}{\iff} E_\lambda \not\subset \{0\} \overset{0\in E_\lambda}{\iff} E_\lambda \neq \{0\} .
\end{array}$$

[46] Rappelons la notation $E_\lambda = \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id})$.

[47] En anglais : *eigenspace*.

Remarques

• Pour chaque valeur propre λ, le sous-espace propre associé à λ est formé des vecteurs propres associés à λ ET DU VECTEUR NUL[48].

• La stabilité des E_λ exprimée à la section 1.4 se reformule :

f stabilise chacun de ses sous-espaces propres.

• L'égalité $E_\lambda(f+\rho\,\mathrm{Id}) = E_{\lambda-\rho}(f)$ montrée à la section 1.4 d'écrit l'effet sur les sous-espaces propres d'une translation par une homothétie. En particulier, nous en déduisons l'effet sur le spectre :

$$\forall \rho \in K,\ \mathrm{Sp}\,(f+\rho\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Sp}\,f + \rho = \{\lambda+\rho\ ;\ \lambda \in \mathrm{Sp}\,f\}\,.$$

• En dimension finie, la formule du rang donne une expression simple de la dimension d'un sous-espace propre :

$$\forall \lambda \in K,\ \dim E_\lambda = \dim E - \mathrm{rg}\,(f-\lambda\,\mathrm{Id})\,.$$

• Soit $\lambda \in K$. Puisque f stabilise E_λ, son induit sur E_λ fait sens et est une homothétie de rapport λ :

$$f = \lambda\,\mathrm{Id} \text{ sur } E_\lambda.$$

Par conséquent, lorsque E_λ est de dimension finie, les matrices de l'induit $f_{|E_\lambda}$ sont égales et scalaires :

$$\forall \mathcal{B} \text{ base de } E_\lambda,\ \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}\, f_{|E_\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

• Vu que $E_0 = \mathrm{Ker}\,f$, le scalaire 0 est valeur propre de f ssi f est non injective[49] :

$$f \text{ injective} \iff 0 \notin \mathrm{Vp}\,f.$$

• En particulier, si f est nilpotent, il n'est pas injectif (sauf si[50] $E = \{0\}$), donc admet 0 comme valeur propre :

$$f \text{ nilpotent} \Longrightarrow 0 \in \mathrm{Vp}\,f \qquad \text{(sauf si } E \text{ est nul).}$$

• Puisque $E_1 = \mathrm{Fix}\,f$, le scalaire 1 est valeur propre de f ssi f fixe (au moins) un vecteur non nul.

• En dimension nulle, il n'y a aucun sous-espace vectoriel non nul, donc aucun sous-espace propre et on retrouve l'absence de valeur propre.

• Afin d'éclairer à nouveau la terminologie *spectre*, citons quelques lignes de l'ouvrage *Les mots et les maths* de Bertrand Hauchecorne :

« Le mot latin **spectrum** est construit sur la racine latine **specere**, **regarder** que l'on retrouve dans **spectacle**. [...] Newton utilise la latin **spectrum** en 1671 pour désigner les raies de décomposition de la lumière blanche. Il fait ainsi renaître le sens

---

[48] *Attention* : même si le vecteur nul n'est pas un vecteur propre, il appartient à chaque sous-espace propre.

[49] Nous avons vu l'exemple de la dérivation.

[50] Les pathologistes voudront bien se rappeler que l'unique endomorphisme de $\{0\}$ est à la fois nul, injectif, constant, surjectif, idempotent, involutif et nilpotent.

originel du mot et considère que chaque raie est une image de la lumière initiale. C'est sans doute par analogie avec cette acception que l'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme est appelé spectre. La décomposition d'une matrice suivant les espaces propres donne bien une image de cet endomorphisme sur chacun d'entre eux. »

Pour filer la métaphore, on pourrait dire que l'*intensité* d'une raie lumineuse correspond à la *dimension* du sous-espace propre associé, un endomorphisme scalaire correspondant ainsi à une lumière monochromatique.

Exemples

1. Lorsque $\begin{cases} E = C^\infty(I, \mathbb{K}) \\ f = [v \mapsto v'] \end{cases}$, le sous-espace E_λ est formé (à $\lambda \in \mathbb{K}$ fixé) des solutions de l'équation différentielle $v' = \lambda v$ (d'inconnue v), donc est la droite vectorielle engendrée par $t \mapsto e^{\lambda t}$. On en déduit que chacun des sous-espaces propres de f est une droite.
2. Lorsque $\begin{cases} E = K[X] \\ f = [v \mapsto v'] \end{cases}$, on a vu que $\operatorname{Vp} f = \{0\}$, donc l'unique sous-espace propre de f est $E_0 = \operatorname{Ker} f$, il est formé des polynômes constants, c'est encore une droite vectorielle.
3. Lorsque $\begin{cases} E = C^\infty(I, \mathbb{C}) \\ f = [v \mapsto v''] \end{cases}$, d'une part le noyau E_0 de f est formé des fonctions affines, d'autre part, pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}^*$, le sous-espace E_λ est formé des solutions de l'équation différentielle $v'' = \lambda v$ (d'inconnue v), donc est le plan vectoriel engendré par $\begin{cases} t \mapsto \operatorname{ch} \rho t \\ t \mapsto \operatorname{sh} \rho t \end{cases}$ où ρ dénote une racine carrée de λ. Par conséquent, chaque complexe est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est un plan vectoriel.
4. Lorsque f est une homothétie (dont on note λ le rapport), on a l'égalité $E_\lambda = E$, donc l'unique sous-espace propre de f (lorsqu'il fait sens, *i. e.* quand $E \neq \{0\}$) vaut tout l'espace.
5. Lorsque f est un projecteur, la décomposition de E en somme directe de l'espace $E_1 = \operatorname{Im} f$ sur lequel on projette et de l'espace $E_0 = \operatorname{Ker} f$ parallèlement auquel on projette s'écrit
$$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E_0 \oplus E_1.$$
Le spectre inclut[51] $\{0, 1\}$ ssi E_0 et E_1 sont tous deux non nuls, *i. e.* si $f \notin \{0, \operatorname{Id}\}$.
6. Lorsque f est une symétrie[52], on a comme ci-dessus l'égalité
$$E = E_{-1} \oplus E_1.$$
Le spectre vaut $\{-1, 1\}$ ssi E_{-1} et E_1 sont tous deux non nuls, *i. e.* si $f \notin \{-\operatorname{Id}, \operatorname{Id}\}$.

[51] Nous verrons l'inclusion réciproque $\operatorname{Vp} f \subset \{0, 1\}$ par une méthode plus générale (*cf.* chapitre ? ? ?).

[52] *Rappel* : une symétrie (sous-entendu vectorielle) de E est un endomorphisme de E involutif, *i. e.* est un $s \in L(E)$ tel que $s \circ s = \operatorname{Id}$.

Les trois derniers exemples témoignent d'un fait général.

Propriété

1. *Les sous-espaces propres de f sont en somme directe.*
2. *Est libre chaque famille formée de vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes.*

Démonstration

1. Une preuve économe utilisant le lemme de décomposition des noyaux sera présentée au chapitre ? ? ?. Pour une preuve directe (mais plus longue), se reporter à la remarque ci-bas.
2. Soit $\Lambda \subset \mathrm{Vp}\, f$ fini, soit $(v_\lambda) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda \setminus\{0\}$, soit $(\alpha_\lambda) \in K^\Lambda$ tel que

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda v_\lambda = 0 \text{ (relation de liaison entre les } v_\lambda\text{).}$$

Le point précédent implique pour chaque $\lambda \in \Lambda$ la nullité de $\alpha_\lambda v_\lambda$, *i. e.* (vu que $v_\lambda \neq 0$) la nullité de α_λ, *c. q. f. d.*

Remarque – Il est possible de montrer le premier point directement par récurrence sur le cardinal d'une partie Λ finie de $\mathrm{Vp}\, f$, récurrence motivée par l'heuristique suivante : étant donnée une famille $(v_\lambda) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda \setminus\{0\}$ de vecteurs propres de f,

$$\text{une égalité } 0 = \sum_{\lambda\in\Lambda} v_\lambda \text{ implique}$$

1. d'une part (appliquer f) les égalités $0 = \sum f(v_\lambda) = \sum \lambda v_\lambda$,
2. d'autre part (multiplier par un λ_0 fixé) l'égalité $0 = \sum \lambda_0 v_\lambda$,

d'où par différence

$$\text{une égalité } \sum_{\lambda\neq\lambda_0} (\lambda - \lambda_0)\, v_\lambda = 0.$$

La lectrice et le lecteur sont invités à formaliser cette récurrence.

Exemples

1. Pour chaque famille $\lambda \in \mathbb{C}^I$ injective, la famille $\left(t \mapsto e^{\lambda_i t}\right)_{i\in I}$ est libre dans $C^\infty([0,1], \mathbb{C})$ car est formée de vecteurs propres pour la dérivation associés à des valeurs propres deux à deux distincts (par injectivité de λ).
2. Avec les mêmes notations, la famille $\left(t \mapsto t^{\lambda_i}\right)$ est libre dans $C^\infty([1,8], \mathbb{C})$ car est formée de vecteurs propres pour l'endomorphisme $\varphi \mapsto [t \mapsto t\varphi'(t)]$.

Corollaire

Imposons E de dimension finie. Alors f possède au plus $\dim E$ *valeurs propres :*

$$\operatorname{Card} \operatorname{Sp} f \leq \dim E.$$

Plus précisément, les sous-espaces propres de f sont en nombre fini et la somme de leurs dimensions vaut au plus la dimension de E :

$$\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} \dim E_\lambda \leq \dim E.$$

Démonstration

Montrons tout d'abord[53] que chaque partie *finie* de $\operatorname{Sp} f$ est de cardinal au plus n. Soit donc Λ une telle partie. La somme $\sum_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ est alors d'une part de dimension finie (en tant que sous-espace vectoriel de E), d'autre part directe d'après la proposition précédente, d'où la minoration

$$\dim E \geq \dim \sum_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda = \dim \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} \dim E_\lambda.$$

Or E_λ est non nul pour chaque $\lambda \in \operatorname{Sp} f$, en particulier pour chaque $\lambda \in \Lambda$, ce qui permet de minorer la somme de droite par $\sum_{\lambda \in \Lambda} 1 = \operatorname{Card} \Lambda$, d'où la conclusion.

On en déduit que $\operatorname{Sp} f$ n'est pas infini (sinon il inclurait des parties finies de cardinal arbitrairement grand, en particulier supérieur à $\dim E + 1$, contredisant ce que l'on vient d'établir), donc est fini. On peut donc appliquer ce qui précède en imposant $\Lambda = \operatorname{Sp} f$, ce qui conclut.

Proposition

f stabilise chaque sous-espace propre de chaque endomorphisme commutant avec lui :

$$\begin{matrix} \forall c \in L(E) \\ \forall \lambda \in K \end{matrix}, \ cf = fc \Longrightarrow f(E_\lambda(c)) \subset E_\lambda(c).$$

Démonstration : déjà fait à la section 1.4.

Exercices d'application

1. *Qualifions de* ***propre*** *(pour f) toute partie de E sur laquelle f agit comme une homothétie. Montrer que les parties propres de f maximales pour l'inclusion sont ses sous-espaces propres.*

[53] Cette première partie n'est pas une subtilité gratuite. Avec les seuls outils du programme, on ne saurait *a priori* donner sens aux minorations (valides et bien plus directes)

$$\dim E \geq \dim \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} E_\lambda = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} \dim E_\lambda \geq \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} 1 \geq \operatorname{Card} \operatorname{Sp} f$$

car les cardinaux en jeu sont *a priori* infinis.

2. *On impose E de dimension finie. Montrer qu'est alors nilpotent chaque vecteur propre de l'opérateur*[54]

$$C:\left\{\begin{array}{ccc} L(E) & \longrightarrow & L(E) \\ u & \longmapsto & [f,u]:=fu-uf \end{array}\right. \quad \textit{qui n'est pas dans son noyau.}$$

On pourra pour chaque couple propre (λ,u) établir l'égalité $[f,u^n]=\lambda n u^n$.

3. *Déterminer quand $E=C(\mathbb{R},\mathbb{K})$ les sous-espaces propres de l'application*

$$\left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \varphi & \longmapsto & t\mapsto\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}\varphi \textit{ si } t\neq 0 \\ \varphi(0) \textit{ si } t=0 \end{array}\right. \end{array}\right. .$$

---

a. Soit V une partie de E. On a alors les équivalences

$$\begin{array}{ll} & V \text{ partie propre de } f \text{ maximale} \\ \Longleftrightarrow & \exists\lambda\in K,\ \left\{\begin{array}{ll} \forall v\in V,\ f(v)=\lambda v & \text{(condition de propreté)} \\ \forall e\in E\backslash V\ ,\ f(e)\neq\lambda e & \text{(condition de maximalité)} \end{array}\right. \\ \Longleftrightarrow & \exists\lambda\in K,\ V=\{e\in E\ ;\ f(e)=\lambda e\} \\ \Longleftrightarrow & \exists\lambda\in K,\ V=E_\lambda(f) \\ \Longleftrightarrow & V \text{ est un sous-espace propre de } f. \end{array}$$

1. Soit (λ,v) un couple propre de C. Montrons comme suggéré et par récurrence l'égalité

$$\forall N\in\mathbb{N}^*,\ \left[f,v^N\right]=\lambda N v^N.$$

Puisque (λ,v) est propre pour C, on a l'égalité $[f,v]=\lambda v$, ce qui "enclenche" la récurrence. Soit maintenant $N\geq 1$ un naturel tel que $\left[f,v^N\right]=\lambda N v^N$. On a alors les égalités

$$\left[f,v^{N+1}\right]=\left(fv^N\right)v-v^N(vf)=\left(\lambda N v^N+v^N f\right)v-v^N(fv-\lambda v)=\lambda(N+1)v^{N+1},$$

ce qui termine la récurrence.

Concluons en rajoutant l'hypothèse $v\notin\operatorname{Ker}C$ (laquelle implique $\lambda\neq 0$). Soit $N\in\mathbb{N}$ tel que $v^N\neq 0$. L'égalité du lemme montre alors que $\left(N\lambda,v^N\right)$ est couple propre de C, d'où l'appartenance $N\lambda\in\operatorname{Sp}C$. Or l'ensemble $\{N\lambda\}_{N\in\mathbb{N}}$ est infini (car $\lambda\neq 0$) et C ne possède qu'un nombre fini de valeurs propres (car $L(E)$ est de dimension finie $(\dim E)^2$) : l'ensemble $\left\{N\in\mathbb{N}\ ;\ v^N\neq 0\right\}$ est par conséquent fini et son complémentaire est non vide, d'où un $N\in\mathbb{N}$ tel que $v^N=0$.

Remarque – L'hypothèse « *qui n'est pas dans son noyau* » est indispensable en dimension non nulle : en effet, le vecteur Id n'est jamais nilpotent (car $E\neq\{0\}$) mais tombe toujours dans $\operatorname{Ker}C$ (car commute avec chaque endomorphisme de E).

[54] *Culture* : la différence $[f,u]$ s'appelle le ***crochet de* Lie** de f et u (d'après Sophus Lie), il mesure leur défaut de commutativité. Selon Alain Connes et Carlo Rovelli, c'est à travers ce dernier défaut que se manifesterait le "temps" d'une algèbre.

2. Notons F l'application de l'énoncé, dont on admettra qu'elle fait sens et est linéaire. Une observation utile : chaque image par F est une fonction *paire*[55].

(a) Montrons que le noyau $\operatorname{Ker} F$ (sous-espace propre $E_0(F)$) est formé des fonctions impaires de E.

Soit $\iota \in E$ impaire. Alors d'une part ι est nulle en 0, d'où la nullité de $F(\iota)(0) = \iota(0)$, d'autre part son intégrale sur chaque segment centré en 0 est nulle, d'où la nullité de $F(\iota)$ sur $\mathbb{R}^*$. L'un dans l'autre, l'image $F(\iota)$ est nulle, *i. e.* $\iota \in \operatorname{Ker} F$.

Soit réciproquement $k \in \operatorname{Ker} f$. La fonction

$$t \mapsto 2t\ F(k)(t) = \int_{-t}^{t} k = \int_0^t k - \int_0^{-t} k$$

est alors nulle sur $\mathbb{R}^*$, donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée nulle, d'où pour chaque $t \in \mathbb{R}^*$ les égalités[56]

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t k - \int_0^{-t} k\right) \underset{\text{continue}}{\overset{k \text{ est}}{=}} k(t) - (-k(-t)) = k(t) + k(-t),$$

d'où l'imparité de $k_{|\mathbb{R}^*}$, la continuité de k en 0 permettant d'étendre cette imparité à tout $\mathbb{R}$.

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Montrons alors que λ est valeur propre de F et que le sous-espace propre $E_\lambda(F)$ est la droite vectorielle dirigée par la fonction $\pi := t \mapsto |t|^\mu$ (π comme « **p**uissance ») où $\mu := \frac{1}{\lambda} - 1$.

Montrons déjà que la fonction π appartient au dit sous-espace propre. On a pour chaque réel $t > 0$ les égalités

$$\begin{aligned} F(\pi)(t) &= \frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} \pi = \frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} |u|^\mu\, du \underset{\text{l'intégrande}}{\overset{\text{parité de}}{=}} \frac{1}{t}\int_0^t |u|^\mu\, du \\ &= \frac{1}{t}\int_0^t u^\mu du \overset{\mu \neq -1}{=} \frac{1}{t}\frac{1}{\mu+1} t^{\mu+1} = \lambda t^\mu \overset{t \geq 0}{=} \lambda \pi(t), \end{aligned}$$

ce qui montre que la différence $F(\pi) - \lambda\pi$ est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$. Cette différence étant par ailleurs paire et continue, elle est nulle sur tout $\mathbb{R}$, d'où l'appartenance désirée.

Soit maintenant $\varphi \in E_\lambda(F)$ et montrons que φ est colinéaire à la fonction π. Puisque λ est non nul, on peut écrire

$$\forall t \in \mathbb{R}^*,\ \varphi(t) = \frac{1}{2\lambda t}\int_{-t}^{t} \varphi.$$

Ces dernières égalités montrent que φ est paire et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec pour dérivée (en un $t \in \mathbb{R}^*$ fixé)

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\lambda t}\int_{-t}^{t}\varphi\right) = \frac{-1}{2\lambda t^2}\int_{-t}^{t}\varphi + \frac{\varphi(t) + \varphi(-t)}{2\lambda t} \\ &\underset{\text{et parité de } \varphi}{\overset{\text{égalité ci-dessus}}{=}} -\frac{\varphi(t)}{t} + \frac{\varphi(t)}{\lambda t} \underset{\text{de } \mu}{\overset{\text{définition}}{=}} \frac{\mu\varphi(t)}{t}, \end{aligned}$$

[55] On montrerait plus généralement que l'image $\operatorname{Im} F$ est formée des fonctions paires dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

[56] *Rappel* : dès que cela fait sens, on a l'égalité $\frac{\partial}{\partial t}\int_{u(t)}^{v(t)} f = v'(t) f(v(t)) - u'(t) f(u(t))$.

ce qui montre les égalités

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\varphi(t)}{|t|^{\mu}} = \frac{\varphi'(t)\,|t|^{\mu} - \varphi(t)\,\mu\frac{|t|^{\mu}}{t}}{|t|^{2\mu}} = \frac{0}{|t|^{2\mu}} = 0,$$

d'où la constance de $t \mapsto \frac{\varphi(t)}{|t|^{\mu}}$ sur $\mathbb{R}^*$. Soit donc $C \in \mathbb{K}$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\varphi(t) = C\,|t|^{\mu}$. La continuité de φ en 0 permet de propager la précédente égalité sur tout $\mathbb{R}$, ce qui conclut.

$$\textit{En résumé :} \left\{\begin{array}{l} E_0(F) = \{\varphi \in C(\mathbb{R},\mathbb{K}) \;;\; \varphi \text{ impaire}\} \\ \forall\lambda \in \mathbb{K}^*,\ E_\lambda(F) = \mathbb{K}\left(t \mapsto |t|^{\frac{1}{\lambda}-1}\right) \end{array}\right. .$$

2.2 Cas des matrices

2.2.1 Éléments propres, exemples

Définition

Notons ici $A\cdot$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A.
On appelle ***valeur propre*** *de A toute valeur propre de $A\cdot$.*
On appelle ***vecteur propre*** *de A toute vecteur propre de $A\cdot$.*
On appelle ***sous-espace propre*** *de A tout sous-espace propre de $A\cdot$.*
On appelle ***spectre*** *de A le spectre de $A\cdot$, noté* $\operatorname{Sp} A$.

Remarques
• On définirait également un ***couple propre*** de A un ***vecteur propre associé*** à une valeur propre (pour A), une ***valeur propre associée*** à un vecteur propre (pour A).
• Le spectre de l'endomorphisme $A\cdot$ de K^n étant de cardinal au plus $\dim K^n = n$, la matrice A possède au plus n valeurs propres :

$$\operatorname{Card}\operatorname{Sp} A \leq n.$$

• L'équation aux éléments propres de la matrice A s'écrit

$$AV = \lambda V \text{ d'inconnue } (\lambda, V) \in K \times K^n,$$

ce qui permet d'expliciter au besoin les définitions ci-dessus :

1. un couple propre de A est un (λ, V) vérifiant l'égalité ci-dessus avec V non nul ;
2. une valeur propre de A est l'"abscisse" λ de tout couple propre (λ, V) ;
3. un vecteur propre de A est l'"ordonnée" V de tout couple propre (λ, V).

En particulier, bien retenir que

chaque vecteur propre d'une matrice est une colonne de scalaires.

Exemples

1. Lorsque $A = \begin{pmatrix} -7 & 16 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, le vecteur $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ est propre pour A vu les égalités

$$A\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 16 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -3 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le spectre de A contient donc la valeur propre -3.

2. Lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, les vecteurs[57] $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont propres pour A vu les égalités

$$\begin{aligned} A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{et } A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le spectre de A contient donc les valeurs propres 0 et 2. Son cardinal valant par ailleurs au plus 2, on a l'égalité

$$\mathrm{Sp}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \{0, 2\}.$$

3. Lorsque $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$, le vecteur $(1, 1, 1)$ est propre pour A vu les égalités[58]

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix} = 15\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Plus généralement[59],

si la somme des coefficients de chaque ligne de A ne dépend pas de la ligne considérée, alors le vecteur $(1, 1, ..., 1)$ est propre pour A et la somme commune est une valeur propre de A.

C'est le cas par exemple des matrices de permutation où chaque ligne contient 1 pour seul coefficient non nul.

[57] La lectrice et le lecteur pourraient à bon droit se demander *comment* ces vecteurs propres ont été trouvés. Nous le verrons bientôt et leur demandons d'ici là de simplement vérifier les égalités données.

[58] La lectrice et le lecteur auront observé que A est un "carré magique".

[59] *Culture* : lorsque cette somme vaut 1, il est naturel d'interpréter les coefficients de chaque ligne (quand ils sont positifs) comme des *probabilités* et on dit alors que A est ***stochastique*** (synonyme d'*aléatoire*).

4. Toujours lorsque $A=\begin{pmatrix}6&1&8\\7&5&3\\2&9&4\end{pmatrix}$, le vecteur complexe $\begin{pmatrix}5+2\sqrt{6}i\\5-2\sqrt{6}i\\-7\end{pmatrix}$ est propre pour A au vu des égalités

$$\begin{pmatrix}6&1&8\\7&5&3\\2&9&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5+2\sqrt{6}i\\5-2\sqrt{6}i\\-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10i\sqrt{6}-21\\4i\sqrt{6}+39\\-14i\sqrt{6}+27\end{pmatrix}=2i\sqrt{6}\begin{pmatrix}5+2\sqrt{6}i\\5-2\sqrt{6}i\\-7\end{pmatrix}.$$

En appliquant aux égalités ci-dessus la conjugaison complexe (laquelle préserve les opérations polynomiales), on en déduit que le vecteur $\begin{pmatrix}5-2\sqrt{6}i\\5+2\sqrt{6}i\\-7\end{pmatrix}$ est également propre pour A avec $-2i\sqrt{6}$ pour valeur propre associée.

Finalement, puisque A possède au plus trois valeurs propres, nous avons montré l'égalité

$$\operatorname{Sp}\begin{pmatrix}6&1&8\\7&5&3\\2&9&4\end{pmatrix}=\left\{15,2i\sqrt{6},-2i\sqrt{6}\right\}.$$

À retenir : quand A est réelle, chaque couple est propre ssi son conjugué complexe l'est.

Proposition[60]

Lorsque E est de dimension finie, l'endomorphisme f a même spectre que chacune de ses matrices :

$$\forall\mathcal{B} \text{ base de } E,\ \operatorname{Sp} f=\operatorname{Sp}\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} f.$$

Démonstration

Soit $\mathcal{B}$ une base de E, abrégeons $M:=\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f$ et notons

$$\theta:=\left\{\begin{array}{ccc}E&\widetilde{\longrightarrow}&K^n\\v&\longmapsto&\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} v\end{array}\right.\quad\text{(qui est une bijection linéaire).}$$

Soit $\lambda\in K$. On a alors à $v\in E$ fixé les équivalences

$$f(v)=\lambda v\overset{\theta\text{ bijective}}{\iff}\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} f(v)=\theta(\lambda v)\overset{\theta\text{ linéaire}}{\iff}\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} f\ \operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} v=\lambda\theta(v).$$

d'où les équivalences[61]

$$\begin{array}{rcl}\lambda\in\operatorname{Sp} f&\iff&\exists v\in E\backslash\{0\},\ f(v)=\lambda v\\&\iff&\exists v\in E\backslash\{0\},\ M\theta(v)=\lambda\theta(v)\\&\underset{V:=\theta(v)}{\overset{\text{reparamétrage}}{\iff}}&\exists V\in\underbrace{\theta(E\backslash\{0\})}_{=K^n\backslash\{0\}},\ MV=\lambda V\\&\iff&\lambda\in\operatorname{Sp} M.\end{array}$$

[60] Cette proposition simple motive l'étude de la réduction des matrices afin d'étudier celle des endomorphismes en dimension finie.
[61] On utilise le fait que θ envoie 0 sur 0.

Corollaire

Deux matrices semblables ont même spectre :

$$\forall B \in M_n(K),\ A \text{ et } B \text{ semblables} \Longrightarrow \operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp} B.$$

Démonstration[62]

Soit B une matrice semblable à A. On peut alors évoquer un endomorphisme $u \in L(K^n)$ et deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de K^n telles que $\begin{cases} A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u \\ B = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}} u \end{cases}$. On en déduit les égalités

$$\operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp} \operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} u = \operatorname{Sp} u = \operatorname{Sp} \operatorname*{Mat}_{\mathcal{C}} u = \operatorname{Sp} B.$$

Remarques

- Rappelons que, pour chaque entier $j \in [1, n|]$, la j-ième colonne de A vaut le produit AE_j où $(E_1, E_2, ..., E_n)$ est la base canonique de K^n. Par conséquent, lorsque cette colonne est nulle à l'exception peut-être du coefficient diagonal $a_{j,j}$, on a l'égalité $AE_j = a_{j,j}E_j$, d'où un couple propre $(a_{j,j}, E_j)$.
- En corollaire immédiat, *le spectre d'une matrice diagonale se lit directement sur la diagonale* :

$$\forall d \in K^n,\ \operatorname{Sp} \operatorname{Diag}(d_1, d_2, ..., d_n) = \{d_1, d_2, ..., d_n\}$$

Attention : le spectre $\{d_1, d_2, ..., d_n\}$ peut très bien contenir strictement moins de n éléments ou être un singleton, comme c'est le cas de

$$\operatorname{Sp} I_n = \{1\}.$$

- Nous verrons plus généralement que *le spectre d'une matrice triangulaire se lit sur la diagonale* :

$$\forall d \in K^n,\ \operatorname{Sp} \begin{pmatrix} d_1 & ? & \cdots & ? \\ {\scriptstyle 0} & d_2 & \ddots & \vdots \\ | & \diagdown & \ddots & ? \\ {\scriptstyle 0} & - & {\scriptstyle 0} & d_n \end{pmatrix} = \{d_1, d_2, ..., d_n\} = \operatorname{Sp} \begin{pmatrix} d_1 & {\scriptstyle 0} & - & {\scriptstyle 0} \\ \text{¿} & d_2 & \diagdown & | \\ \vdots & \ddots & \ddots & {\scriptstyle 0} \\ \text{¿} & \cdots & \text{¿} & d_n \end{pmatrix}.$$

Sanity check : un système triangulaire est inversible ssi chaque coefficient diagonal est non nul, *i. e.* (en termes spectraux) ssi la matrice associée ne possède pas 0 comme valeur propre. On retrouve ainsi l'équivalence

$$\text{« } A \text{ injective } \Longleftrightarrow 0 \notin \operatorname{Sp} A \text{ ».}$$

- En pratique, pour chaque valeur propre λ de A, la recherche des vecteurs propres de A se fait par résolution du système linéaire $AV = \lambda V$ d'inconnue $V \in K^n$. Il est donc vital en réduction de savoir déterminer une base d'un sous-espace vectoriel déterminé par des équations linéaires (*cf.* première année), à l'instar des sous-espaces propres $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$.

Exemples

[62] Une preuve directe (sans u) est possible en observant (détailler un peu) qu'un couple (λ, V) est propre pour PAP^{-1} ssi $(\lambda, P(V))$ est propre pour A.

1. Imposons $A = \begin{pmatrix} -7 & 16 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et admettons[63] $\operatorname{Sp} A = \{-3\}$. Déterminons une base du sous-espace propre associé

$$E_3(A) = \operatorname{Ker}(A - (-3I_2)) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -4 & 16 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a à $(a, b) \in K^2$ les équivalences[64]

$$\begin{aligned}
(a,b) \in E_3(A) &\iff \begin{pmatrix} -4 & 16 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} 16b = 4a \\ 4b = a \end{cases} \iff a = 4b \\
&\iff \exists \lambda \in K, \begin{cases} a = 4\lambda \\ b = \lambda \end{cases} \iff \exists \lambda \in K, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in K \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ d'où l'égalité } E_3(A) = K \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On en déduit que le sous-espace propre associé à -3 est la droite engendrée par le vecteur $(4, 1)$ (déjà rencontré).

2. Imposons $A = \begin{pmatrix} 5 & -9 & -23 \\ 12 & -26 & -69 \\ -4 & 9 & 24 \end{pmatrix}$ et admettons $\operatorname{Sp} A = \{1\}$. Déterminons une base du sous-espace propre associé

$$E_1(A) = \operatorname{Fix} A = \operatorname{Ker}(A - I_3) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 4 & -9 & -23 \\ 12 & -27 & -69 \\ -4 & 9 & 23 \end{pmatrix}.$$

On a à $(a, b, c) \in K^2$ fixé les équivalences

$$\begin{aligned}
(a,b,c) \in E_1(A) &\iff \begin{pmatrix} 4 & -9 & -23 \\ 12 & -27 & -69 \\ -4 & 9 & 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \begin{cases} 4a = 9b + 23c \\ 12a = 27b + 69c \\ 4a = 9b + 23c \end{cases} \iff 4a = 9b + 23c \\
&\iff \exists \lambda, \mu \in K, \begin{cases} a = 9\lambda + 23\mu \\ b = 4\lambda \\ c = 4\mu \end{cases} \\
&\iff \exists \lambda, \mu \in K, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 23 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in K \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} 23 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

[63] Si les spectres matriciels donnés ici ont l'air de tomber du ciel, nous verrons plus tard comment les trouver.

[64] Insistons sur l'introduction de scalaires "génériques" (ici λ et, en général, autant que de "degrés de liberté") afin de mener proprement les équivalences.

d'où l'égalité $E_3(A) = K \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} 23 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. On en déduit que le sous-espace propre associé à 1 est le plan engendré par les vecteurs $(4, 9, 0)$ et $(23, 0, 4)$ (clairement libres).

Sanity check (l'erreur de calcul est humaine) : vérifier que ces deux vecteurs sont bien fixés par A.

Exercice d'application

On impose $K = \mathbb{C}$ et $n \geq 1$.

a. *Montrer l'implication suivante (lemme*[65] *attribué à Jacques Hadamard) :*

$$\left(\forall i \in [1, n|], |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i}^{j \in [1,n|]} |a_{i,j}|\right) \Longrightarrow A \in GL_n(\mathbb{C}).$$

b. *Pour chaque $i \in [1, n|]$, on note*[66] *$\mathcal{D}_i$ le disque fermé de centre $a_{i,i}$ et de rayon $\sum_{j \neq i}^{j \in [1,n|]} |a_{i,j}|$. Montrer alors l'inclusion*

$$\operatorname*{Sp}_{\mathbb{C}} A \subset \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{D}_n.$$

On impose désormais A ***stochastique,*** i. e. *telle que*

$$\forall i, j \in [1, n|], \ a_{i,j} \geq 0 \text{ et } \forall i \in [1, n|], \ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

c. *Montrer que le spectre de A est inclus dans le disque unité fermé.*

d. *On impose A à coefficients strictement positifs Montrer alors que A possède une unique valeur propre unitaire que l'on déterminera.*

---

a. Montrons le lemme d'Hadamard par contraposée. Supposons A non inversible et soit $V \in \operatorname{Ker} A$ non nul. Soit[67] $i \in [1, n|]$ tel que

$$|v_i| = \max_{j \in [1,n|]} |v_j| =: \mu \text{ (non nul car } V \text{ est non nul).}$$

La i-ième coordonnée de $AV = 0$ vaut alors $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} v_j = 0$, d'où les comparaisons

$$|a_{i,i}| = \left| -a_{i,i} \frac{v_i}{\mu} \right| = \left| \sum_{j \neq i}^{j \in [1,n|]} a_{i,j} \frac{v_j}{\mu} \right| \leq \sum_{j \neq i}^{j \in [1,n|]} |a_{i,j}|.$$

[65] En français : chaque matrice complexe ***à diagonale dominante*** est inversible.

[66] Les $\mathcal{D}_i$ sont appelés les ***disques de Gershgorin*** de A, du nom de Semyon Aranovich Gershgorin qui a publié en 1931 cette localisation des valeurs propres dans le *Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS*.

[67] Le maximum $\max_{j=1}^{n} |v_j|$ fait sens car $n \geq 1$, ce qui légitime l'évocation de i.

b. Soit $\lambda \in \operatorname{Sp} A$: la matrice $A - \lambda I_n$ n'étant pas inversible, elle n'est pas à diagonale dominante, d'où un $i \in [1, n|]$ tel que

$$|a_{i,i} - \lambda| \leq \sum_{\substack{j \neq i}}^{j \in [1,n|]} |a_{i,j}|, \text{ } i.\ e. \text{ tel que } \lambda \in \mathcal{D}_i \text{, ce qui conclut.}$$

c. Soit $\lambda \in \operatorname{Sp} A$ et soit $i \in [1, n|]$ tel que $\lambda \in \mathcal{D}_i$ (légitimé par le point précédent). On a alors les comparaisons

$$\begin{aligned} |\lambda| - a_{i,i} &\overset{a_{i,i} \geq 0}{=} |\lambda| - |a_{i,i}| \underset{\text{chaque } c \in \mathbb{C}}{\overset{c \leq |c| \text{ pour}}{\leq}} ||\lambda| - |a_{i,i}|| \underset{\text{triangulaire}}{\overset{\text{comparaison}}{\leq}} |\lambda - a_{i,i}| \\ &\overset{\lambda \in \mathcal{D}_i}{\leq} \sum_{\substack{j \neq i}}^{j \in [1,n|]} |a_{i,j}| \underset{\text{chaque } j}{\overset{a_{i,j} \geq 0 \text{ pour}}{=}} \sum_{\substack{j \neq i}}^{j \in [1,n|]} a_{i,j} \overset{A \text{ stochastique}}{=} 1 - a_{i,i}, \end{aligned}$$

d'où $|\lambda| \leq 1$ comme désiré.

d. La somme des coefficients de chaque ligne de A valant 1, le couple $(1, (1, 1, ..., 1))$ est propre pour A, d'où une valeur propre unitaire.

Soit (λ, V) un couple propre de A avec λ unitaire et soit i un indice tel que $|v_i| = \max_{j=1}^{n} |v_j|$. Quitte à diviser V par v_i (qui est non nul car V est propre), on imposera $v_i = 1$. On a alors les comparaisons

$$1 = |\lambda| \, |v_i| = |\lambda v_i| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} v_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} v_j| = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \underbrace{|v_j|}_{\leq 1} \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

Vu qu'on a égalité partout, on a en particulier égalité dans la première comparaison (triangulaire), ce qui montre que les complexes $a_{i,j} v_j$, sont positivement colinéaires ; chaque $a_{i,j}$ étant par ailleurs strictement positifs, les coordonnées de V sont sur une même demi-droite d'origine 0.

On a de plus égalité dans la dernière comparaison $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} |v_j| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} |v_i|$, ce qui force l'égalité dans chacune des comparaisons sommée $a_{i,j} |v_j| \leq a_{i,j} |v_i|$, d'où $|v_j| = |v_i|$ pour tout j (chaque $a_{i,j}$ étant non nul), ce qui montre que les coordonnées de V sont sur un même cercle centré en l'origine.

Finalement, V est un vecteur constant :

$$V = (1, 1, ..., 1) \text{, d'où la conclusion } \lambda = \lambda v_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} v_j = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} = 1.$$

Remarque – Un peu plus de travail montrerait que chaque valeur propre unitaire de chaque matrice stochastique est racine de l'unité. Par exemple, lorsque A est la matrice cyclique $\begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, en abrégeant $\omega := e^{\frac{2\pi i}{n}}$, le vecteur $\left(\omega^N, \omega^{2N}, \omega^{3N}, ..., \omega^{nN}\right)$ est alors pour chaque $N \in [1, n|]$ propre pour A avec pour valeur propre associée ω^N (qui est bien une racine de l'unité).

2.2.2 Extension des scalaires

Lorsque A est réelle, on peut la voir comme matrice complexe $A_{\mathbb{C}}$ et considérer le spectre de cette dernière. La partie $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}} A$ est appelée le ***spectre complexe*** de A, pour le différencier de son ***spectre réel*** $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}} A$.

Plus généralement, si L dénote un corps dont K est un sous-corps, on précisera alors au besoin le corps de base[68] où l'on considère A, ce afin de différencier ces deux spectres :

$$\begin{aligned} \operatorname*{Sp}_K A &:= \operatorname{Sp} A = \{\lambda \in K \ ; \ \exists V \in K^n \setminus \{0\} \ , \ AV = \lambda V\} \text{ et} \\ \operatorname*{Sp}_L A &:= \operatorname{Sp} A_L = \{\lambda \in L \ ; \ \exists V \in L^n \setminus \{0\} \ , \ AV = \lambda V\} \end{aligned}$$

Cette différenciation est d'importance au vu de la proposition suivante.

Propriété

Soit L un corps dont K est un sous-corps. On a alors l'inclusion

$$\operatorname*{Sp}_K A \subset \operatorname*{Sp}_L A$$

et on n'a pas égalité en général si $n \geq 2$.

Démonstration

Soit (λ, V) un couple propre de A. Vu les inclusions

$$\begin{cases} K \subset L \\ M_n(K) \subset M_n(L) \\ K^n \setminus \{0\} \subset L^n \setminus \{0\} \end{cases},$$

l'égalité $AV = \lambda V$ peut se lire dans K comme dans L, ce qui montre que (λ, V) est aussi un couple propre de A vue comme matrice complexe, d'où l'inclusion des spectres.

Par ailleurs, nous verrons que le spectre de la matrice $I := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est formé des racines du polynôme $X^2 + 1$, d'où l'inclusion stricte

$$\operatorname*{Sp}_{\mathbb{R}} I = \emptyset \subsetneq \{i, -i\} = \operatorname*{Sp}_{\mathbb{C}} I.$$

Lorsque $n \geq 3$, rajouter à I une diagonale de $n-2$ zéros donne une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont le spectre[69] réel $\{0\}$ est strictement inclus dans le spectre complexe $\{0, i, -i\}$. Dans les deux cas, on a un contre-exemple à l'égalité générale.

Exercices d'application

[68] Proprement, A_L dénote l'image de A par l'injection canonique $M_n(K) \hookrightarrow M_n(L)$.

[69] Nous verrons plus tard comment calculer ces spectres.

1. *Démontrer que le spectre complexe de chaque matrice orthogonale est inclus dans le cercle unité.*
2. *On impose $K = \mathbb{R}$. Soit B une matrice réelle semblable à A dans $M_n(\mathbb{C})$. Montrer alors que A et B sont semblables dans $M_n(\mathbb{R})$.*
3. (a) *Donner sens à et montrer l'égalité*

$$\max\left\{N \in \mathbb{N} \ ; \ \left\{1, A, A^2, ..., A^{N-1}\right\} \ \textit{libre}\right\} = \operatorname{rg}\left\{1, A, A^2, ..., A^{n^2}\right\}.$$

   (b) *En déduire que le maximum ci-dessus ne dépend pas du corps de base où sont considérés les coefficients de A. (On rappelle au besoin que le rang d'une matrice ne dépend pas du corps où l'on considère ses coefficients.)*

---

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et soit (λ, V) un couple propre complexe de O. On a alors les égalités[70]

$$|\lambda|^2 \ V^*V \overset{|\lambda|^2=\lambda^*\lambda}{=} (\lambda V)^* \ (\lambda V) \overset{(\lambda,V) \text{ propre}}{=} (OV)^* \ (OV) = V^*O^* \, OV \overset{O \text{ orthogonale}}{=} V^*V,$$

d'où en simplifiant par $V^*V = \sum_{i=1}^n |v_i|^2$ (on peut car le vecteur propre V est non nul) l'égalité $|\lambda|^2 = 1$, ce qui se réécrit $|\lambda| = 1$, *CQFD*.

2. Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $AP = PB$. Notons Q et R les parties resp. réelle et imaginaires de P : ce sont deux matrices réelles telles que

$$P = Q + iR, \text{ d'où } AQ + iAR = QB + iRB, \ i. \ e. \ \left\{ \begin{array}{l} AQ = QB \\ AR = RB \end{array} \right. ,$$
$$\text{d'où } \forall t \in \mathbb{R}, \ A(Q + tR) = AQ + tAR = QB + tQB = (Q + tR) B.$$

Il suffit pour conclure de trouver un réel t tel que $\det(Q + tR) \neq 0$ (la matrice réelle $Q + tR$ sera alors inversible). Or le polynôme $\det(Q + XR)$ ne s'annule pas en i (puisque P est inversible), donc est non nul, donc possède un nombre fini de racines complexes, donc ne s'annule pas sur tout $\mathbb{R}$, d'où un réel t comme souhaité.

Remarque – Si l'on remplace l'extension $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ par une quelconque extension de corps $K \subset L$, le résultat reste valable. En effet, en voyant P à coefficients dans le K-espace vectoriel engendré par ses coefficients, on est ramené au cas où le K-espace vectoriel L est de dimension finie et une récurrence (non immédiate) permettrait alors de conclure en évoquant une K-base de L (comme l'on a utilisé ci-dessus la $\mathbb{R}$-base $(1, i)$ de $\mathbb{C}$).

3.

   (a) L'espace vectoriel $M_n(K)$ étant de dimension finie n^2, la famille $\left(1, A, A^2, ..., A^{n^2}\right)$ ne peut être libre, donc la famille $\left(1, A, A^2, ..., A^N\right)$ est liée pour chaque naturel $N \geq n^2$. Par conséquent,

$$\text{l'ensemble } \left\{N \in \mathbb{N} \ ; \ \left\{1, A, A^2, ..., A^{N-1}\right\} \ \text{libre}\right\} \text{ est majoré (par } n^2\text{)} ;$$

[70] Pour chaque matrice complexe M, on note $M^* := {}^t\overline{M}$ sa ***transconjuguée***. On vérifiera alors aisément l'égalité $(MN)^* = N^*M^*$ pour chaque matrice complexe N donnant sens au produit MN.

étant par ailleurs non vide (il contient 0 puisque la famille vide est libre), son maximum fait sens. Notons-le

$$m := \max\left\{N \in \mathbb{N}\ ;\ \left\{1, A, A^2, ..., A^{N-1}\right\} \text{ libre}\right\}.$$

La famille $\left(1, A, A^2, ..., A^m\right)$ étant liée mais pas celle $\left(1, A, A^2, ..., A^{m-1}\right)$, la puissance A^m est liée aux précédentes et une récurrence immédiate montrerait que la puissance A^N est liée à $\left\{1, A, A^2, ..., A^{m-1}\right\}$ pour chaque naturel $N \geq m$, d'où l'égalité

$$\operatorname{Vect}\left\{1, A, A^2, ..., A^{n^2}\right\} = \operatorname{Vect}\left\{1, A, A^2, ..., A^{m-1}\right\}.$$

Prendre les dimensions donne l'égalité attendue :

$$\operatorname{rg}\left\{1, A, A^2, ..., A^{n^2}\right\} = \operatorname{rg}\left\{1, A, A^2, ..., A^{m-1}\right\} = m,$$

la dernière égalité résultant de la liberté de la famille $\left(1, A, A^2, ..., A^{m-1}\right)$.

(b) Notons κ le corps engendré par les coefficients de A. Soit $N \in \mathbb{N}$: les coefficients de A^N étant chacun des polynômes en les coefficients de A, la puissance A^N reste dans $M_n(\kappa)$. Il en résulte que la matrice de la famille $\left(1, A, A^2, ..., A^{n^2}\right)$ dans la base canonique de $M_n(K)$ est à coefficients dans κ. Le rang de cette matrice valant par ailleurs celui de la famille $\left(1, A, A^2, ..., A^{n^2}\right)$, à savoir (d'après le point précédent) le maximum m , ce dernier ne dépend que du corps κ et est par conséquent inchangé si l'on voit A dans un sur-corps de κ.

Remarque – Le point admis résulte de la description suivante (vue en première année) du rang[71] d'une matrice M donnée :

$$\operatorname{rg} M = \max\left\{r \in \mathbb{N}\ ;\ M \text{ "contient" une matrice inversible de taille } r \times r\right\}.$$

En effet, l'inversibilité d'une matrice extraite se traduisant par la non-nullité d'un polynôme (un déterminant) en les coefficients de M, la partie de $\mathbb{N}$ ci-dessus ne dépend pas du corps où sont considérés les coefficients de M ; il en va donc de même de son maximum $\operatorname{rg} M$.

2.3 Réduction en dimension finie

On impose désormais E de dimension finie

$$n = \dim E < \infty.$$

[71] En français : le rang d'une matrice est le plus grand "côté" d'une matrice extraite inversible.

2.3.1 Cas diagonal

Propriété – Définition

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *il y a une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale ;*
2. *il y a une base de E formée de vecteurs propres de f ;*
3. *E vaut la somme directe des sous-espaces propres de f ;*
4. *la somme des dimensions des sous-espaces propres de f vaut la dimension de E.*

*Dans ce cas, on dit que f est **diagonalisable**[72], toute matrice comme en (1) est appelée une **réduite**[73] **diagonale** de f et toute base comme en (1) ou en (2) est appelée une **base de diagonalisation**[74] de f.*

Démonstration

(1)$\Longleftrightarrow$(2) Résulte d'un corollaire précédent : pour chaque base de E, la matrice de f dans cette base est diagonale ssi cette base est formée de vecteurs propres de f.

(4)$\Longrightarrow$(3) Vu l'inclusion $\bigoplus_{\lambda\in\operatorname{Sp} f} E_\lambda \subset E$, l'égalité des dimensions force l'égalité des espaces.

(3)$\Longrightarrow$(2) Soit[75] $(\mathcal{B}_\lambda)_{\lambda\in\operatorname{Sp} f}$ telle que $\mathcal{B}_\lambda$ est une base de E_λ pour chaque valeur propre λ de f. En concaténant les $\mathcal{B}_\lambda$ (chacune formée de vecteurs propres de f), on obtient une base de $\bigoplus_{\lambda\in\operatorname{Sp} f} E_\lambda = E$ formée de vecteurs propres de f.

(2)$\Longrightarrow$(4) Soit une base de E formée de vecteurs propres de f et notons P sa réunion, laquelle est une partie génératrice de E formée de vecteurs propres de f. On a alors[76]

$$\begin{aligned}
P &\subset \bigcup_{\lambda\in\operatorname{Sp} f} E_\lambda, \text{ d'où (par croissance de } \operatorname{Vect}\text{) les inclusions}\\
E = \operatorname{Vect} P &\subset \operatorname{Vect} \bigcup_{\lambda\in\operatorname{Sp} f} E_\lambda = \sum_{\lambda\in\operatorname{Sp} f} \underbrace{\operatorname{Vect} E_\lambda}_{=E_\lambda}, \text{ d'où les majorations}\\
\dim E &\leq \dim\left(\sum_{\lambda\in\operatorname{Sp} f} E_\lambda\right) \leq \sum_{\lambda\in\operatorname{Sp} f} \dim E_\lambda \leq \dim E.
\end{aligned}$$

Puisqu'il y a égalité d'une part et d'autre de la chaîne de majorations ci-dessus, on a égalité partout, en particulier dans la dernière majoration $\sum_{\lambda\in\operatorname{Sp} f} \dim E_\lambda \leq \dim E$, ce qui conclut.

Remarque – Dès que $n \geq 1$, le point (2) montre que chaque endomorphisme diagonalisable possède un vecteur propre, *a fortiori* une valeur propre :

$$f \text{ diagonalisable} \Longrightarrow \operatorname{Sp} f \neq \emptyset \qquad (\text{sauf si } E = \{0\}).$$

[72] Suggestion d'abréviation : dg^B.
[73] sous-entendu : *matrice* réduite
[74] On dit aussi d'une telle base qu'elle ***diagonalise*** f.
[75] Une telle famille $(\mathcal{B}_\lambda)$ existe car chaque E_λ est de dimension finie (et l'on n'a pas besoin d'axiome du choix vu que les E_λ sont en nombre fini).
[76] *Rappel* : pour chaques parties $I, J \subset E$, on a l'égalité $\operatorname{Vect}(I \cup J) = \operatorname{Vect} I + \operatorname{Vect} J$.

Exemples

1. Chaque homothétie est diagonalisable (car sa matrice dans chaque base est diagonale).
2. Chaque projecteur est diagonalisable (vu l'égalité $E = E_0 \oplus E_1$).
3. Chaque symétrie est diagonalisable (vu l'égalité $E = E_{-1} \oplus E_1$).
4. Imposons f nilpotent et diagonalisable. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $f^N = 0$, soient $d \in K^n$ et une base de E dans laquelle f a pour matrice $\operatorname{Diag}(d_1, d_2, ..., d_n)$. On a alors la nullité de
$$\operatorname{Diag}(d_1, d_2, ..., d_n)^N = \operatorname{Diag}\left(d_1^N, d_2^N, ..., d_n^N\right),$$
i. e. la nullité de chaque d_i^N, *i. e.* (puisque K est intègre) la nullité de chaque d_i, ce qui revient à la nullité de f. On retiendra donc l'équivalence
$$f \text{ diagonalisable et nilpotent} \iff f \text{ nul}.$$
5. (plus difficile) Imposons f de rang 1. Soit D un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ et soit v un vecteur directeur de D. La matrice de f dans une base de $\operatorname{Ker} f$ complétée avec v est alors de la forme $M := \begin{pmatrix} 0 & ? \\ {\scriptscriptstyle 0} & \tau \end{pmatrix}$ pour un certain scalaire τ (la trace de f). On lit dans M l'égalité $f(v) = \tau v + k$ pour un certain $k \in \operatorname{Ker} f$, d'où les égalités
$$f(f(v)) = f(\tau v + k) = f(\tau v) + f(k) = \tau f(v).$$
La matrice M étant par ailleurs non nulle (car de rang 1), sa dernière colonne est non nulle, d'où $f(v) \neq 0$, ce qui montre que $(f(v), \tau)$ est un couple propre de f.

   Concluons : si $\tau \neq 0$, les sous-espaces propres $E_0 = \operatorname{Ker} f$ et $E_\tau = D$ sont alors en somme directe et f est diagonalisable ; sinon, la matrice M est triangulaire stricte, donc nilpotente, donc f est nilpotente et non nulle, donc ne saurait être diagonalisable par le point précédent. On pourra donc retenir :

   chaque endomorphisme de rang 1 est diagonalisable ssi sa trace est non nulle.

Propriété* – *Définition

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *l'endomorphisme $A\cdot$ canoniquement associé à A est diagonalisable ;*
2. *la matrice A est semblable à une matrice diagonale (une telle matrice étant alors appelée une* ***réduite diagonale*** *de A).*

Dans ce cas, on dit que A est ***diagonalisable*** *et on appelle* ***base de diagonalisation*** *de A toute base formée de vecteurs propres de A.*

Démonstration

Notons $b.\ c.$ la base canonique de K^n et $\mathcal{B}$ l'ensemble des bases de K^n. On rappelle d'une part l'égalité

$$\operatorname*{Mat}_{b.\ c.}(A\cdot) = A,$$

d'autre part la bijectivité de l'application

$$p := \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \widetilde{\longrightarrow} & GL_n(K) \\ \beta & \longmapsto & \operatorname{Pass}_{b.\ c.\to\beta} \end{array} \right. \quad (p \text{ comme« } \mathbf{p}\text{assage »}).$$

On en déduit les équivalences

$$\begin{aligned}
A\cdot \text{ est diagonalisable} & \underset{\text{diagonalisabilité}}{\overset{\text{définition de la}}{\iff}} \exists \beta \in \mathcal{B},\ \operatorname*{Mat}_{\beta}(A\cdot) \text{ diagonale} \\
& \underset{\text{de passage}}{\overset{\text{formules}}{\iff}} \exists \beta \in \mathcal{B},\ \left(\operatorname*{Pass}_{b.\ c.\to\beta}\right)^{-1} \operatorname*{Mat}_{b.\ c.}(A\cdot) \operatorname*{Pass}_{b.\ c.\to\beta} \text{ diagonale} \\
& \underset{\text{rappels}}{\overset{\text{deux}}{\iff}} \exists \beta \in \mathcal{B},\ p(\beta)^{-1}\ A\ p(\beta) \text{ diagonale} \\
& \underset{P:=p(\beta)}{\overset{\text{reparamétrage}}{\iff}} \exists P \in \underbrace{p(\mathcal{B})}_{=GL_n(K)},\ P^{-1}AP \text{ diagonale} \\
& \underset{\text{la similitude}}{\overset{\text{définition de}}{\iff}} A \text{ semblable à une matrice diagonale.}
\end{aligned}$$

Exemple : soient a et b deux complexes et montrons que

$$\text{la matrice } M := \begin{pmatrix} b & a & - & a \\ a & \diagdown & \diagdown & | \\ | & \diagdown & \diagdown & a \\ a & - & a & b \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable.}$$

Si $n \in \{0,1\}$ (cas pathologique), alors M est scalaire (*a fortiori* diagonalisable) ; on imposera donc $n \geq 2$.

La matrice M est "presque" constante : elle le deviendra si l'on perturbe sa diagonale. De fait, la matrice $M - (b-a) I_n$ est constante (chacun de ses coefficients vaut a), donc est de rang 1 ou 0, d'où la minoration

$$\dim E_{b-a} = n - \operatorname{rg}(M - (b-a) I_n) \geq n-1.$$

Par ailleurs, la somme des coefficients de chaque ligne de M est la même, donc le vecteur $(1,1,...,1)$ est propre pour M avec pour valeur propre associée cette somme commune $b + (n-1)a$, d'où la minoration

$$\dim E_{b-a} + \dim E_{b+(n-1)a} \geq (n-1) + 1 = n.$$

De plus, vu que $n \neq 1$, les deux valeurs propres trouvées $b-a$ et $b+(n-1)a$ sont distinctes, d'où la majoration

$$\dim E_{b-a} + \dim E_{b+(n-1)a} \leq \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} M} \dim E_\lambda \leq n.$$

Finalament, on a égalité partout et la matrice M est diagonalisable.

Matrice d'inductance

Un cas particulier de l'exemple ci-dessus apparaissant en sciences de l'ingénieur est celui des *matrices d'inductance*, *i. e.* des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} L & M & M \\ M & L & M \\ M & M & L \end{pmatrix} \text{ où } L \text{ dénote une inductance et } M \text{ une inductance mutuelle.}$$

La valeur propre $L - M$ est appelée ***inductance cyclique*** et son plan propre associé est engendré par les vecteurs[77]

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \text{ pour chaque réel } \theta.$$

La valeur propre $L + 2M$ est appelée ***inductance cyclique homopolaire***[78] et sa droite propre associée est engendré par le vecteur $(1, 1, 1)$.

On retiendra la diagonalisation suivante (où la matrice de passage est *indépendante de L et M*) :

$$\begin{pmatrix} L & M & M \\ M & L & M \\ M & M & L \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} L-M & 0 & 0 \\ 0 & L-M & 0 \\ 0 & 0 & L+2M \end{pmatrix} P^{-1}$$
$$\text{avec } P := \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \\ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifiera que les colonnes de P forment une base *orthogonale* et sont de normes respectives $\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\sqrt{\frac{3}{2}}$ et $\sqrt{3}$, ce qui permet d'imposer P orthogonale quitte à renormaliser ses colonnes, par exemple (quand $\theta = 0$) en imposant

$$P := \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \text{ ce qui trivialise le calcul de } P^{-1} = {}^tP.$$

Remarques

- Chaque matrice diagonalisable (non vide) possède une valeur propre :

$$A \text{ diagonalisable} \Longrightarrow \operatorname{Sp} A \neq \emptyset \quad (\text{sauf si } n = 0).$$

- Nous verrons au chapitre ? ? ? que[79]

chaque matrice réelle symétrique admet une base de diagonalisation orthonormée

[77] Les coordonnées de chacun de ces deux vecteurs propres (bien vérifier qu'ils sont propres) forment un *système triphasé équilibré*.

[78] *homo-polaire* = même pôle (l'inductance homopolaire est toujours "polarisée" dans la même direction $(1, 1, 1)$)

[79] *Culture hors programme* : chaque matrice complexe ***hermitienne*** (*i. e.* égale à sa transconjuguée) est diagonalisable à spectre réel.

Contre-exemple sur le corps $\mathbb{C}$: la matrice symétrique complexe $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est de carré nul, donc est nilpotente et ne saurait être diagonalisable sans être nulle.

Sanity checks : les matrices d'inductance sont réelles symétriques et nous les avons diagonalisées en base orthonormée. Nous avons également diagonalisé la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ avec passage $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ qui devient orthogonale après division par $\sqrt{2}$.

Culture physique : les ***matrices d'inertie*** apparaissant en dynamique du solide sont également réelles symétriques, ce qui permet de parler de trois principaux ***axes d'inertie*** orthogonaux.

• Soient B et C deux matrices carrées diagonalisables et soient P et Q deux matrices inversibles telles que PBP^{-1} et QCQ^{-1} soient diagonales. Le calcul par blocs montre alors qu'est diagonale la matrice

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} P & {\scriptscriptstyle 0} \\ {\scriptscriptstyle 0} & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & {\scriptscriptstyle 0} \\ {\scriptscriptstyle 0} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & {\scriptscriptstyle 0} \\ {\scriptscriptstyle 0} & Q \end{pmatrix}^{-1} \\ = & \begin{pmatrix} PB & {\scriptscriptstyle 0} \\ {\scriptscriptstyle 0} & QC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & {\scriptscriptstyle 0} \\ {\scriptscriptstyle 0} & Q^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PBP^{-1} & {\scriptscriptstyle 0} \\ {\scriptscriptstyle 0} & QBQ^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On généraliserait sans peine à chaque diagonale de blocs diagonalisables[80] :

$$\operatorname{Diag}(A_1, A_2, ..., A_\ell) \text{ diagonalisable} \iff \forall i \in [1, \ell|] , \ A_i \text{ diagonalisable.}$$

• Notre démonstration de la proposition précédente montre que les réduites diagonales de la matrice A sont les réduites diagonales de l'endomorphisme $A\cdot$.

• Les vecteurs propres de la matrice A étant les vecteurs propres de l'endomorphisme $A\cdot$, les bases de diagonalisation de A sont les bases de diagonalisation de $A\cdot$.

• La démonstration ci-dessus indique comment expliciter une telle base. On a vu qu'une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ est diagonale s'écrivait

$$P = \underset{b.\ c. \to \beta}{\operatorname{Pass}} = \underset{b.\ c.}{\operatorname{Mat}} \beta \qquad \begin{array}{l} \text{pour une certaine base } \beta \text{ telle} \\ \text{que } \operatorname{Mat}_\beta (A\cdot) \text{ est diagonale.} \end{array}$$

Comment expliciter β à partir de P ? Dans K^n, la matrice dans la base canonique de chaque famille s'obtient[81] en concaténant les vecteurs de cette famille : en d'autres termes, les vecteurs d'une telle famille $\mathcal{F}$ se lisent directement dans la matrice $\operatorname{Mat}_{b.\ c.} \mathcal{F}$. Par conséquent, la base β s'obtient tout simplement en "découpant" les colonnes de P !

En résumé :

forment une base de vecteurs propres de A les colonnes de chaque matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

Plus généralement, si ρ dénote une réduite "sympathique" de A, il importe d'écrire la similitude de A et ρ sous la forme $A = P\rho P^{-1}$ (et non $A = P^{-1}\rho P$) afin de penser P comme une matrice de passage vers une base "sympathique" (base directement lisible dans P).

Exemples

[80] La réciproque sera vue au chapitre ? ? ? sect NilpotSynth.

[81] On rappelle d'une part l'identification usuelle $K^n \cong M_{n,1}(K)$, d'autre part l'égalité $V = \operatorname{Mat}_{b.\ c.} V$ pour chaque $V \in K^n$.

1. Nous avons vu que la matrice $M := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ admet deux vecteurs propres $\binom{-1}{1}$ et $\binom{1}{1}$ associés resp. aux valeurs propres 0 et 2. En notant resp. V et W ces vecteurs propres et

$$P := (V\ W) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice formée des colonnes V et W (laquelle est inversibles car ces colonnes sont libres), les égalités

$$MV = 0V \quad \text{et} \quad MW = 2W \qquad \text{dans } K^2$$

équivalent dans $M_2(K)$ aux égalités[82]

$$\begin{aligned} M(V\ W) &= (0V\ 2W),\ i.\ e.\ \text{à } MP = (V\ W)\begin{pmatrix} 0 & {\scriptstyle 0} \\ {\scriptstyle 0} & 2 \end{pmatrix}, \\ i.\ e.\ \text{à } MP &= P\begin{pmatrix} 0 & {\scriptstyle 0} \\ {\scriptstyle 0} & 2 \end{pmatrix}, \text{ ou encore à } M = P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & {\scriptstyle 0} \\ {\scriptstyle 0} & 2 \end{pmatrix}P, \end{aligned}$$

ce qui montre que M est diagonalisable de spectre $\{0, 2\}$ et que des vecteurs propres associés se lisent directement dans la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Il peut arriver que l'on ait de bonnes raisons de croire qu'une matrice donnée en diagonalise une autre (donné par un sujet de concours, trouvé par un outil informatique...). Par exemple, étant données les deux matrices

$$M := \begin{pmatrix} 89 & -198 & -507 \\ 40 & -89 & -233 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P := \begin{pmatrix} -1 & 9 & 11 \\ -3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on vérifiera sans problème à la main l'égalité[83]

$$M = P\Lambda P^{-1} \text{ avec } \Lambda := \operatorname{Diag}(2, 1, -1).$$

ce qui montre que M est diagonalisable de spectre $\{2, 1, -1\}$ avec pour vecteurs propres associés les colonnes resp. de P, à savoir $(-1, 3, 1)$, $(9, 4, 0)$ et $(11, 5, 0)$.

Dans le doute, la lectrice et le lecteur pourront s'assurer directement, en notant resp. V, W et X ces vecteurs propres, des égalités

$$MV = 2V \qquad MW = W \qquad MX = -X.$$

Cependant, ces égalités dans K^3 équivalent dans $M_3(K)$ aux égalités[84]

$$M(V\ W\ X) = (2V \mid W \mid -X) = (V\ W\ X)\begin{pmatrix} 2 & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 0} \\ {\scriptstyle 0} & 1 & {\scriptstyle 0} \\ {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 0} & -1 \end{pmatrix} = P\Lambda,$$

[82] *Rappel* : si D dénote une matrice diagonale, le produit DA (resp. AD) s'obtient en multipliant la i-ième ligne (resp. colonne) de A par le i-ième coefficient $d_{i,i}$. Pour retenir de quel côté de A la matrice D agit sur quel type de rangées de A (à **g**auche, sur les **l**ignes ; à **d**roite, sur les **c**olonnes) prononcer $GL(\mathbb{C})$ (« **g-l d-c** ») ou bien faire un test quand $D = E_{1,1}$.

[83] *Raccourci* : pour vérifier une égalité $A = P^{-1}BP$ sans inverser P, vérifier plutôt $PA = BP$.

[84] Les barres | sont une aide de lecture pour séparer les colonnes.

i. e. à $M = P^{-1}\Lambda P$, ce qui montre que les deux vérifications sont au fond les mêmes.

Ces deux exemples nourrissent la proposition suivante.

Proposition[85]

Chaque endomorphisme de E possédant (au moins) n valeurs propres est diagonalisable :

$$\operatorname{Card}\operatorname{Sp} f = n \Longrightarrow f \text{ diagonalisable.}$$

De plus, dans ce cas chaque sous-espace propre de f est une droite.

Démonstration

On a déjà établi les majorations

$$\operatorname{Card}\operatorname{Sp} f = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} 1 \leq \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} \dim E_\lambda \leq \dim E.$$

L'hypothèse force alors l'égalité partout, d'où d'une part l'égalité $\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} \dim E_\lambda = n$ et la diagonalisabilité de f, d'autre part l'égalité $1 = \dim E_\lambda$ pour chaque valeur propre λ, ce qui conclut.

Remarque – **Cas matriciel**. Vu d'une part l'égalité $\operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp}(A\cdot)$, d'autre part l'équivalence entre les diagonalisabilités de A et de $A\cdot$ et, enfin, le fait que les sous-espaces propres de A sont ceux de $A\cdot$, appliquer la proposition précédente lorsque f est l'endomorphisme $A\cdot$ donne exactement le même énoncé où l'on a remplacé partout « f » par « A » :

$$\operatorname{Card}\operatorname{Sp} A = n \Longrightarrow \begin{cases} A \text{ est diagonalisable} \\ \text{chacun de ses sous-espaces propres est une droite} \end{cases}.$$

Remarque – La matrice $\begin{pmatrix} 18 & 5 \\ {\scriptscriptstyle 0} & 18 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Son spectre valant[86] $\{18\}$, l'unique *éventuelle* réduite diagonale serait $\operatorname{Diag}(18, 18)$. Or cette matrice scalaire est seule dans sa classe de similitude (car commute avec chaque matrice inversible), donc ne peut être semblable à $\begin{pmatrix} 18 & 5 \\ {\scriptscriptstyle 0} & 18 \end{pmatrix}$ sans lui être égale, ce qui serait absurde.

De même, quand $n \geq 2$, l'unique éventuelle réduite diagonale de la matrice $J := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ dont le spectre est nul serait la matrice nulle $\operatorname{Diag}(0, 0, ..., 0)$ qui est seule dans sa classe de similitude : J ne saurait donc lui être semblable sans être nulle.

[85] Cette proposition décrit le cas d'égalité dans la majoration $\operatorname{Card}\operatorname{Sp} f \leq n = \dim E$ établie précédemment.

[86] *Rappel* : le spectre d'une matrice triangulaire se lit sur la diagonale.

On retiendra que, *lorsqu'il possède au plus une valeur propre, l'endomorphisme f est diagonalisable ssi il est scalaire* :

$$\left\{\begin{array}{c}\operatorname{Card}\operatorname{Sp}A=1\\ A\ \textit{diagonalisable}\end{array}\right.\overset{\text{si }n\geq 1}{\Longleftrightarrow} A\ \textit{scalaire.}$$

Ce raisonnement ne tient pas si la diagonale n'est pas constante. Par exemple, la matrice $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ non scalaire est diagonalisable[87] de réduite $\operatorname{Diag}(1,1,2)$ avec matrice de passage $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

Exercices d'application

1. *Montrer que f est diagonalisable ssi chaque sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire stable par f.*
2. *Imposons A diagonalisable. Montrer alors que la multiplication à gauche (resp. à droite) par A est un endomorphisme diagonalisable de $L(M_n(K))$.*
3. *Soit $\pi\in K_n[X]$. Donner une condition nécessaire et suffisante simple décrivant la diagonalisabilité de l'endomorphisme*

$$\left\{\begin{array}{ccc}K_n[X]&\longrightarrow&K_n[X]\\ P&\longmapsto&[P\pi]^{(n)}\end{array}\right..$$

---

1. $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons f diagonalisable et soit V un sous-espace vectoriel de E. Puisqu'il y une base de E formée de vecteur propres de f, on peut compléter une base de V avec des vecteurs propres de f, ce qui fournit un supplémentaire de V stable par f.

   $\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons f non diagonalisable. La somme de ses sous-espaces propres est alors un sous-espace vectoriel strict de E, donc est inclus dans un hyperplan de E, lequel doit admettre un supplémentaire stable par f, *i. e.* une droite stable par f. Soit D une telle droite et soit un vecteur dirigeant D : d'une part ce vecteur est propre pour f (en tant qu'élément d'une droite stable par f), d'autre part il est hors de l'hyperplan évoqué (ce dernier étant d'intersection nulle avec D), donc n'appartient à aucun sous-espace propre de f, ce qui est absurde.

   Remarque – Donnons une preuve directe fondée sur l'argument suivant : chaque famille libre de $n-1$ vecteurs de E peut se compléter à l'aide d'un vecteur propre de f en une base de E (argument prouvé au paragraphe précédent). Soit $(e_1,e_2,...,e_n)$ une base de E : on complète alors $(e_2,e_3...,e_n)$ avec un vecteur propre v_1, puis $(v_1,e_3,e_4,...,e_n)$ avec un vecteur v_2, puis $(v_1,v_2,e_4,e_5...,e_n)$ avec un v_3... enfin $(v_1,v_2,...,v_{n-1})$ avec un v_n, d'où une base $\overrightarrow{v}$ de vecteur propres de f.

[87] Le vérifier par exemple à l'aide du *raccourci* mentionné ci-dessus.

2. Notons γ la multiplication à gauche par A. Soient Λ diagonale et P inversible telles que $A = P\Lambda P^{-1}$. Observer alors les égalités[88]

$$\forall M \in M_n(K),\ \gamma\left(PMP^{-1}\right) = APMP^{-1} = P\Lambda P^{-1}PMP^{-1} = P(\Lambda M)P^{-1}$$

et montrons que la famille

$$\left(PE_{i,j}P^{-1}\right)_{i,j\in[1,n|]}$$

est une base de vecteurs propres de γ. Cette famille étant l'image d'une base (celle canonique de $M_n(K)$) par un isomorphisme d'espaces vectoriels (la conjugaison $M \mapsto PMP^{-1}$), il s'agit déjà d'une base de $M_n(K)$. Soient par ailleurs $i, j \in [1, n|]$. Dans le produit $\Lambda E_{i,j}$, la matrice diagonale Λ agit (à gauche) sur les *lignes* de $E_{i,j}$, donc ce produit vaut[89] $\lambda_i E_{i,j}$, d'où les égalités

$$\gamma\left(PE_{i,j}P^{-1}\right) = P(\Lambda E_{i,j})P^{-1} = P(\lambda_i E_{i,j})P^{-1} = \lambda_i\left(PE_{i,j}P^{-1}\right),$$

ce qui montre que $PE_{i,j}P^{-1}$ est un vecteur propre de γ, *c. q. f. d.*

Esquisse d'une autre solution : vu pour chaques colonnes $C_1, C_2, ..., C_n \in K^n$ l'égalité

$$\gamma(C_1\ C_2\ ...\ C_n) = (AC_1\ AC_2\ ...\ AC_n),$$

annuler chaque colonne C_i sauf une imposée égale à un vecteur propre V de A donne un vecteur propre de γ. À V fixé il y a n tels vecteurs propres, d'où (lorsque V décrit une base de vecteurs propres de A) une famille de n^2 vecteurs propres de γ dont on vérifiera par ailleurs le caractère libre ou générateur.

Remarque – Cet exercice et sa réciproque (valide) admettent de nombreuses solutions que nous présenterons. La plus expéditive sera vu à la section **??**.

3. La multiplication par chaque polynôme de $K[X]$ étant un endomorphisme de $K[X]$, tout comme la dérivation, l'application considérée est un endomorphisme de $K[X]$ comme composée de tels endomorphismes. Notons-la F et abrégeons $\delta := \deg \pi$. Vu à $P \in K[X]$ les comparaisons[90]

$$\deg P^{(n)} = \begin{cases} \deg P - n \text{ si } n \leq \deg P \\ -\infty \text{ si } n > \deg P \end{cases},$$

on a en particulier pour chaque $d \in [0, n|]$ les comparaisons

$$\begin{aligned} &\deg F\left(X^{n-d}\right) = \deg\ \left[X^{n-d}\pi\right]^{(n)} \\ = &\begin{cases} \deg\left(X^{n-d}\pi\right) - n \text{ si } n \leq \deg\left(X^{n-d}\pi\right) \\ -\infty \text{ sinon} \end{cases} = \begin{cases} \delta - d \text{ si } d \leq \delta \\ -\infty \text{ sinon} \end{cases}, \end{aligned}$$

ce qui montre que la matrice de F dans la base $\left(X^n, X^{n-1}, ..., X, 1\right)$ est de la forme

$$\underset{(X^n, X^{n-1}, ..., X, 1)}{\mathrm{Mat}} F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T & 0 \end{pmatrix} \text{ où } \begin{array}{c} T \in M_{\delta+1}(K) \text{ est triangulaire inférieure} \\ \text{à coefficients diagonaux non nuls.} \end{array}$$

[88] La conjugaison par P n'est que du bluff, il faut penser les calculs comme si $P = I_n$, *i. e.* comme si A était diagonale.

[89] On raisonnerait de même pour la multiplication à droite par A en utilisant l'égalité $E_{i,j}\Lambda = \lambda_j E_{i,j}$ (action à droite sur les *colonnes*).

[90] *Rappel* : pour chaque polynôme p, on a la comparaison $\deg p' \leq (\deg p) - 1$ avec égalité ssi $\deg p \neq 0$.

Par conséquent :

(a) lorsque $\delta = 0$ (cas où T est vide), l'endomorphisme F est nul donc diagonalisable ;

(b) lorsque $0 \leq \delta < n$, la matrice ci-dessus est triangulaire stricte et non nulle, donc nilpotente et non nulle, donc ne saurait être diagonalisable, donc F n'est pas diagonalisable ;

(c) lorsque $\delta = n$, montrons que les coefficients diagonaux ci-dessus sont deux à deux distincts, ce qui montrera que F est diagonalisable car possédant $\dim K_n [X]$ valeurs propres[91]. Diviser la matrice ci-dessus par le coefficient dominant de π ne change pas le caractère distinct des éléments diagonaux : on peut donc imposer π unitaire. Soit $N \in [0, n|]$: le terme dominant de π est alors X^n. donc celui de πX^N est X^{n+N}, donc celui de $F\left(X^N\right) = \left[\pi X^N\right]^{(n)}$ est $\frac{(n+N)!}{N!} X^N$. Les coefficients diagonaux cherchés sont donc les

$$\frac{(n+N)!}{N!} = (n+1)(n+2)\cdots(n+N) \text{ lorsque } N \text{ décrit } [0, N|],$$

lesquels forment (quand N croît) une suite strictement croissante, *a fortiori* injective, ce qui conclut.

Conclusion : l'endomorphisme F est diagonalisable ssi π est de degré extrémal ($-\infty$ ou n).

2.3.2 Cas triangulaire

Propriété – ***Définition***

On dit que f est ***trigonalisable***[92] *s'il y a une base de E dans laquelle la matrice de f est trigonale supérieure, chaque telle base étant appelée une* ***base de trigonalisation*** *de f. (On dit aussi d'une telle base qu'elle* ***trigonalise*** *f.)*

Remarque

• Le mot *trigonal* est synonyme de *triangulaire*. Le radical *trigon-* peut donc être remplacé par celui *triangular-* : cela est toutefois plus long et de fait peu usité.

• En regardant la première colonne d'une matrice où f est trigonale, on voit que f admet une valeur propre (dès lors qu'une telle colonne fait sens) :

$$f \text{ trigonalisable} \Longrightarrow \operatorname{Sp} f \neq \emptyset \qquad (\text{sauf si } E = \{0\}).$$

[91] *Rappel* : $\dim K_n [X] = n\underline{\underline{+1}}$.

[92] Suggestion d'abréviation : tg^B.

• La condition "supérieure" est en fait superflue : si T dénote une matrice triangulaire inférieure, alors $P^{-1}TP$ sera triangulaire supérieure où l'on a abrégé[93]

$$P := \sum_{x+y=n+1} E_{x,y} = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \diagup & \\ 1 & & \end{pmatrix}.$$

• *Culture hors programme* : en s'appuyant sur la caractérisation du caractère trigonal supérieur de $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f$ donnée en préliminaires, on peut montrer que f est trigonalisable ssi il y a une suite[94] strictement croissante de $n+1$ sous-espaces vectoriels de E chacun stables par f.

Exemples

1. Chaque endomorphisme diagonalisable est trigonalisable.
2. Nous verrons que chaque endomorphisme *nilpotent* est trigonalisable (*cf.* chap Red2 ? ? ? section nilpSynt).
3. Lorsque[95] $K = \mathbb{C}$, nous verrons que f est toujours trigonalisable (*cf.* section 3.2.3).
4. Vu l'égalité $\deg [P(X-18)] = \deg P$ pour chaque polynôme P, l'endomorphisme $P \mapsto P(X-18)$ a dans la base canonique de $K_n[X]$ une matrice triangulaire supérieure, donc est trigonalisable.
5. L'exercice d'application 3 section 2.3.1 montrait pour chaque polynôme π que l'endomorphisme $P \mapsto [P\pi]^{(n)}$ était trigonalisable (et même nilpotent ou diagonalisable selon le degré de π, ce qui recoupe les deux premiers exemples).
6. Si $K = \mathbb{R}$ et f est une rotation (non scalaire) d'un plan euclidien, alors f n'est pas trigonalisable : en effet, le premier vecteur d'une éventuelle base de trigonalisation est propre pour f, ce qui forcerait la rotation f à être d'angle nul ou plat (cas scalaire exclu).

Propriété* – *Définition

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *l'endomorphisme $A\cdot$ est trigonalisable ;*
2. *la matrice A est semblable à une matrice trigonale supérieure.*

Dans ce cas, on dit que A est ***trigonalisable*** *et on appelle* ***base de trigonalisation*** *de A toute base trigonalisant $A\cdot$.*

Démonstration : la même que pour la proposition où était définie la diagonalisabilité de A – en remplaçant partout « diag » par « trig ».

Remarques

[93] Au niveau de la combinatoire des bases, conjuguer par P agit en renversant l'ordre des vecteurs de base (d'où au passage l'égalité $P^2 = I_n$).

[94] Une telle suite s'appelle un ***drapeau*** (de f), par analogie avec la forme triangulaire apparaissant dans une matrice trigonale.

[95] Et plus généralement dès que K est algébriquement clos.

• Une matrice trigonalisable à spectre constant n'est jamais diagonalisable, à moins d'être scalaire (ce qui aurait déjà sauté aux yeux).

Par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est trigonalisable[96] de réduite $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec matrice de passage $P := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, donc n'est pas diagonalisable.

De même, la matrice $\begin{pmatrix} -7 & 16 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est trigonalisable[97] de réduite $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ avec passage $Q := \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, donc n'est pas diagonalisable.

• Comme pour la diagonalisabilité, on montrerait pour chaque suite finie $(A_1, A_2, ..., A_\ell)$ de matrice carrées l'équivalence[98]

$$\operatorname{Diag}(A_1, A_2, ..., A_\ell) \text{ trigonalisable} \iff \forall i \in [1, \ell|] \, , \; A_i \text{ trigonalisable.}$$

• Lorsque $K = \mathbb{R}$, la matrice de passage de chaque base de $\mathbb{R}^n$ vers son orthonormalisée de Gram-Schmidt est triangulaire supérieure. Par conséquent, si A est trigonalisable, on pourra toujours imposer une matrice de passage *orthogonale* (vers une réduite trigonale), *i. e.* imposer une base de trigonalisation *orthonormée.*

Application : montrons qu'*aucune rotation de* $\mathbb{R}^3$ *n'est trigonalisable (à l'exception de l'identité).* Soit r une telle rotation et soit (a, b, c) une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ trigonalisant r. Le vecteur a est alors propre pour r, donc appartient à son axe. Le vecteur b est alors orthogonal à cet axe, donc son image $r(b)$ aussi, ce qui s'écrit $a \perp r(b)$. Or cette dernière image reste par ailleurs dans le plan $\mathbb{R}a + \mathbb{R}b$ (se lit dans la réduite trigonale) : elle doit donc être colinéaire à b, ce qui force r à être d'angle nul.

Exercice d'application

On impose $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ *et on admet* $\operatorname{Sp} A = \{2, 3\}$.

a. *Donner un argument expéditif justifiant que* 3 *est valeur propre de* A.

b. *La matrice* A *est-elle diagonalisable ?*

c. *Trigonaliser* A.

---

a. On observe que la somme des coefficients de chaque ligne de A vaut 3. Le couple $(3, (1, 1, 1))$ est donc propre pour A.

[96] Vérifier l'égalité $P \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P$.

[97] Vérifier l'égalité $Q \begin{pmatrix} -7 & 16 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} Q$.

[98] La réciproque sera vue à la la section 5.

b. Déterminons des bases des sous-espaces propres

$$\begin{aligned} E_3(A) &= \operatorname{Ker}(A-3I_3) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \\ \text{et } E_2(A) &= \operatorname{Ker}(A-2I_3) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a à $(a,b,c) \in K^2$ fixé d'une part les équivalences

$$\begin{aligned} (a,b,c) \in E_3(A) &\iff \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} 4b = 2a+2c \\ 3b = 3c \\ 4b = a+3c \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2b = a+c \\ b = c \\ 4b = a+3c \end{cases} \iff \begin{cases} b = a \\ b = c \\ b = a \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda \in K, \begin{cases} a = \lambda \\ b = \lambda \\ c = \lambda \end{cases} \iff \exists \lambda \in K, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\iff (a,b,c) \in K(1,1,1), \end{aligned}$$

d'autre part les équivalences

$$\begin{aligned} (a,b,c) \in E_3(A) &\iff \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} 4b = a+2c \\ 4b = 3c \\ 4b = a+2c \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 4b = a+2c \\ 4b = 3c \end{cases} \iff \begin{cases} c = a \\ 4b = 3c \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda \in K, \begin{cases} a = 4\lambda \\ b = 3\lambda \\ c = 4\lambda \end{cases} \iff \exists \lambda \in K, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &\iff (a,b,c) \in K(4,3,4), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit les égalités

$$E_3(A) = K(1,1,1) \text{ et } E_2(A) = K(4,3,4).$$

La somme des sous-espaces propres de A ne valant tout l'espace K^3, la matrice A n'est pas diagonalisable.

c. Notons $V := (1,1,1)$ et $W := (4,3,4)$ et soit $X \in K^3$ libre avec V et W. Alors la matrice[99] de A dans la base (V,X,W) est de la forme

$$\operatorname*{Mat}_{(V,W,X)} A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & ? \\ 0 & 2 & ? \\ 0 & 0 & ? \end{pmatrix}, \text{ ce qui montre que } A \text{ est trigonalisable.}$$

[99] On identifie A avec son endomorphisme canoniquement associé.

Explicitement, on pourrait imposer $X := (0, 0, 1)$ pour automatiser le calcul de $AX = (-2, -3, 0)$ (dernière colonne de A) et ce dernier vecteur se décomposerait en $(-2, -3, 0) = -6V + W - 2X$ (les coefficients se trouvent par résolution d'un système linéaire), d'où l'égalité

$$A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } P := (V\ W\ X) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque – La trigonalisation effective n'est pas un objectif du programme, aucune méthode y parvenant n'est exigible. Ceci étant dit, en voici une dont le principe théorique est simple : une fois explicitées des bases des sous-espaces propres, on obtient une réduite de la forme $\begin{pmatrix} \Lambda & ? \\ 0 & M \end{pmatrix}$ où Λ est diagonale et $M \in M_d(K)$ pour un certain naturel $d < n$, ce qui permet d'amorcer une récurrence[100] sur n.

---

3 Polynômes caractéristiques

On impose toujours E de dimension finie

$$n = \dim E < \infty.$$

3.1 Définitions & exemples

Définition

On appelle ***polynôme caractéristique***[101] *de A le polynôme*

$$\chi_A := \det(XI_n - A) = \begin{vmatrix} X - a_{1,1} & -a_{1,2} & -a_{1,3} & \cdots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & X - a_{2,2} & -a_{2,3} & \cdots & -a_{2,n} \\ -a_{3,1} & -a_{3,2} & X - a_{3,3} & \cdots & -a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & -a_{n,3} & \cdots & X - a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

(par soucis de lisibilité, on pourra noter $\chi(A) := \chi_A$)

On appelle ***polynôme caractéristique*** *de f la valeur commune*[102] *de χ_M quand M décrit les matrices de f :*

$$\forall \mathcal{B} \text{ base de } E,\ \chi_f := \chi\left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f\right).$$

[100] La récurrence se poursuivra tant qu'on dispose de vecteurs propres, ce qui est assuré sur le corps $\mathbb{C}$ comme nous l'avons annoncé.
[101] χ (*chi*) comme « **ch**aractéristique »
[102] On verra en remarque pourquoi $\chi_{\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f}$ ne dépend pas de $\mathcal{B}$.

Remarques

- La matrice $XI_n - A$ est à coefficients dans le corps $K(X)$. L'indéterminée X est donc vue *comme un scalaire* dans le calcul de $\det(XI_n - A)$.
- La matrice XI_n est scalaire, donc commute avec chaque matrice de $M_n(K[X])$, en particulier avec chaque matrice de $GL_n(K)$.
- Pour chaque $P \in GL_n(K)$, la matrice $XI_n - PAP^{-1} = P^{-1}(XI_n - A)P$ est semblable à $XI_n - A$, donc a même déterminant, d'où l'égalité

$$\boxed{\chi_{PAP^{-1}} = \chi_A}.$$

Deux matrices semblables ont donc même polynôme caractéristique, ce qui légitime *a posteriori* la définition de χ_f (les matrices de f formant une même classe de similitude).

- La matrice XI_n étant scalaire, elle vaut sa transposée, donc $XI_n - A$ a pour transposée ${}^t(XI_n) - {}^tA = XI_n - {}^tA$. En appliquant le déterminant (qui est inchangé par transposition de son argument), on obtient l'égalité

$$\chi\left({}^tA\right) = \chi(A).$$

- Lorsque f est l'endomorphisme $A\cdot$ canoniquement associé à A, prendre pour $\mathcal{B}$ la base canonique de K^n donne pour matrice $\mathrm{Mat}_{b.\ c.}(A\cdot) = A$, d'où l'égalité

$$\chi(A\cdot) = \chi(A).$$

- Dans la littérature, on trouve[103] parfois $\det(A - XI_n)$ au lieu $\det(XI_n - A)$ pour définir χ_A, ce qui a l'avantage d'avoir pour terme constant $\det A$ (pas de (-1^n)) et moins de signe dans la définition. En contre-partie, ce polynôme n'est pas toujours unitaire, ce qui est le cas du χ_A au programme.
- Quand $n = 0$, chaque polynôme caractéristique est le déterminant de la matrice vide, donc vaut 1 (cas pathologique) :

$$n = 0 \Longrightarrow \chi_A = 1 = \chi_f.$$

Coefficients dominant, sous-dominant et constant

Écrivons A et I_n sous forme de colonnes :

$$A =: (C_1, C_2, ..., C_n) \text{ et } I_n =: (E_1, E_2, ..., E_n).$$

La famille $(E_1, E_2, ..., E_n)$ est donc la base canonique de K^n identifié à $M_{n,1}(K)$. On peut alors écrire

$$\chi_A = \det(XI_n - A) = \det(XE_1 - C_1, XE_2 - C_2, ..., XE_n - C_n)$$

et la multilinéarité de det va permettre, en développant, d'expliciter les coefficients du polynôme χ_A. Seuls trois sont exigibles.

Rappelons au besoin comment développer une expression de la forme

$$\Lambda(a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n) \text{ où } \Lambda \text{ est multilinéaire :}$$

[103] L'idée est naturelle : étudier det au voisinage de A en la "perturbant" dans une certaine direction (ici la droite vectorielle portée par I_n).

1. on pioche dans chaque somme $a_i + b_i$ un terme (a_i ou b_i) ;
2. on applique Λ sur le n-uplet de termes piochés ;
3. on somme ces images sur les 2^n pioches possibles.

Pour récupérer le terme en X^n, on doit multiplier n facteurs X, *i. e.* piocher XE_i dans chaque colonne, ce qui donne

$$\det(XE_1, XE_2, ..., XE_n) = X^n \det(E_1, E_2, ..., E_n) = X^n \det I_n = X^n.$$

Pour récupérer le terme en X^{n-1}, on doit piocher un XE_i dans chaque colonne sauf une (où l'on pioche $-C_i$), ce qui donne

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \det(XE_1, ..., XE_{i-1}, -C_i, XE_{i+1}, ..., XE_n) \\
= \quad &\sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} X & & & -a_{1,i} & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & X & -a_{i-1,i} & & & \\ & & & -a_{i,i} & & & \\ & & & -a_{i+1,i} & X & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & -a_{n,i} & & & X \end{vmatrix} \\
\underset{\text{la } i\text{-ième ligne}}{\overset{\text{développer selon}}{=}} \quad &\sum_{i=1}^{n} -a_{i,i} \underbrace{\begin{vmatrix} X & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & X & & \\ & & & X & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & X \end{vmatrix}}_{\text{diagonale formée de } n-1 \text{ symboles } X} = \sum_{i=1}^{n} -a_{i,i} X^{n-1} = (-\operatorname{tr} A)\, X^{n-1}.
\end{aligned}$$

Enfin le terme constant s'obtient[104] en évaluant en 0 :

$$\chi_A(0) = \det(0I_n - A) = \det(-A) = (-1)^n \det A.$$

Finalement, on retiendra

$$\boxed{\chi_A = X^n - (\operatorname{tr} A)\, X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A}$$

et[105]
$$\boxed{\chi_f = X^n - (\operatorname{tr} f)\, X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det f}.$$

En particulier, lorsque $n = 2$, le polynôme caractéristique est complètement explicité :

$$\chi_A = X^2 - (\operatorname{tr} A)\, X + \det A.$$

Cette égalité est à savoir démontrer directement par un calcul explicitant les coefficients de A.

[104] Ce qui pourrait se retrouver en ne piochant que des $-C_i$ dans le développement précédent.

Remarque – **Culture hors programme**. Il est tout à fait possible d'expliciter les autres coefficients de χ_A. Pour chaque partie $I \subset [1,n|]$, notons A_I la matrice extraite $(a_{i,j})_{i,j\in I}$. Un développement du polynôme-déterminant montrerait alors l'égalité

$$\chi_A = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left(\sum_{\operatorname{Card} I = i}^{I\subset[1,n|]} \det A_I \right) X^{n-i} \qquad \text{(exercice relevé de calcul).}$$

Sanity check : pour $i \in \{0,1,n\}$, on retrouve les trois termes ci-dessus.

Du point de vue algorithmique, en définissant[106] une suite $(A_i, c_i, C_i)_{i\in[0,n|]}$ par la récurrence

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ c_0 \\ C_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \\ I_n \end{pmatrix} \text{ et } \forall i \in [1,n|]\,, \begin{pmatrix} A_i \\ c_i \\ C_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AC_{i-1} \\ -\frac{\operatorname{tr} A_i}{i} \\ A_i + c_i I_n \end{pmatrix},$$

$$\text{on pourrait montrer les égalités } \left\{ \begin{array}{l} \chi_A = \sum_{i=0}^n c_i X^{n-i} \\ \operatorname{com}(XI_n - A) = \sum_{i=0}^n C_i X^{n-1-i} \end{array} \right. ,$$

ce qui fournit un calcul efficace et simultané[107]

$$\begin{array}{rcl} \text{du déterminant } \det A & = & (-1)^n c_n, \\ \text{de la comatrice } \operatorname{com} A & = & (-1)^{n-1}\ {}^t C_{n-1}, \\ \text{du polynôme caractéristique } \chi_A & = & X^n - \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\operatorname{tr} A_i}{i} X^{n-i} \\ \text{et (s'il fait sens) de l'inverse } A^{-1} & = & \dfrac{-1}{c_n} C_{n-1}. \end{array}$$

Exemples

1. En dimension 1, on a pour chaque scalaire $\lambda \in K$ l'égalité[108]

$$\chi_{(\lambda)} = \det(X - \lambda) = X - \lambda,$$

Sanity check : coefficients constant et sous-dominant coïncident et valent $-\operatorname{tr}(\lambda) = -\det(\lambda)$.

2. Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & {\scriptscriptstyle 0} \\ {\scriptscriptstyle 0} & 2 \end{pmatrix}$ ont toutes deux un déterminant nul et pour trace 2, d'où les égalités

$$\chi \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = X^2 - 2X = X(X-2) = \chi \begin{pmatrix} 0 & {\scriptscriptstyle 0} \\ {\scriptscriptstyle 0} & 2 \end{pmatrix}.$$

Sanity check : ces matrices (déjà rencontrées) sont semblables avec passage $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, donc ont même polynôme caractéristique.

[106] Sous réserve de pouvoir inverser les naturels dans le corps K, par exemple quand K est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

[107] Cet algorithme fut publié pour la première fois en 1840 par Urbain Le Verrier (le découvreur de la planète Neptune) et porte le nom d'autres mathématiciens postérieurs (comme Souriau ou Faddeev). Un algorithme plus performant fut publié en 1984 par Stuart J. Berkowitz.

[108] *Rappel* : le déterminant de chaque matrice de taille 1×1 vaut son unique coefficient.

3. On calculerait de même
$$\begin{aligned}\chi\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} &= X^2=\chi\begin{pmatrix}0 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix} \text{ (trace et déterminant nuls)}\\ \text{et } X^2+6X+9 &= \chi\begin{pmatrix}-7 & 16\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\chi\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 0 & -3\end{pmatrix}=(X+3)^2.\end{aligned}$$
Sanity check : parmi ces quatre matrices (déjà rencontrées), les deux premières (resp. deux dernières) sont semblables.

4. Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Les matrices $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}e^{i\theta} & 0\\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix}$ ont chacune pour trace $2\cos\theta$ et pour déterminant 1, donc ont pour polynôme caractéristique
$$\chi\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=X^2-2\cos\theta+1=\chi\begin{pmatrix}e^{i\theta} & 0\\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix}.$$
En particulier, lorsque $\theta=\frac{\pi}{2}$, on obtient les égalités[109]
$$\boxed{\chi\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=X^2+1}=\chi\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} \qquad \text{(scindé sur } \mathbb{C} \text{ mais pas sur } \mathbb{R}\text{)}.$$
De même, la matrice $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$ est de trace nulle et de déterminant -1, d'où les égalités
$$\chi\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}=X^2-1.$$
En particulier, lorsque $\theta\in\left\{0,\frac{\pi}{2}\right\}$, on obtient
$$\chi\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\chi\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=(X-1)(X+1).$$
Sanity check : la matrice $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$ est une symétrie vectorielle (elle est involutive), donc est semblable à $\pm I_2$ ou à $\mathrm{Diag}(1,-1)$, le cas scalaire étant facile à écarter.

5. Soient b et c deux naturels de somme n, soient $B\in M_b(K)$, $C\in M_c(K)$ et $D\in M_{b,c}(K)$. La matrice par blocs $\begin{pmatrix}B & D\\ 0 & C\end{pmatrix}$ a alors pour polynôme caractéristique
$$\begin{aligned}\chi\begin{pmatrix}B & D\\ 0 & C\end{pmatrix} &= \det\left(X\begin{pmatrix}I_b & 0\\ 0 & I_c\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}B & D\\ 0 & C\end{pmatrix}\right)\\ &= \begin{vmatrix}XI_b-B & -D\\ 0 & XI_c-C\end{vmatrix}=|XI_b-B|\,|XI_c-C|=\chi_B\chi_C.\end{aligned}$$

[109] Ce polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

Le même calcul fonctionnerait[110] pour une matrice triangulaire par blocs :

$$\chi\begin{pmatrix} B_1 & ? & \cdots & ? \\ & B_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & ? \\ & & & B_k \end{pmatrix} = \chi_{B_1}\chi_{B_2}\cdots\chi_{B_k} \text{ (avec les évocations évidentes)}$$

En particulier, lorsque chaque bloc est de taille 1×1, on obtient le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire supérieure :

$$\boxed{\chi\begin{pmatrix} d_1 & ? & \cdots & ? \\ & d_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & ? \\ & & & d_n \end{pmatrix} = (X-d_1)(X-d_2)\cdots(X-d_n)}.$$

Observer qu'il est scindé ou vaut 1 : nous verrons la réciproque.

6. Lorsque f est une homothétie (dont on note λ le rapport), sa matrice dans chaque base de E vaut $\operatorname{Diag}(\lambda, \lambda, ..., \lambda)$ dont le polynôme caractéristique vaut $(X-\lambda)^n$ d'après l'égalité ci-dessus :

$$\forall \lambda \in K,\ \chi_{\lambda \operatorname{Id}} = (X-\lambda)^n.$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $(a_0, a_1, ...a_{n-1}) \in K^n$. On a alors les égalités

$$\chi\begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \diagdown & & \vdots \\ & \diagdown & 0 & -a_{n-2} \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} X & & & a_0 \\ -1 & \diagdown & & \vdots \\ & \diagdown & X & a_{n-2} \\ & & -1 & X+a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{dernière colonne}}{\overset{\text{linéarité en la}}{=}} \begin{vmatrix} X & & & \\ -1 & \diagdown & & \\ & \diagdown & X & \\ & & -1 & X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X & & & a_0 \\ -1 & \diagdown & & \vdots \\ & \diagdown & X & a_{n-2} \\ & & -1 & a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Le premier déterminant vaut X^n (matrice triangulaire), on développe le second suivant sa dernière colonne : pour chaque $i \in [0, n|[$, le coefficient a_i se voit

[110] Ne pas raisonner par récurrence, utiliser plutôt l'expression du déterminant d'une matrice triangulaire par blocs (qui, elle, s'établit aisément par récurrence) – une seule récurrence suffit.

affecté d'un signe[111] $(-1)^{n-1-i}$ et le mineur correspondant vaut[112]

$$\det\left(\begin{array}{cccc|cccc} X & & & & \longleftarrow & & & \\ -1 & \ddots & & & \text{bloc de taille } i\times i & & & \\ & \ddots & \ddots & & \longleftarrow & & & \\ & & -1 & X & & & & \\ \hline & & & & -1 & X & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & X \\ & & & & & & & -1 \end{array}\right)$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} X & & & \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & X \end{vmatrix}}_{i \text{ symboles } X} \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & X & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & X \\ & & & -1 \end{vmatrix}}_{(n-1)-i \text{ symboles } -1} = X^i (-1)^{n-1-i},$$

donc le développement sur la dernière colonne donne

$$\begin{vmatrix} X & & & a_0 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & X & a_{n-2} \\ & & -1 & a_{n-1} \end{vmatrix} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n+i+1} a_i \; X^i (-1)^{n-1-i} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i.$$

Finalement, on obtient l'égalité[113]

$$\boxed{\chi\begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_1 X + a_0}.$$

Nous avons au passage montré que chaque polynôme unitaire de degré n est le polynôme caractéristique d'au moins une matrice. La matrice de gauche s'appelle la ***matrice compagne*** du polynôme de droite.
Sanity checks :

(a) lorsque chaque a_i est nul, on obtient la matrice triangulaire $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$ dont le polynôme caractéristique vaut X^n d'après l'exemple (5) ;

(b) lorsque $(n, a_0, a_1) = (2, 1, 0)$, on obtient la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dont le polynôme caractéristique vaut $X^2 + 1$ d'après l'exemple (4) ;

(c) lorsque $(n, a_0, a_1) = (2, -1, 0)$, on obtient la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dont le polynôme caractéristique vaut $X^2 - 1$ d'après l'exemple (4) ;

[111] Le signe est un + sur la diagonale, en particulier pour a_{n-1}, donc pour $i = n-1$.
[112] La largeur totale de la matrice mineure vaut $n-1$ et l'on en retire celle du bloc $i \times i$.
[113] On peut également développer selon la première ligne (afin de n'avoir que deux mineurs) puis raisonner par récurrence (ce qui suppose de connaître le résultat à l'avance !).

(d) plus généralement, pour chaque $(\tau, \delta) \in K^2$, imposer $(n, a_0, a_1) = (2, -\delta, \tau)$ donne la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ 1 & \tau \end{pmatrix}$ dont le polynôme caractéristique vaut $X^2 - \tau X + \delta$ d'après l'expression générale $\chi_A = X^2 - (\operatorname{tr} A) X + \det A$.

(e) lorsque $n = 1$, la matrice devient $(-a_0)$ dont le polynôme caractéristique vaut $X + a_0$ d'après l'exemple (1).

En guise d'application, on peut directement calculer[114]

$$\chi \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{transposition}}{\overset{\chi \text{ invariant par}}{=}} \chi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ I_{n-1} & 0 \end{pmatrix} = X^n - 1.$$

Sanity check : quand $n = 2$, on retrouve la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et le polynôme caractéristique $X^2 - 1$.

Exercices d'application

1. *Exprimer en fonction de χ_A les polynômes caractéristiques des endomorphismes*

$$\gamma := \left\{ \begin{array}{ccc} M_n(K) & \longrightarrow & M_n(K) \\ M & \longmapsto & AM \end{array} \right. \quad \textit{et } \delta := \left\{ \begin{array}{ccc} M_n(K) & \longrightarrow & M_n(K) \\ M & \longmapsto & MA \end{array} \right. .$$

On pourra chercher à ordonner les matrices de base $E_{i,j}$ de façon "pertinente".

2. *Soient $p, q \in \mathbb{N}$, imposons $A \in M_{p,q}(K)$ et soit $B \in M_{q,p}(K)$. Donner sens à, montrer et commenter l'égalité*

$$X^q \chi_{AB} = X^p \chi_{BA}.$$

3. *Pour chaque naturel N, on définit une matrice de $M_N(K)$ par*

$$T_N := \sum_{i=1}^{N-1} (E_{i,i+1} + E_{i+1,i}) \quad \textit{et on note } P_N := \chi(T_N).$$

Expliciter P_0, P_1, P_2, montrer les égalités

$$\begin{array}{rcl} \forall N \in \mathbb{N}^*,\ P_{N-1} + P_{N+1} & = & X P_N \ \textit{et} \\ \begin{array}{c} \forall N \in \mathbb{N} \\ \forall \theta \in \mathbb{R} \backslash \pi\mathbb{Z} \end{array},\ P_N(2\cos\theta) & = & \dfrac{\sin((N+1)\theta)}{\sin\theta} \end{array}$$

puis en déduire une factorisation de chaque χ_N.

---

[114] Une telle matrice faisant tourner *modulo n* les coordonnées d'un vecteur colonne, on comprendra le qualificatif ***cyclique*** attribué plus généralement aux matrices compagnes.

1. Pour chaque $(i,j)\in[1,n|]^2$, on a les égalités[115]

$$\gamma(E_{i,j})=AE_{i,j}=\left(\sum_{x,y\in[1,n|]}a_{x,y}E_{x,y}\right)E_{i,j}=\sum_{x,y\in[1,n|]}a_{x,y}\underbrace{E_{x,y}E_{i,j}}_{=\delta_y^iE_{x,j}}=\sum_{x=1}^n a_{x,i}E_{x,j},$$

ce qui montre que γ stabilise $\underset{x\in[1,n|]}{\mathrm{Vect}}E_{x,j}$ et que la matrice de l'induit de γ sur cet espace dans la base $(E_{1,j},E_{2,j},...,E_{n,j})$ vaut A. En recollant ces bases lorsque j varie, on obtient une base où γ a pour matrice $\mathrm{Diag}(A,A,...,A)$, d'où les égalités

$$\chi_\gamma=\chi_{\mathrm{Diag}(A,A,...,A)}=\chi_A\ \chi_A\ \cdots\ \chi_A=\chi_A^n.$$

On établirait de même à $(i,j)\in[1,n|]^2$ fixé les égalités[116]

$$\begin{array}{rcl}\delta(E_{i,j})&=&\sum_{y=1}^n a_{j,y}E_{i,y}\text{ et }\underset{(E_{i,1},E_{i,2},...,E_{i,n})}{\mathrm{Mat}}\delta={}^tA,\\ \text{d'où }\chi_\delta&=&\chi_{\mathrm{Diag}({}^tA,{}^tA,...,{}^tA)}=\chi_{{}^tA}^n=\chi_A^n.\end{array}$$

Sanity check : imposons A diagonalisable, mettons $A=P\Lambda P^{-1}$ où Λ est diagonale et P inversible. Le calcul par blocs donne alors les égalités

$$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{Diag}(A,A,...,A)=Q\Lambda Q^{-1}\\ \mathrm{Diag}({}^tA,{}^tA,...,{}^tA)={}^tQ^{-1}\ \Lambda\ {}^tQ\end{array}\right.\text{ où }\left\{\begin{array}{l}Q:=\mathrm{Diag}(P,P,...,P)\\ D:=\mathrm{Diag}(\Lambda,\Lambda,...,\Lambda)\end{array}\right.,$$

d'où la diagonalisabilité de γ et δ (établie à l'exercice d'application 2 section 2.3.1).

Remarque – Les égalités $AE_{i,j}=\sum_{x=1}^n a_{x,i}E_{x,j}$ montreraient que, dans la base $(E_{i,j})$ ordonnée lexicographiquement, l'endomorphisme $M\mapsto AM$ a pour matrice $(a_{i,j}I_n)_{i,j\in[1,n|]}$.

2. Vu les tailles de A et B, leurs deux produits font bien sens et sont des matrices carrées :

$$AB\in M_p(K)\ \text{ et }BA\in M_q(K).$$

Leurs polynômes caractéristiques χ_{AB} et χ_{BA} font donc sens.

Imposons d'abord A sous la forme $\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$ où $\mathrm{rg}\,A=r$. En écrivant selon cette décomposition $B=:\begin{pmatrix}S&T\\U&V\end{pmatrix}$, le calcul par blocs livre alors les égalités

d'une part $AB=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}S&T\\U&V\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}S&T\\0&0\end{pmatrix}$, d'où

$$\chi_{AB}=\det\begin{pmatrix}XI_r-S&T\\0&XI_{p-r}\end{pmatrix}=\det(XI_r-S)\det(XI_{p-r})=\chi_SX^{p-r},$$

d'autre part $BA=\begin{pmatrix}S&T\\U&V\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}S&0\\U&0\end{pmatrix}$, d'où

$$\chi_{BA}=\det\begin{pmatrix}XI_r-S&0\\U&XI_{p-r}\end{pmatrix}=\det(XI_r-S)\det(XI_{q-r})=\chi_SX^{q-r}.$$

[115] En français, $AE_{i,j}$ est formée de n colonnes nulles sauf la j-ième qui vaut la i-ième colonne de A.
[116] On a abusivement identifié δ avec son induit sur $\underset{x\in[1,n|]}{\mathrm{Vect}}E_{x,j}$.

Les deux produits $X^p\chi_{AB}$ et $X^q\chi_{BA}$ sont donc égaux (à $X^r\chi_S$).

Imposons ensuite A inversible, ce qui force $p=q$: on a alors les égalités[117]

$$\begin{aligned}\chi_{AB} &= \det\left(XI_p-AB\right)=\det\left(A\left(XA^{-1}-B\right)\right)=\det A\det\left(XA^{-1}-B\right)\\ &= \det\left(XA^{-1}-B\right)\det A=\det\left(\left(XA^{-1}-B\right)A\right)=\det\left(XI_p-BA\right)=\chi_{BA}.\end{aligned}$$

Soient enfin $P\in GL_p(K)$ et $Q\in GL_q(K)$ tels que $A=PJQ$ où $J:=\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in M_{p,q}$. Les deux cas particuliers ci-dessus permettent de conclure :

$$X^p\chi_{AB}=X^p\chi_{PJQB}=X^p\chi_{JQBP}=X^q\chi_{QBPJ}=X^q\chi_{BPJQ}=X^q\chi_{BA}.$$

Lorsque $p=q$, on obtient l'égalité $\chi_{AB}=\chi_{BA}$ qui fait l'objet de plusieurs exercices de concours.

Remarque – La décomposition $A=P\begin{pmatrix} I_{\operatorname{rg}A} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q$, bien qu'"incompatible" avec la similitude, rend parfois de précieux services : ne pas la laisser dans un fond de tiroir !

3. La matrice T_0 est dans $M_0(K)$, donc est la matrice vide, d'où

$$P_0=1.$$

La matrice T_1 est la somme vide de $M_1(K)$, donc est la matrice nulle, d'où

$$P_1=X.$$

Enfin, la matrice T_2 vaut $E_{1,2}+E_{2,1}=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, d'où

$$P_2=X^2-1.$$

On en déduit les égalités

$$P_0+P_2=1+\left(X^2-1\right)=XX=XP_1.$$

Par ailleurs, développer à $N\in\mathbb{N}^*$ fixé le déterminant P_{N+1} selon sa première

[117] On retrouve ainsi les égalités $\chi_{PAP^{-1}}=\chi_A$ du cours.

colonne livre les égalités

$$\begin{aligned}
P_{N+1} &= \chi \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} X & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & X \end{vmatrix}}_{N+1 \text{ symboles } X} \\
&= X \underbrace{\begin{vmatrix} X & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & X \end{vmatrix}}_{N \text{ symboles } X} + \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & & & & \\ -1 & X & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & X \end{vmatrix}}_{N \text{ symboles } X} \\
&= X \underbrace{\begin{vmatrix} X & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & X \end{vmatrix}}_{N \text{ symboles } X} - \underbrace{\begin{vmatrix} X & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & X \end{vmatrix}}_{\substack{N-1 \text{ symboles } X \\ (\text{fait sens car } N\geq 1)}} \\
&= XP_N - P_{N-1}, \text{ d'où } P_{N+1} + P_{N-1} = XP_N.
\end{aligned}$$

À retenir : calcul d'un déterminant tridiagonal par récurrence.

Soit enfin $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et notons s la suite $\left(\frac{\sin((N+1)\theta)}{\sin\theta}\right)_{N\in\mathbb{N}}$. Vu les égalités

$$\begin{aligned}
s_0 &= \frac{\sin\left((0+1)\,\theta\right)}{\sin\theta} = \frac{\sin(\theta)}{\sin\theta} = 1, \\
s_1 &= \frac{\sin\left((1+1)\,\theta\right)}{\sin\theta} = \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta \text{ et (à } N \in \mathbb{N}^* \text{ fixé)} \\
s_{N+1} + s_{N-1} &= \frac{\sin\left(N\theta+\theta\right) + \sin\left(N\theta-\theta\right)}{\sin\theta} = \frac{2\sin N\theta\cos\theta}{\sin\theta} = 2s_N\cos\theta,
\end{aligned}$$

les suites (s_N) et $(P_N\,(2\cos\theta))$ vérifient une même relation de récurrence d'ordre 2, à savoir

$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ u_{N+1} + u_{N-1} = (2\cos\theta)\,u_N,$$

et ont mêmes deux premiers termes (à savoir 1 et $2\cos\theta$), donc sont égales.

Soit $N \in \mathbb{N}$ et soit $i \in [1, N|]$: le quotient $\frac{i}{N+1}$ est alors non entier, donc il est légitime de remplacer θ par $\frac{i\pi}{N+1}$ dans l'égalité sus-montrée, ce qui donne

$$P_{N-1}\left(2\cos\frac{i\pi}{N+1}\right) = \frac{\sin(i\pi)}{?} = \frac{0}{?} = 0.$$

La fonction cos étant injective sur $[0, \pi]$, nous venons de trouver N racines au polynôme P_N :

$$2\cos\frac{\pi}{N+1},\ 2\cos\frac{2\pi}{N+1},\ 2\cos\frac{3\pi}{N+1},\ ...,\ 2\cos\frac{N\pi}{N+1}.$$

Or ce polynôme est unitaire et de degré N (c'est le polynôme caractéristique d'une matrice de $M_N(K)$), d'où la factorisation

$$P_N = \prod_{i=1}^{N} \left(X - 2\cos\frac{i\pi}{N+1} \right) \qquad (\textit{sanity check} : \text{remplacer } N \text{ par } 2).$$

Remarque – **Culture hors programme**. Les polynômes $P_N(2X)$ sont en fait les polynômes de Tchebychev de seconde espèce.

3.2 Lien avec la réduction

Voyons à présent comment le polynôme caractéristique aide à caractériser la diagonalisabilité et la trigonalisabilité. Nous verrons également au chapitre ? ? ? une description de la nilpotence en termes de polynômes minimaux.

Une remarque préliminaire : s'il est possible de trouver une base $\mathcal{B}$ de E où la matrice de f est triangulaire, son polynôme caractéristique vaudra alors $\chi(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f)$ et sera scindé ou vaudra 1 d'après un exemple (5) précédent. On en déduit les implications :

$$f \text{ diagonalisable} \Longrightarrow f \text{ trigonalisable} \Longrightarrow \chi_f \text{ scindé (ou vaut 1)},$$

lesquelles restent valides en remplaçant partout « f » par « A ».

3.2.1 Ordre de multiplicité d'une valeur propre

Proposition[118]

Le spectre de A est formé des racines de χ_A.
Le spectre de f est formé des racines de χ_f.

Démonstration

On a pour chaque scalaire λ les équivalences

$$\begin{aligned}\lambda \in \operatorname{Sp} A &\Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\} \Longleftrightarrow A - \lambda I_n \text{ non injectif} \\ &\Longleftrightarrow \lambda I_n - A \text{ non injectif} \Longleftrightarrow \det(\lambda I_n - A) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda \text{ racine de } \chi_A,\end{aligned}$$

d'où l'on déduit[119] (en ayant évoqué une base $\mathcal{B}$ de E)

$$\lambda \in \operatorname{Sp} f \Longleftrightarrow \lambda \in \operatorname{Sp} \operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} f \Longleftrightarrow \lambda \text{ racine de } \chi\left(\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} f\right) \Longleftrightarrow \lambda \text{ racine de } \chi_f.$$

---

[118] Non contents de simplement capter le spectre brut, les polynômes caractéristiques contiennent en fait bien plus d'information "spectrale", d'où leur rôle central dans la réduction.

[119] On rappelle les égalités $\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Sp} f = \operatorname{Sp} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f \\ \chi_f = \chi(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f) \end{array} \right.$

Sanity check : soit $B \in M_n(K)$. Si A et B sont semblables, elles ont alors même polynôme caractéristique, donc même spectre, et l'on retrouve l'implication

$$A \text{ et } B \text{ semblables} \Longrightarrow \operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp} B.$$

Remarques

• Cette proposition *ne* dit *pas* que χ_f possède une racine, ni que χ_A est scindé ! De fait, la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a un spectre réel vide et un polynôme caractéristique $X^2 + 1$ sans racine réelle.

• Lorsque $K = \mathbb{C}$, le polynôme χ_f admet une racine (sauf si $n = 0$), donc f admet une valeur propre. Ce raisonnement simple montre que

chaque matrice carrée complexe[120] *(non vide) admet une valeur propre.*

Ceci est faux si E n'est pas de dimension finie : dans $\mathbb{C}[X]$, la multiplication par chaque polynôme non constant n'admet aucun couple propre pour des raisons de degrés.

• Lorsque A est triangulaire, on a vu l'égalité $\chi_A = \prod_{i=1}^n (X - a_{i,i})$: ce dernier polynôme ayant pour racines les $a_{i,i}$, la proposition précédente montre[121] que

le spectre d'une matrice triangulaire se lit sur sa diagonale.

• Lorsque $K = \mathbb{R}$, on définit le ***spectre complexe*** de f par l'ensemble $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}} f$ des racines complexes de χ_f. En évoquant une base de E et en appelant A la matrice de f dans cette base, on a alors les égalités

$$\operatorname*{Sp}_{\mathbb{C}} A \underset{\text{précédente}}{\overset{\text{proposition}}{=}} \{\lambda \in \mathbb{C} \ ; \ \chi_A(\lambda) = 0\} \underset{\text{de } \chi_f}{\overset{\text{définition}}{=}} \left\{\lambda \in \mathbb{C} \ ; \ \chi_f(\lambda) = 0\right\} = \operatorname*{Sp}_{\mathbb{C}} f.$$

Par conséquent, le spectre complexe de f vaut celui de chacune de ses matrices :

$$\forall \mathcal{B} \text{ base de } E, \ \operatorname*{Sp}_{\mathbb{C}} f = \operatorname*{Sp}_{\mathbb{C}} \operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} f.$$

Bien sûr, les éléments de $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}} f$ seront appelés les ***valeurs propres complexes*** de f.

Définition

Soit $\lambda \in K$: on appelle ***ordre de multiplicité*** *de λ pour f (resp. pour A) son ordre de multiplicité en tant que racine de χ_f (resp. χ_A), noté dans ce cours*

$$\omega_\lambda := \text{ordre de multiplicité de } \lambda \qquad (\omega \text{ pour « } \mathbf{o}\text{rdre »}).$$

Remarques

• On précisera au besoin $\omega_\lambda(f)$ ou $\omega_\lambda(A)$. On rencontre également la notation m_λ (évoquant « **m**ultiplicité »).

[121] Fait annoncé section 2.2 mais alors non prouvé.

• Un scalaire est valeur propre (de f ou de A) ssi son ordre de multiplicité est non nul :

$$\lambda \text{ valeur propre} \iff \omega_\lambda \geq 1.$$

• Les valeurs propres de f étant les racines de χ_f (qui est de degré n), on a la comparaison[122]

$$\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} \omega_\lambda \leq n \text{ avec égalité ssi } \chi_f \text{ est scindé (ou vaut 1).}$$

On rapprochera cette comparaison de celle[123]

$$\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} \dim E_\lambda \leq n \text{ avec égalité ssi } f \text{ est diagonalisable.}$$

Ces deux énoncés restent bien sûr valides en remplaçant « f » par « A ».

• La *multiplicité* est une *qualité* (le fait d'être multiple), un *ordre* de multiplicité est une *quantité* (un naturel) qui "mesure" cette qualité[124]. En pratique, on confond souvent les deux et, souvent, l'on parlera simplement de la ***multiplicité*** d'une valeur propre.

• La multiplicité d'un scalaire est également appelée son ***ordre algébrique*** (en rapport avec un calcul algébrique – *i. e.* polynomial –, à savoir l'évaluation par le polynôme caractéristique), par opposition à son ***ordre géométrique*** (en rapport avec la vision d'un espace géométrique – au sens de la géométrie du groupe linéaire –, à savoir le sous-espace vectoriel E_λ associé) défini par la dimension du E_λ correspondant.

Attention aux possibles et égarantes associations *algébrique* $\rightarrow$ *algèbre linéaire* et *géométrique* $\rightarrow$ *géométrie euclidienne*. Nous venons d'indiquer les associations indiquant au mieux selon nous le sens visé[125] :

$$\begin{array}{rcl} \textit{algébrique} & \rightarrow & \text{algèbre } \textit{polynomiale} \\ \textit{géométrique} & \rightarrow & \text{géométrie } \textit{linéaire}. \end{array}$$

Proposition

Soit V un sous-espace vectoriel stable par f. Le polynôme $\chi_{f_{|V}}$ divise alors χ_f.

Démonstration

Soit $\mathcal{V}$ une base de V, soit $\mathcal{B}$ une base de E obtenue en complétant $\mathcal{V}$. Puisque f stabilise V, la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f$ est de la forme $\begin{pmatrix} B & ? \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où[126] $B := \operatorname{Mat}_{\mathcal{V}} f_{|V}$ d'où l'égalité

$$\chi_f = \chi\left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f\right) = \chi\begin{pmatrix} B & ? \\ 0 & C \end{pmatrix} = \chi_B \chi_C.$$

---

[122] *Rappel* : pour chaque polynôme P non nul, la somme des ordres de multiplicités des racines de P vaut au plus $\deg P$ avec égalité ssi P est scindé (ou constant).

[123] Synthétiser deux propositions précédentes.

[124] De même que la *cardinalité* est une *qualité* (la "*puissance*" : le fait d'être équipotent avec tel ou tel ensemble) mesurée par un *cardinal*, les deux étant en pratique abusivement confondus.

[125] À ce titre, la caractérisation arithmétique de ω_λ en termes de divisibilités (plus grand naturel N tel que $(X-\lambda)^N$ divise χ_f) justifierait sans doute plutôt l'appellation d'***ordre arithmétique***, en regard de l'***ordre dimensionnel*** $\dim E_\lambda$.

[126] Puisque f stabilise V, l'endomorphisme induit $f_{|V}$ fait sens.

Or B a pour polynôme caractéristique $\chi\left(\operatorname{Mat} f_{|V}\right) = \chi_{f_{|V}}$, ce qui conclut.

Corollaire[127]

Pour chaque valeur propre λ (de f comme de A), on a les comparaisons

$$1 \leq \dim E_\lambda \leq \omega_\lambda.$$

Démonstration

Soit $\lambda \in K$. L'induit de f à E_λ fait alors sens (car f stabilise E_λ) et est une homothétie de rapport λ, donc a pour polynôme caractéristique $(X-\lambda)^{\dim E_\lambda}$, lequel divise χ_f par la proposition précédente. L'ordre de λ en tant que racine de χ_f vaut donc au moins $\dim E_\lambda$. (Même preuve en remplaçant partout « f » par « A ».)

Par ailleurs, la minoration $\dim E_\lambda \geq 1$ traduit l'appartenance $\lambda \in \operatorname{Sp} f$.

Exercices d'application

a. *On impose $K = \mathbb{C}$ et $n \geq 1$. Montrer alors que f stabilise un hyperplan. Commenter. (On pourra considérer l'endomorphisme $\varphi \mapsto \varphi \circ f$ de $L(E, \mathbb{C})$.)*

b. *Soit $P \subset L(E)$ tels que les seuls sous-espaces vectoriels stables par chaque élément de P sont le sous-espace vectoriel nul et l'espace total. Si $K = \mathbb{C}$ et $n \geq 1$, montrer que le commutant de P est réduit aux homothéties. Même question si $K = \mathbb{R}$ et si n est impair. Discuter des hypothèses portant sur K et n.*

c. *Montrer que chaque $\mathbb{C}$-algèbre intègre de dimension finie est isomorphe à $\mathbb{C}$. Montrer que chaque $\mathbb{R}$-algèbre intègre de dimension finie impaire est isomorphe à $\mathbb{R}$. Discuter les hypothèses.*

---

a. Notons $E^* := L(E, \mathbb{C})$ le dual de E, lequel est de dimension finie $\dim E$. L'application $\varphi \mapsto \varphi \circ f$ est alors un endomorphisme de E^*, donc admet un vecteur propre (car $\dim_{\mathbb{C}} E^* = n \geq 1$), mettons $\varphi \circ f = \lambda\varphi$. La forme linéaire φ étant non nulle, son noyau est un hyperplan de E, qui est stable vu pour chaque h dedans les égalités

$$\varphi(f(h)) = [\varphi \circ f](h) = [\lambda\varphi](h) = \lambda\varphi(h) = \lambda 0 = 0.$$

L'intérêt de ce résultat est d'inciter à raisonner par récurrence (quel que soit le résultat à montrer) en considérant l'induit de f à un hyperplan qu'il stabilise. Cette méthode n'est pas dans l'esprit des programmes (l'appel aux formes linéaires tombe plus généralement dans l'étude de la *dualité*) mais le lectrice et le lecteur intéressés pourront se l'approprier en cherchant à l'appliquer dans diverses situations – par exemple pour montrer que chaque matrice complexe est trigonalisable.

Remarque – Les deux hypothèses sont nécessaires en général : d'une part il n'y a aucun vecteur propre en dimension nulle, d'autre part chaque rotation (non scalaire) du plan $\mathbb{R}^2$ ne stabilise aucune droite.

[127] En d'autres termes, l'ordre géométrique minore toujours l'ordre algébrique.

b. Les homothéties forment une partie du commutant de n'importe quelle partie de $L(E)$, *a fortiori* de P.

Soit $c \in L(E)$ qui commute avec chaque élément de P. Puisque $n \geq 1$, le polynômeχ_c se scinde dans $\mathbb{C}$ et on peut en évoquer une racine $\lambda \in \operatorname{Sp} c$. Alors le sous-espace propre $E_\lambda(c)$ est stable par chaque $p \in P$ (car un tel p commute avec c) et n'est pas le sous-espace vectoriel nul (car λ est valeur propre de c), donc vaut tout E, ce qui signifie $c = \lambda \operatorname{Id}$. Dans les deux cas, c est bien une homothétie.

Le cas réel se traite de façon identique, chaque polynôme réel de degré impair admettant une racine réelle.

L'hypothèse $n \geq 1$ est inutile : si $n = 0$, alors $c = 0 \operatorname{Id}$ est l'unique élément-homothétie de $L(E)$.

Le résultat est faux sur le corps $\mathbb{R}$ en dimension paire : d'une part l'ensemble $SO_2(\mathbb{R})$ des rotations vectorielles planes est commutatif, donc son commutant contient la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (rotation d'un quart de tour) qui n'est pas scalaire, d'autre part aucune droite du plan $\mathbb{R}^2$ n'est fixée par la rotation précédente d'angle $\frac{\pi}{2}$, donc les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ fixé par chaque rotation sont $\{0\}$ et $\mathbb{R}^2$.

Remarque – **Culture**. On appelle ***représentation*** (sous-entendue ***linéaire***) d'un groupe tout morphisme de ce groupe vers un groupe linéaire. L'expérience a montré l'intérêt, pour étudier un groupe, d'étudier ses représentations. La théorie des représentations (dont le résultat démontré ici est un lemme particulièrement utile, publié en 1907 par Issai Schur) est complètement hors programme mais la taupine et le taupin intéressés peuvent l'aborder dès la fin de leur première année et pourront consulter l'incontournable *Représentations linéaires des groupes finis* de Jean-Pierre Serre.

c. Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{C}$-algèbre intègre de dimension finie. Puisque $\mathcal{A}$ est alors non nulle (car intègre), on dispose d'un morphisme d'algèbres injectif

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \hookrightarrow & \mathcal{A} \\ \lambda & \mapsto & \lambda \cdot 1 \end{array} \right.$$

dont il suffit pour conclure de montrer la surjectivité.

Soit $a \in A$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine du polynôme caractéristique de l'endomorphisme $x \mapsto ax$ de $\mathcal{A}$ (évocation légitime car ce polynôme est de degré $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A} \geq 1$). Ce λ est alors valeur propre de $x \mapsto ax$, d'où un $x \in \mathcal{A}$ non nul tel que $ax = \lambda x$, ce qui s'écrit $(a - \lambda 1)\, x = 0$, d'où (par intégrité) la nullité de $a - \lambda 1$, ce qui conclut.

Raisonnement identique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et n impair (car chaque polynôme réel de degré impair admet une racine réelle).

Sans l'hypothèse d'imparité, le résultat est faux puisque $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre intègre de dimension finie.

L'hypothèse d'intégrité est également nécessaire : pour chaque naturel $N \geq 2$, l'espace $\mathbb{K}^N$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension finie non intègre (donc non isomorphe à $\mathbb{K}$).

Enfin, l'espace $\mathbb{K}[X]$ est une $\mathbb{K}$-algèbre intègre qui n'est pas de dimension finie (donc non isomorphe à $\mathbb{K}$), d'où la nécessité de l'hypothèse « $\mathcal{A}$ de dimension finie ».

3.2.2 Diagonalisation

Proposition

Chaque endomorphisme de E est diagonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé (ou vaut 1) et si les ordres algébrique et géométrique de chacune de ses valeurs propres sont égaux.

Plus précisément, on a les équivalences[128] *:*

$$f \text{ diagonalisable} \iff \chi_f = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} (X-\lambda)^{\dim E_\lambda} \iff \left\{ \begin{array}{l} \chi_f \text{ est scindé (ou vaut } 1) \\ \forall \lambda \in \operatorname{Sp} f,\ \omega_\lambda = \dim E_\lambda \end{array} \right. .$$

Démonstration

Montrons la première équivalence. Nous avons établi pour chaque valeur propre λ les divisibilités $(X-\lambda)^{\dim E_\lambda} \mid \chi_f$: ces diviseurs étant deux à deux premiers entre eux, leur produit divise donc (par Gauss) le multiple χ_f. Or ce produit est unitaire comme χ_f, d'où les équivalences

$$\begin{aligned} \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} (X-\lambda)^{\dim E_\lambda} = \chi_f &\iff \deg \left(\prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} (X-\lambda)^{\dim E_\lambda} \right) = \deg \chi_f \\ &\iff \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} \dim E_\lambda = n \iff f \text{ diagonalisable.} \end{aligned}$$

Montrons la deuxième équivalence. Puisque les racines de χ_f forment $\operatorname{Sp} f$, le rappel préliminaire sur la décomposition des polynômes unitaires nous donne l'équivalence

$$\chi_f = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} (X-\lambda)^{\omega_\lambda} \iff \chi_f \text{ est scindé (ou vaut 1),}$$

d'où l'implication

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_f \text{ est scindé (ou vaut } 1) \\ \forall \lambda \in \operatorname{Sp} f,\ \omega_\lambda = \dim E_\lambda \end{array} \right. \implies \chi_f = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} (X-\lambda)^{\dim E_\lambda} .$$

Réciproquement, une telle décomposition de χ_f montre son caractère scindé (ou bien l'égalité $\chi_f = 1$) ainsi que les égalités annoncées[129] concernant les ordres.

Remarques

[128] Cette proposition précise (avec l'hypothèse sur χ_f) la conjonction des cas d'égalité du corollaire précédent.

[129] Utiliser la caractérisation *arithmétique* de l'ordre d'une racine α d'un polynôme P, à savoir le plus grand naturel N tel que $(X-\alpha)^N$ divise P.

- Un corollaire très utile est l'équivalence

$$\left\{\begin{array}{l} f \text{ diagonalisable} \\ \operatorname{Card}\operatorname{Sp} f = n \end{array}\right. \Longleftrightarrow \chi_f \text{ simplement scindé (ou vaut 1).}$$

En effet, le polynôme χ_f étant de degré n, il est simplement scindé (ou vaut 1) ssi il possède n racines, *i. e.* ssi $\operatorname{Sp} f$ possède n éléments et nous avons déjà vu que, sous cette hypothèse, f est diagonalisable et chacun de ses sous-espaces propres est une droite.

- À elles seules, les égalités $\omega_\lambda = \dim E_\lambda$ ne suffisent pas à montrer la diagonalisabilité : il suffirait pour obtenir un contre-exemple que le spectre soit vide (en dimension non nulle), ce qui est le cas de la matrice $\begin{pmatrix} {\scriptscriptstyle 0} & -1 \\ 1 & {\scriptscriptstyle 0} \end{pmatrix}$ compagne du polynôme $X^2 + 1$ sans racine réelle. Par conséquent,

l'hypothèse « χ_f scindé » est indispensable !

- Pour étudier la diagonalisabilité de f, on regarde *d'abord* si son polynôme caractéristique est scindé, puis on compare ensuite les ordres algébriques et géométriques de chaque valeur propre[130]. En pratique, les ordres algébriques se lisent dans une factorisation de χ_f et les ordres géométriques se calculent matriciellement par

$$\dim E_\lambda = n - \operatorname{rg}(f - \lambda \operatorname{Id}) \text{ pour chaque scalaire } \lambda.$$

- Remplacer f par $A\cdot$ dans la proposition précédente livre son homologue matriciel[131] :

$$A \text{ diagonalisable} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \chi_A \text{ est scindé (ou vaut 1)} \\ \forall \lambda \in \operatorname{Sp} A,\ \operatorname{rg}(A - \lambda I_n) + \omega_\lambda = n \end{array}\right. .$$

- La précision « *ou vaut* 1 » est là uniquement pour tenir compte du cas pathologique où[132] $E = \{0\}$: le polynôme $\chi_f = 1$ n'est alors pas scindé tandis que f est diagonalisable (son unique matrice étant diagonale). Sans cette précision, une implication de la proposition serait donc fausse.

Exemples

1. Imposons $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique vaut alors[133]

$$\begin{aligned}
\chi_A &= \begin{vmatrix} X+3 & 1 & -1 \\ 4 & X & -1 \\ 4 & 1 & X-2 \end{vmatrix} \\
&= \underbrace{(X+3)\,X\,(X-2) - 4 - 4}_{\text{trois diagonales } \diagdown \text{ (avec un signe +)}} \quad \underbrace{+4X + (X+3) - 4\,(X-2)}_{\text{trois anti-diagonales } \diagup \text{ (avec un signe } -)} \\
&= X^3 + X^2 - 5X + 3 \stackrel{?}{=} (X-1)^2\,(X+3).
\end{aligned}$$

[130] On cherche en fin de compte à vérifier l'égalité $\chi_f = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} (X - \lambda)^{\dim E_\lambda}$.

[131] *Culture* : le complémentaire du rang à la dimension s'appelle le ***corang***. L'égalité attendue s'écrit ainsi $\dim E_\lambda = \operatorname{corg}(A - \lambda I_n)$.

[132] On oubliera par conséquent cette parenthèse en dimension non nulle.

[133] On développe ici le déterminant en regroupant ses six monômes selon la règle de SARRUS.

Pour trouver la factorisation $\overset{?}{=}$ ci-dessus, remarquer que 1 est racine évidente de χ_A (la somme de ses coefficients est nulle), donc le reste de la division euclidienne de χ_A par $X-1$ (division à effectuer!) est nul, ce qui ramène la factorisation[134] de χ_A à celle du quotient $\frac{\chi_A}{X-1} = X^2+2X-3$.

Les racines n'étant pas toutes simples, A sera diagonalisable ssi le sous-espace propre E_1 est de dimension 2. Or les équivalences (à $(a,b,c) \in K^2$ fixé)

$$(a,b,c) \in E_1(A) \iff \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \iff c = 4a+b$$

montrent que l'espace $E_1(A)$ est le noyau de la forme linéaire $(a,b,c) \mapsto c-b-4a$, lequel noyau est un hyperplan[135] de K^3, donc est de dimension 2. On peut en conclure à la diagonalisabilité de A, laquelle est par conséquent semblable à $\operatorname{Diag}(1,1,-3)$.

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. La matrice de réflexion $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $X^2-1 = (X-1)(X+1)$ qui se scinde simplement, donc est diagonalisable à spectre $\{-1,1\}$. Lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$, on retrouve la matrice de "transposition" $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Sanity check : chacune de ces matrices est une symétrie vectorielle autre que 0 ou I_2, donc est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. La matrice de rotation $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $X^2 - 2\cos\theta X + 1 = \left(X - e^{i\theta}\right)\left(X - e^{-i\theta}\right)$ qui se scinde simplement sur $\mathbb{C}$, donc est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ à spectre $\left\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\right\}$. Toutefois, ce polynôme n'a pas de racine réelle[136], donc notre rotation n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

4. Imposons $n \geq 3$. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $X^n - 1$ (*cf.* exemple 6 section 3.1) qui n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ (car $n \geq 3$: dans ce cas, cette matrice n'est pas diagonalisable) mais qui se scinde simplement sur $\mathbb{C}$ (dans ce cas cas cette matrice est diagonalisable avec n valeurs propres – plus précisément, son spectre est $\mathbb{U}_n$).

5. Soit $a \in \mathbb{C}^n$ et imposons[137] $A = \begin{pmatrix} 0 & & & & a_1 \\ a_2 & 0 & & & \\ & a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & \\ & & & a_n & 0 \end{pmatrix}$. Son polynôme

[134] Autre idée pour factoriser χ_A : la somme des coefficients des lignes vaut toujours -3, donc $(1,1,1)$ est vecteur propre de A avec -3 pour valeur propre associée, ce qui permet de factoriser χ_A par $X+3$

[135] La résolution explicite du système donnerait une base du plan $E_1(A)$, engendré par exemple par $(1,0,4)$ et $(0,1,1)$ (*sanity check* : vérifier que A les fixe).

[136] Le cas exclu $\theta \in \pi\mathbb{Z}$ correspond aux deux rotations scalaires (donc diagonalisables).

[137] Une case vide sous-entend un coefficient nul.

caractéristique vaut alors

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & & & & -a_1 \\ -a_2 & X & & & \\ & -a_3 & \diagdown & & \\ & & \ddots & X & \\ & & & -a_n & X \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{développer selon}}{\underset{\text{première ligne}}{=}} X \underbrace{\begin{vmatrix} X & & & \\ -a_3 & \diagdown & & \\ & \ddots & X & \\ & & -a_n & X \end{vmatrix}}_{n-1 \text{ symboles } X} + (-1)^n a_1 \begin{vmatrix} -a_2 & X & & \\ & -a_3 & \diagdown & \\ & & \ddots & X \\ & & & -a_n \end{vmatrix}$$

$$= X\ X^{n-1} + (-1)^n a_1\ (-a_2)\cdots(-a_n) = X^n - a_1 a_2 \cdots a_n.$$

Si chaque facteur a_i est non nul, ce polynôme se scinde alors simplement sur $\mathbb{C}$ (ou vaut 1 si $n = 0$) et la matrice concernée est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$. Sinon, on a $\chi_A = X^n$, donc χ_A est scindé (ou vaut 1) et $\operatorname{Sp} A$ se réduit à $\{0\}$; le critère de la proposition précédente s'écrit alors $\omega_0 + \operatorname{rg} A = n$, *i. e.* $\operatorname{rg} A = 0$, ou encore $a = 0$.

Conclusion : la matrice A est diagonalisable[138] (sur $\mathbb{C}$) ssi les a_i sont chacun nuls ou chacun non nuls.

Exercices d'application

a. *On dit que f est* ***semi-simple*** *si chaque sous-espace vectoriel stable par f admet un supplémentaire stable par f. Montrer que f est diagonalisable ssi il est semi-simple et si χ_f est scindé (ou vaut 1).*

b. *Montrer que la multiplication à gauche par A est un endomorphisme diagonalisable de $L(M_n(K))$ ssi A est diagonalisable.*

c. *Soient a, b, λ, μ des scalaires tels que $\lambda \neq \mu$. Montrer que la matrice*

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & a \\ 0 & \mu & b \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \textit{ est diagonalisable ssi } a = 0.$$

—

a. $\boxed{\Longrightarrow}$ Puisque f est diagonalisable, son polynôme caractéristique est scindé (ou vaut 1). L'exercice d'application 1 section 2.3.1 montrait par ailleurs que chaque sous-espace vectoriel de E (non nécessairement stable par f) admettait un supplémentaire stable par f.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit S un supplémentaire de $\bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} E_\lambda$ stable par f. L'induit $f_{|S}$ a alors un polynôme caractéristique divisant χ_f, lequel est scindé ou vaut 1, donc

[138] *Culture (hors programme)* : lorsque $a = 1$, on retrouve la matrice cyclique ${}^tC$ associée à la permutation cyclique $(1\ 2\ ...\ n)$. En décomposant chaque permutation en cycles à supports disjoints, on en déduirait que chaque matrice de permutation est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$

$\chi_{f_{|S}}$ ou bien possède une racine ou bien vaut 1. Dans le premier cas, l'induit $f_{|S}$ admet une valeur propre, *i. e.* f admet un vecteur propre dans S, ce qui est absurde puisque S et $\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}\, f} E_\lambda = E$ sont en somme directe. Nous sommes donc dans le second cas $\chi_{f_{|S}} = 1$, d'où la nullité de S et l'égalité $\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}\, f} E_\lambda = E$, ce qui conclut.

REMARQUE – **Culture hors programme**. La semi-simplicité se décrit aisément en terme de polynôme minimaux : f est semi-simple ssi μ_f est *quadratfrei*[139] (*i. e.* sans facteur carré dans sa décomposition en irréductibles).

b. Notons $\gamma := M \mapsto AM$ l'endomorphisme considéré et soit $\lambda \in K$.
Vu à $M \in M_n(K)$ fixé les équivalences

$$\begin{aligned} M \in E_\lambda(\gamma) &\iff AM = \lambda M \iff (A - \lambda I_n) M = 0 \\ &\iff \operatorname{Im} M \subset \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) \iff M \in L(K^n, E_\lambda(A)), \end{aligned}$$

l'espace $E_\lambda(\gamma)$ s'identifie à $L(K^n, E_\lambda(A))$ et est donc de dimension

$$\dim E_\lambda(\gamma) = \dim K^n \dim E_\lambda(A) = n \dim E_\lambda(A).$$

Par ailleurs, l'exercice d'application 1 section 3.1 avait calculé

$$\chi_\gamma = \chi_A^n, \text{ d'où } \operatorname{Sp}\gamma = \operatorname{Sp} A \text{ et } \omega_\lambda(\gamma) = n\omega_\lambda(A).$$

On en déduit d'une part l'équivalence[140]

$$\chi_\gamma \text{ scindé (ou vaut 1)} \iff \chi_A \text{ scindé (ou vaut 1)},$$

d'autre part les équivalences

$$\omega_\lambda(\gamma) = \dim E_\lambda(\gamma) \iff n\omega_\lambda(A) = n \dim E_\lambda(A) \iff \omega_\lambda(A) = \dim E_\lambda(A).$$

On peut alors conclure :

$$\gamma \text{ diagonalisable} \iff \left\{ \begin{array}{l} \chi_\gamma \text{ est scindé (ou vaut 1)} \\ \forall\lambda \in \operatorname{Sp}\gamma,\ \omega_\lambda = \dim E_\lambda(\gamma) \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \chi_A \text{ est scindé (ou vaut 1)} \\ \forall\lambda \in \operatorname{Sp} A,\ \omega_\lambda = \dim E_\lambda(A) \end{array} \right. \iff A \text{ diagonalisable.}$$

REMARQUE – En utilisant des transposées, le même raisonnement conduirait au même résultat en remplaçant la multiplication à gauche par A par celle à *droite* par A. Une solution plus expéditive sera vu à la section **??**.

c. Le polynôme caractéristique vaut

$$\chi \begin{pmatrix} \lambda & 0 & a \\ 0 & \mu & b \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = (X - \lambda)^2 (X - \mu), \text{ donc est scindé.}$$

[139] *quadrat* = carré, *frei* = libre, littéralement *libre de carrés*.

[140] On utilise le résultat suivant : chaque polynôme est scindé (ou vaut 1) ssi chacune de ses puissances est scindée (ou vaut 1).

Regardons les dimensions des sous-espaces propres. On a les égalités

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 & a \\ 0 & \mu & b \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \mu I_3\right) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \lambda-\mu & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & \lambda-\mu \end{pmatrix} \\
&\overset{\lambda-\mu\neq 0}{=} 1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & \lambda-\mu \end{pmatrix} \overset{\lambda-\mu\neq 0}{=} 2,
\end{aligned}$$

donc la condition $\dim E_\mu = \omega_\mu$ est vérifiée. On a par ailleurs les égalités

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 & a \\ 0 & \mu & b \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \lambda I_3\right) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & \mu-\lambda & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
= \quad &\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & b \\ \mu-\lambda & c \end{pmatrix} \overset{\lambda-\mu\neq 0}{=} 1 + \operatorname{rg}(c),
\end{aligned}$$

donc la condition $\dim E_\lambda = \omega_\lambda$ équivaut à la nullité de $\operatorname{rg} c$, *i. e.* à la nullité de c.

Remarque – Il sera aisé (et purement technique) de généraliser : chaque matrice (triangulaire par 2×2 blocs de blocs) de la forme

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}
\lambda_1 I_{a_1} & 0 & - & 0 & B_{1,1} & B_{1,2} & \dots & B_{1,m} \\
 & \lambda_2 I_{a_2} & \diagdown & | & B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,m} \\
 & & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & \lambda_\ell I_{a_\ell} & B_{\ell,1} & B_{\ell,2} & \dots & B_{\ell,m} \\ \hline
 & & & & \mu_1 I_{b_1} & 0 & - & 0 \\
 & & & & & \mu_2 I_{b_2} & \diagdown & | \\
 & & & & & & \ddots & 0 \\
 & & & & & & & \mu_m I_{b_m}
\end{array}\right)$$

$$\text{est diagonalisable ssi } \begin{matrix} \forall i \in [\![1,\ell]\!] \\ \forall j \in [\![1,m]\!] \end{matrix}, \ \lambda_i = \mu_j \Longrightarrow B_{i,j} = 0.$$

La diagonalisabilité de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (déjà rencontrée) montre que ce résultat devient faux à partir d'un découpage en 3×3 blocs (de blocs).

3.2.3 Trigonalisation

À des fins d'unification, de même que la lettre $\mathbb{K}$ dénote souvent le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$, dans cette section

la lettre a dénotera l'endomorphisme f ou la matrice A.

Il fera donc sens de parler des éléments propres de a (valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres) ainsi que de ses spectre, polynôme caractéristique et multiplicités (resp. $\operatorname{Sp} a$, χ_a et $\omega_\lambda(a)$).

Proposition

a est trigonalisable ssi χ_a est scindé (ou vaut 1).

Démonstration

Les sens directs ont déjà fait l'objet d'une remarque préliminaire. Nous allons montrons le sens réciproque de la version matricielle par récurrence sur n, en laissant de côté[141] la parenthèse « *(ou vaut)* 1 ». En évoquant une base $\mathcal{B}$ de E et en imposant $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f$, on obtiendra alors le sens réciproque de la version avec f.

Pour chaque naturel d, on note $\mathcal{T}_d$ l'énoncé ($\mathcal{T}$ comme « **t**rigonalisation »)

$$\forall M \in M_d(K),\ \chi_M \text{ scindé} \Longrightarrow M \text{ trigonalisable.}$$

Montrons $\forall d \in \mathbb{N},\ \mathcal{T}_d$ par récurrence.

L'unique matrice (vide) de $M_0(K)$ étant trigonalisable, l'énoncé $\mathcal{T}_0$ se réduit à une implication tautologique dont le conséquent est valide[142], d'où $\mathcal{T}_0$.

Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{T}_d$. Soit $M \in M_{d+1}(K)$ tel que χ_M est scindé. On peut alors évoquer une racine de χ_M, *i. e.* une valeur propre λ de M, puis un vecteur propre $V \in K^{d+1}$ associé à λ, vecteur non nul que l'on peut compléter en une base $\mathcal{B}$ de E. La matrice $M = \operatorname{Mat}_{b.\ c.}(M\cdot)$ est alors semblable à

$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}}(M\cdot) = \begin{pmatrix} \lambda & ? \\ {\scriptscriptstyle 0} & B \end{pmatrix} \text{ pour un certain bloc } B \in M_d(K).$$

Prendre le polynôme caractéristique donne alors

$$\chi_M = \chi_{M\cdot} = \chi\left(\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} M\cdot\right) = \chi\begin{pmatrix} \lambda & ? \\ {\scriptscriptstyle 0} & B \end{pmatrix} = \chi_{(\lambda)}\chi_B = (X-\lambda)\,\chi_B.$$

Le polynôme χ_M étant scindé, il en est de même pour χ_B, donc B est trigonalisable (d'après $\mathcal{T}_d$), mettons $B = PTP^{-1}$ pour une certaine matrice T triangulaire et pour un certain $P \in GL_d(K)$, d'où il résulte

$$\begin{pmatrix} \lambda & ? \\ {\scriptscriptstyle 0} & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & ? \\ {\scriptscriptstyle 0} & PTP^{-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & {\scriptscriptstyle 0} \\ {\scriptscriptstyle 0} & P \end{pmatrix}}_{\text{abrégée } Q}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & ? \\ {\scriptscriptstyle 0} & T \end{pmatrix}}_{\text{triangulaire}}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & {\scriptscriptstyle 0} \\ {\scriptscriptstyle 0} & P^{-1} \end{pmatrix}}_{\text{inverse}^{143} \text{ de } Q}.$$

Finalement, M est semblable à la matrice triangulaire $\begin{pmatrix} \lambda & ? \\ {\scriptscriptstyle 0} & T \end{pmatrix}$, ce qui conclut à $\mathcal{T}_{d+1}$.

Remarques

- Chaque polynôme complexe étant scindé (ou constant), on obtient le très utile corollaire :

$$a \text{ est toujours trigonalisable dans } \mathbb{C}\,!$$

[141] Si $\chi_A = 1$, alors $n = 0$ et A est triangulaire, *a fortiori* trigonalisable.
[142] L'initialisation à $\mathcal{T}_1$ est aussi tautologique, chaque matrice étant scalaire, donc trigonalisable.

• Cette démonstration est la première dans ce cours où les matrices sont vraiment au service des endomorphismes dans une question de réduction.
• Les deux propositions précédentes sont cohérentes au vu des implications

$$a \text{ diagonalisable} \Longrightarrow \chi_a \text{ scindé (ou vaut 1)} \Longrightarrow a \text{ trigonalisable.}$$

• Lorsque A est diagonale par blocs, mettons $A = \operatorname{Diag}(A_1, A_2, ..., A_\ell)$, sa trigonalisabilité équivaut à ce que le polynôme $\chi_A = \chi_{A_1}\chi_{A_2}\cdots\chi_{A_\ell}$ soit scindé (ou vaille 1), *i. e.* à ce que chaque facteur χ_{A_i} soit scindé (ou vaille 1), *i. e.* à ce que chaque A_i soit trigonalisable[144].
• Encore une fois, la précision « *ou vaut* 1 » est là uniquement pour tenir compte du cas pathologique de la dimension nulle et on l'oubliera volontiers en dimension au moins 1.

Proposition

Quand a est trigonalisable, on a les identités

$$\operatorname{tr} a = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} a} \omega_\lambda \lambda \qquad \textit{et} \qquad \det a = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} a} \lambda^{\omega_\lambda}.$$

Démonstration[145]

Supposons f trigonalisable et soit $\mathcal{B}$ une base de E où f a une matrice de la forme

$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} d_1 & ? & \cdots & ? \\ & d_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & ? \\ & & & d_n \end{pmatrix}.$$

Prendre le polynôme caractéristique donne alors

$$\chi_f = \chi\left(\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} f\right) = \chi\begin{pmatrix} d_1 & ? & \cdots & ? \\ & d_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & ? \\ & & & d_n \end{pmatrix} = (X - d_1)(X - d_2)\cdots(X - d_n).$$

Dans une telle factorisation de χ_f, les relations de Viète donnent les coefficients sous-dominant et constant de χ_f, à savoir

$$-d_1 - d_2 - \cdots - d_n \text{ et } (-1)^n d_1 d_2 \cdots d_n.$$

Or ces deux coefficients valent par ailleurs respectivement $-\operatorname{tr} f$ et $(-1)^n \det f$, ce qui conclut.

Remarques

[144] Fait déjà annoncé section 2.3.2 mais alors démontré seulement en partie.
[145] Le cas matriciel s'obtient en remplaçant f par $A\cdot$.

- **Gare aux multiplicités** ! En français, la proposition précédente affirme que

  la somme (resp. le produit) des valeurs propres comptées
  avec multiplicité vaut la trace (resp. le déterminant).

Elle sert très souvent pour déterminer une "dernière" valeur propre inconnue, ce qui suppose de NE PAS OUBLIER LES MULTIPLICITÉS !

- **Nécessité des hypothèses**. L'hypothèse de trigonalisabilité est indispensable : la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est la compagne du polynôme $X^2 + X + 1$ qui n'a pas de racine réelle, donc la somme de ses valeurs propres réelles est nulle (la somme vide), tandis que sa trace vaut -1. De même, la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas de valeur propre réelle (son polynôme caractéristique vaut $X^2 + 2$), donc le produit de ses valeurs propres réelles vaut 1 (le produit vide), tandis que son déterminant vaut -1.

Exemples

1. On impose $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 21 & -4 & -14 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ (complexe) et l'on admet $3 \in \operatorname{Sp} A$. Alors la matrice
$$A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 4 \\ 21 & -7 & -14 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ est de rang}^{146} \ 1, \text{ d'où } \omega_3 \geq 2.$$
En notant λ la "dernière" valeur propre complexe de A, *i. e.* l'unique complexe tel que $\chi_A = (X - \lambda)(X - 3)^2$, on a alors les égalités
$$-2 = \operatorname{tr} A = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}} A} \omega_\lambda \lambda = 2 \cdot 3 + 1 \cdot \lambda = 6 + \lambda, \text{ d'où } \lambda = -8.$$

2. Imposons $n \geq 2$, soit $c \in \mathbb{C}^n$ et imposons $A = \begin{pmatrix} 0 & - & 0 & c_1 \\ | & \diagdown & | & \vdots \\ 0 & - & 0 & c_{n-1} \\ c_1 & \cdots & c_{n-1} & c_n \end{pmatrix}$.
Les $n-1$ premières colonnes de A formant une famille liée, la matrice A est de rang au plus 2, donc 0 en est valeur propre d'ordre au moins $n-2$. Soient λ et μ "deux dernières" valeurs propres complexes[147] de A. On a alors les égalités[148]
$$\begin{cases} \operatorname{tr} A = \lambda + \mu + 0 + 0 + \cdots + 0 \\ \operatorname{tr} A^2 = \lambda^2 + \mu^2 + 0^2 + 0^2 + \cdots + 0^2 \end{cases}, \ i. \ e. \ \begin{cases} c_n = \lambda + \mu \\ \sum_{i=1}^n c_i^2 = \lambda^2 + \mu^2 \end{cases}.$$
On en déduit le produit $\lambda\mu = \frac{(\lambda+\mu)^2 - \lambda^2 - \mu^2}{2} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} c_i^2$, ce qui montre que λ et μ sont les racines du trinôme
$$X^2 - c_n X - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} c_i^2.$$

[147] Comprendre : évoquons λ et μ dans $\mathbb{C}$ tels que $\chi_A = X^{n-2}(X - \lambda)(X - \mu)$.

[148] *Rappel* : étant données deux matrices $M, N \in M_n(K)$, on a l'égalité $\operatorname{tr} MN = \sum_{i,j \in [1,n]]} [M]_{i,j} [N]_{j,i}$.

On pourrait alors expliciter ces racines en fonction des c_i (et plus généralement en fonction de $\operatorname{tr} A$ et $\operatorname{tr} A^2$).

Remarque – **(fondamentale)**. En pratique, si l'on dispose d'une matrice de f triangulaire[149], on y lit directement les égalités suivantes entre trace, spectre et déterminant :

$$\boxed{\exists \mathcal{B},\ \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} d_1 & ? & \cdots & ? \\ & d_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & ? \\ & & & d_n \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi_f = (X-d_1)(X-d_2)\cdots(X-d_n) \\ \operatorname{tr} f = d_1 + d_2 + \cdots + d_n \\ \operatorname{Sp} f = \{d_1, d_2, ..., d_n\} \\ \det f = d_1 d_2 \cdots d_n \end{array} \right.}.$$

Sanity check (technique formelle) : pour retrouver, à partir des relations ci-dessus, les identités de la proposition avec les multiplicités ω_λ, on va regrouper les racines d_i selon leur valeur commune dans $\operatorname{Sp} f$, l'intuition de base étant que le nombre de racines d_i valant une valeur propre λ fixée vaut ω_λ.

Formellement, on partitionne le domaine de sommation (resp. multiplication) en

$$[1,n|] = \coprod_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} \{i \in [1,n|] \ ; \ d_i = \lambda\}$$

et nous allons montrer pour chaque valeur propre λ les égalités

$$\omega_\lambda = \operatorname{Card}\{i \in [1,n|] \ ; \ d_i = \lambda\} =: c_\lambda.$$

Pour la somme $d_1 + d_2 + \cdots + d_n$, on obtient (en détaillant)

$$\sum_{j\in[1,n|]} d_j = \sum_{\lambda\in \operatorname{Sp} f} \sum_{d_i=\lambda}^{i\in[1,n|]} d_i = \sum_{\lambda\in \operatorname{Sp} f} \sum_{d_i=\lambda}^{i\in[1,n|]} \lambda = \sum_{\lambda\in \operatorname{Sp} f} \lambda \sum_{d_i=\lambda}^{i\in[1,n|]} 1 = \sum_{\lambda\in \operatorname{Sp} f} \lambda c_\lambda.$$

Pour le produit $d_1 d_2 \cdots d_n$, le même partitionnement conduirait à l'égalité

$$d_1 d_2 \cdots d_n = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} \lambda^{c_\lambda}$$

et toujours le même partitionnement pour le produit $(X-d_1)(X-d_2)\cdots(X-d_n)$ donnerait

$$\chi_f = (X-d_1)(X-d_2)\cdots(X-d_n) = \prod_{\lambda\in \operatorname{Sp} f} (X-\lambda)^{c_\lambda}.$$

Dans les dernières égalités, on lit l'ordre de chaque λ comme racine de χ_f, d'où les égalités $\omega_\lambda = c_\lambda$ annoncées. Réinjecter ensuite ces dernières dans les expressions obtenues pour $d_1 d_2 \cdots d_n$ et $d_1 + d_2 + \cdots + d_n$ conclut notre sanity check.

Mise en garde : il serait tentant d'écrire en général

« *Soient* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *les valeurs propres de* a » (à ne pas jamais écrire !).

Les dangers d'une telle formulation sont multiples :

[149] Dans une telle description, plusieurs termes diagonaux d_i peuvent bien sûr être égaux.

1. *Confondre évocation et définition* : l'écriture ci-dessus vise certainement à "lister" les éléments de $\operatorname{Sp} a$, ce qui peut se faire en *évoquant* une bijection $\Lambda : [1,n|] \xrightarrow{\sim} \operatorname{Sp} a$ puis en *définissant* $\lambda_i := \Lambda(i)$ pour chaque $i \in [1,n|]$. À ce titre, il faudrait plutôt écrire

   « *Appelons* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *les valeurs propres de* a. »

   Au niveau du sens, on évoque *un* ou *des* éléments dans un ensemble, on n'évoque jamais *les* éléments de cet ensemble[150].
2. *Croire*[151] *que* $\operatorname{Sp} a$ *est de cardinal* n : comment légitimer autrement l'évocation d'une bijection Λ comme ci-dessus ? À ce titre, il faudrait plutôt écrire

   « *Appelons* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ *les valeurs propres de* a
   où l'on a abrégé $s := \operatorname{Card} \operatorname{Sp} a$. »
3. *Croire que* $\operatorname{Sp} a$ *est égal à la famille* $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s)$: chaque permutation des λ_i fournirait une famille tout aussi valide, il n'y a donc pas unicité (à moins que le spectre soit constant). En d'autres termes, le groupe symétrique $\mathfrak{S}_s$ peut modifier la bijection Λ évoquée ci-dessus.
4. *Croire que* $\operatorname{Sp} a$ *est égal à la* FAMILLE $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s)$: cette dernière voit l'ordre, la répétition, a une longueur et se note entre parenthèses tandis que l'ENSEMBLE $\operatorname{Sp} a$ ne possède ni ordre ni répétition, a un cardinal et se note entre accolades.

Toutes ces confusions sont les mêmes apparaissant avec les racines de polynômes (c'est normal, les valeurs propres de a étant les racines du polynôme χ_a). De fait, étant donné un polynôme P scindé de degré n, on écrivait souvent

« *Notons* $d_1, d_2, ..., d_n$ *les racines de* P *comptées avec multiplicité* »

pour signifier

$$\text{« \textit{Soit} } d \in K^n \text{ \textit{tel que} } P = \prod_{i=1}^{n} (X - d_i) \text{ ».}$$

La lectrice et le lecteur pourront passer par un tel détour

« *Notons* $d_1, d_2, ..., d_n$ *les valeurs propres de* a *(listées avec multiplicité)* »

afin d'exprimer leur intention

$$\text{« \textit{Soit} } d \in K^n \text{ \textit{tel que} } \chi_a = \prod_{i=1}^{n} (X - d_i) \text{ ».}$$

La morale de cette histoire est le garde-fou suivant :

> *si l'on veut "manipuler" des spectres, il est plus prudent de "manipuler" les polynômes caractéristiques correspondants.*

[150] À quoi bon vu qu'*ils sont* avant que nous ordonnions qu'ils soient ?

[151] Croyance devant disparaître face aux matrices $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ possédant resp. une et aucune valeur propre réelle.

Exemple : soit $N \in \mathbb{N}$ et imposons $K \subset \mathbb{C}$. Montrons que *les valeurs propres complexes de A^N (listées avec multiplicité) s'obtiennent à partir de celles de A élevées chacune à la puissance N.*

La lectrice et le lecteur doivent pouvoir, derrière les abus de langages, déceler le sens de cet énoncé :

$$\textit{on peut évoquer un } d \in \mathbb{C}^n \textit{ tel que } \chi_A = \prod_{i=1}^{n} (X - d_i)$$
$$\textit{et, pour un tel } d\textit{, on a l'égalité } \chi_{A^N} = \prod_{i=1}^{n} \left(X - d_i^N\right).$$

Montrons cela. Le polynôme χ_A se scindant dans $\mathbb{C}$ (ou valant 1), la matrice A est trigonalisable, donc semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} d_1 & ? & \cdots & ? \\ & d_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & ? \\ & & & d_n \end{pmatrix}, \text{ donc } A^N \text{ est semblable à } \begin{pmatrix} d_1 & ? & \cdots & ? \\ & d_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & ? \\ & & & d_n \end{pmatrix}^N$$

$$\text{qui est de la forme } \begin{pmatrix} d_1^N & ¿ & \cdots & ¿ \\ & d_2^N & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & ¿ \\ & & & d_n^N \end{pmatrix}, \text{ d'où}^{152}\ \chi_{A^N} = \prod_{i=1}^{N} \left(X - d_i^N\right).$$

En raisonnant comme dans notre dernier *sanity check* (regrouper les d_i selon leur valeur dans $\operatorname{Sp} A$), on déduirait de cet exemple une description simple :

1. du spectre complexe d'une puissance[153] :

$$\operatorname*{Sp}_{\mathbb{C}} a^N = \left\{ \lambda^N \ ; \ \lambda \in \operatorname*{Sp}_{\mathbb{C}} a \right\}$$

2. de la trace d'une puissance :

$$\operatorname{tr} a^N = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}} a} \omega_\lambda \lambda^N$$ (dans la sommande de droite, on parle de l'ordre ω_λ pour le polynôme *complexe* χ_a)

Sanity check : le même travail avec le déterminant donnerait

$$\det a^N = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}} a} \left(\lambda^N\right)^{\omega_\lambda} = \left(\prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}} a} \lambda^{\omega_\lambda} \right)^N = (\det a)^N, \text{ ce qui est cohérent.}$$

[153] Cette description est fausse en général si l'on reste dans $\mathbb{R}$: la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a un spectre réel vide mais son carré $-I_2$ a pour spectre $\{-1\}$.

Application. On impose que a admette une valeur propre complexe telle que chaque autre valeur propre complexe de a lui est en module strictement inférieure. En notant μ une telle valeur prore et ω son ordre, montrons alors l'équivalence (de suites) :

$$\operatorname{tr} a^N \underset{N\to\infty}{\sim} \omega\mu^N.$$

Abrégeons $\Lambda := \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}} a \setminus \{\mu\}$ et soit $N \in \mathbb{N}$.

Si $\mu = 0$, alors chaque élément de Λ est de module strictement négatif, ce qui est absurde, donc 0 est la seule valeur propre complexe[154] de a. La remarque précédente nous donne alors les égalités

$$\operatorname{tr} a^N = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}} a} \omega_\lambda \lambda^N = \omega_0 0^N = 0 \overset{\text{si } N\geq 1}{=} \omega\mu^N.$$

Supposons à présent μ non nul. La même remarque donne les égalités

$$\operatorname{tr} a^N = \omega\mu^N + \sum_{\lambda\in\Lambda} \omega_\lambda \lambda^N = \mu^N \left(\omega + \sum_{\lambda\in\Lambda} \omega_\lambda \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N\right).$$

Vu la comparaison stricte $\left|\frac{\lambda}{\mu}\right| < 1$ (donnée par l'hypothèse), chaque terme de la somme sur Λ tend vers 0, donc cette somme finie est un $o_{N\to\infty}(1)$, d'où l'égalité

$$\operatorname{tr} a^N = \mu^N (\omega + o(1)).$$

L'ordre ω étant par ailleurs non nul (car μ est valeur propre de f), la somme $\omega + o(1)$ est équivalente à ω, ce qui conclut.

Corollaire

On impose que a admette une valeur propre complexe non nulle telle que chaque autre valeur propre complexe de a lui est en module strictement inférieure. Alors la suite $\left(\frac{\operatorname{tr} a^{N+1}}{\operatorname{tr} a^N}\right)$ fait sens à partir d'un certain rang et tend vers cette valeur propre :

$$\left[\exists \mu \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}} a,\ \left(\forall \lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}} a,\ \lambda \neq \mu \Longrightarrow |\lambda| < |\mu|\right)\right] \Longrightarrow \frac{\operatorname{tr} a^{N+1}}{\operatorname{tr} a^N} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \text{l'unique tel } \mu.$$

Démonstration

Évoquons un tel μ. D'après l'application précédente, on peut écrire

$$\operatorname{tr} a^N = \mu^N (\omega + o(1)) \text{ où } \omega \text{ dénote l'ordre de } \mu.$$

La somme $\omega + o(1)$ est alors non nulle à partir d'un certain rang, donc $\operatorname{tr} a^N$ également, ce qui donne sens aux quotients $\frac{\operatorname{tr} a^{N+1}}{\operatorname{tr} a^N}$ pour N assez grand. On a alors l'équivalence

$$\frac{\operatorname{tr} a^{N+1}}{\operatorname{tr} a^N} \sim \frac{\mu^{N+1}\omega}{\mu^N\omega} = \mu, \text{ ce qui conclut.}$$

REMARQUES

[154] Nous verrons au chapitre ? ? ?réd2SectNilpoSynth que ce cas équivaut à la nilpotence de a.

• Le raisonnement ci-dessus ne dépendant pas du μ évoqué, on déduit de l'unicité de la limite de la suite $\left(\frac{\operatorname{tr} a^{N+1}}{\operatorname{tr} a^N}\right)$ l'unicité de la valeur propre μ évoquée. Plus directement : si $\mu' \neq \mu$ est une autre telle valeur propre, on devra avoir les comparaisons $\left\{\begin{array}{l} |\mu'| < |\mu| \text{ (par évocation de } \mu) \\ |\mu| < |\mu'| \text{ (par évocation de } \mu') \end{array}\right.$, ce qui est impossible.

• **Culture**. Le scalaire $\max_{\lambda \in \operatorname{Sp} a} |\lambda|$ s'appelle le ***rayon spectral*** de a, c'est le plus petit rayon d'un disque fermé incluant le spectre de a.

• Ce corollaire donne un algorithme pour approcher numériquement le rayon spectral sous réserve qu'il soit atteint en une *unique* valeur propre. L'étude de l'efficacité de cet algorithme est hors programme[155].

• L'*unicité* d'une valeur propre de module maximal est indispensable : si $A = \begin{pmatrix} 1 & {\scriptscriptstyle 0} \\ {\scriptscriptstyle 0} & -1 \end{pmatrix}$, la suite $\left(\operatorname{tr} A^N\right)$ vaut $(0, 2, 0, 2, 0, 2...)$ et le quotient $\left(\frac{\operatorname{tr} A^{N+1}}{\operatorname{tr} A^N}\right)$ ne fait jamais sens à partir d'un certain rang.

Donnons carrément un contre-exemple faisant sens (plus difficile). Imposons $A = \begin{pmatrix} 1 & {\scriptscriptstyle 0} \\ {\scriptscriptstyle 0} & e^i \end{pmatrix}$. On a alors pour chaque naturel N les égalités

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} A^N &= \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & {\scriptscriptstyle 0} \\ {\scriptscriptstyle 0} & e^i \end{pmatrix}^N\right) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 1^N & {\scriptscriptstyle 0} \\ {\scriptscriptstyle 0} & e^{iN} \end{pmatrix} = 1 + e^{iN} \\ &= \left(e^{-i\frac{N}{2}} + e^{i\frac{N}{2}}\right) e^{i\frac{N}{2}} = 2\cos\frac{N}{2} e^{i\frac{N}{2}}, \end{aligned}$$

donc la suite $\left(\operatorname{tr} A^N\right)$ ne s'annule jamais[156] et l'on peut toujours donner sens au quotient

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tr} A^{N+1}}{\operatorname{tr} A^N} &= \frac{2\cos\left(\frac{N+1}{2}\right) e^{i\frac{N+1}{2}}}{2\cos\left(\frac{N}{2}\right) e^{i\frac{N}{2}}} = \frac{\cos\left(\frac{N}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\cos\frac{N}{2}} e^{\frac{i}{2}} \\ &= \frac{\cos\frac{N}{2}\cos\frac{1}{2} - \sin\frac{N}{2}\sin\frac{1}{2}}{\cos\frac{N}{2}} e^{\frac{i}{2}} = \left(\cos\frac{1}{2} - \tan\frac{N}{2}\sin\frac{1}{2}\right) e^{\frac{i}{2}}. \end{aligned}$$

Supposons par l'absurde que la suite $\left(\frac{\operatorname{tr} A^{N+1}}{\operatorname{tr} A^N}\right)$ converge. Vu que $e^{\frac{i}{2}}\sin\frac{1}{2}$ est non nul, la suite $\left(\tan\frac{N}{2}\right)$ converge alors, donc sa sous-suite $\left(\tan\frac{2N}{2}\right)$ est bornée, donc l'image $\tan\mathbb{Z}$ est bornée (par imparité de tan). Or cette image vaut $\tan(\mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z})$ (par π-périodicité de tan) et le sous-groupe $\mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (par irrationalité[157] de π), donc son image par tan est dense dans $\operatorname{Im}\tan = \mathbb{R}$ (par continuité et surjectivité de tan), *a fortiori* non bornée, d'où la contradiction.

Exercices d'application

[155] Signalons simplement qu'il fonctionne "bien" pour les matrices strictement positives ou symétriques définies positives.

[156] L'argument $\frac{N}{2}$ du cosinus serait sinon multiple rationnel de π, ce qui contredirait l'irrationalité de π.

[157] Rappelons un exercice hors programme : pour chaque réel α, le groupe additif $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ssi α est irrationnel.

On impose $K = \mathbb{C}$.

1. *Montrer l'équivalence*[158]

$$\left[\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \operatorname{tr} a^N = 0\right] \Longleftrightarrow \operatorname{Sp} a \subset \{0\}.$$

2.

   (a) *Soit $g \in L(E)$ commutant avec f. Montrer alors qu'il y a une base de E trigonalisant f et g.*

   Remarque – On dit alors que f et g sont ***cotrigonalisables*** et qu'une telle base les ***cotrigonalise***.

   (b) *Même question en remplaçant l'hypothèse « $gf = fg$ » par « $gf = 0$ ».*

   (c) *Même question en remplaçant l'hypothèse « $gf = fg$ » par « g est vecteur propre de $u \mapsto fu - uf$ ». (On admettra qu'un tel g est nilpotent*[159] *si $fg \neq gf$.)*

---

1. Notons $S := \operatorname{Sp} a \setminus \{0\}$. L'inclusion $\operatorname{Sp} a \subset \{0\}$ équivaut alors à $S = \emptyset$; vu pour chaque valeur propre λ la minoration $\omega_\lambda \geq 1$, cette vacuité s'écrit aussi

$$\forall \lambda \in S,\ \omega_\lambda = 0.$$

De même, a étant trigonalisable, l'équivalent de gauche se réécrit

$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{\lambda \in S} \omega_\lambda \lambda^N = 0.$$

Sous cette forme, le sens $\boxed{\Longleftarrow}$ est immédiat (une somme de 0 est nulle). Montrons le sens $\boxed{\Longrightarrow}$.

Numérotons les éléments de S, mettons $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ où $s := \operatorname{Card} S$. Les égalités précédentes lorsque N parcourt $[1, s|]$ se réécrivent alors

$$\Lambda\Omega = 0 \text{ où } \Lambda := \left(\lambda_i^j\right)_{i,j \in [1,s|]} \text{ et } \Omega := \left(\omega_{\lambda_i}\right)_{i \in [1,s|]}.$$

La matrice Λ est "presque" de Vandermonde : en factorisant le premier élément de chaque colonne, on obtient

$$\det \Lambda = \left(\prod_{\lambda \in S} \lambda\right) \det V$$

où V est une matrice de Vandermonde inversible (car les λ_i sont distincts). Par conséquent, la matrice Λ est inversible et l'égalité $\Lambda\Omega = 0$ implique la nullité du vecteur Ω, d'où le sens $\boxed{\Longrightarrow}$.

Remarques

[158] En dimension non nulle, l'inclusion devient une égalité.

[159] Nilpotence prouvée à l'exercice d'application section 2.1.2.

- **Rappel**. Le déterminant d'une matrice de VANDERMONDE vaut

$$\det\left[\left(c_i^j\right)_{i,j\in[0,n|]}\right]=\prod_{i<j}^{i,j\in[0,n|]}(c_i-c_j)\,.$$

- **Généralisation**. La lectrice et le lecteur connaisseurs des relations de NEWTON pourront plus généralement montrer que la connaissance de χ_a équivaut à celle de la suite $\left(\operatorname{tr} a^N\right)$. En corollaire, l'égalité séquentielle $\left(\operatorname{tr} a^N\right)=(0)=\left(\operatorname{tr} 0^N\right)$ équivaudra à l'égalité polynomiale $\chi_a=\chi_0$, *i. e.* à $\chi_a=X^n$, ou encore (puisque χ_a est scindé ou vaut 1) à $\operatorname{Sp} a\subset\{0\}$.
- **Entiers et scalaires**. Les coordonnées du vecteur $(\omega_\lambda)_{\lambda\in S}$ sont des *scalaires* (itérés de l'unité complexe). Dans $\mathbb{C}$, les entiers s'identifient bien à des scalaires mais cela n'est plus vrai en général dans un autre corps. De fait, l'équivalence demandée tombe en défaut sur le corps $\{0,1\}$: la trace de chacune des puissance de la matrice $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ vaut $1+1=0$ mais le spectre de cette matrice vaut $\{1\}$. La "bonne" hypothèse serait donc « K est de caractéristique nulle ».

2.

(a) Le résultat étant trivial pour $n=0$ (la matrice vide est triangulaire), on imposera $n\geq 1$.

Montrons tout d'abord en lemme que f et g ont un vecteur propre en commun[160]. Soit $\lambda\in\operatorname{Sp} f$ (légitime car χ_f est degré $n\geq 1$ et est donc scindé). Puisque g commute avec f, il stabilise le sous-espace propre $E_\lambda(f)$. Vu que $\chi\left(g_{|E_\lambda(f)}\right)$ est de degré $\dim E_\lambda(f)\geq 1$, l'induit $g_{|E_\lambda(f)}$ admet une valeur propre, d'où un vecteur propre de g dans $E_\lambda(f)$. Or l'induit $f_{|E_\lambda(f)}$ est scalaire, donc chaque vecteur de $E_\lambda(f)$ est propre pour f.

Soit donc v un vecteur propre de f et de g. On complète la famille libre (v) en une base $\mathcal{B}$ de E. On peut alors écrire

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f=\begin{pmatrix}\lambda&?\\0&F\end{pmatrix}\text{ et }\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} g=\begin{pmatrix}\mu&?\\0&G\end{pmatrix}$$ pour certains scalaires λ et μ et certaines matrices F et G.

Le calcul par blocs montre alors que F et G commutent, ce qui permet d'amorcer une récurrence. Soit donc P une matrice cotrigonalisant F et G, mettons $\begin{cases}F=PTP^{-1}\\G=PUP^{-1}\end{cases}$ où T et U sont triangulaires supérieures. Le calcul par blocs montre alors, en notant $Q:=\begin{pmatrix}1&0\\0&P\end{pmatrix}$, que la matrice Q cotrigonalise $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f$ et $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} g$: on a par exemple alors les égalités

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f=\begin{pmatrix}\lambda&?\\0&PTP^{-1}\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&P\end{pmatrix}}_{=Q}\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda&?P\\0&T\end{pmatrix}}_{\text{triangulaire supérieure}}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&P^{-1}\end{pmatrix}}_{=Q^{-1}}.$$

Pour conclure la récurrence (dont nous laissons la formalisation à la lectrice et au lecteur), il s'agit de l'initialiser : quand $n=1$, les endomorphismes f

[160] *Micro analyse* : le premier vecteur d'une base de cotrigonalisation doit être propre pour f et pour g (le lire dans les réduites).

et g sont scalaires, donc diagonaux dans chaque base de E, *a fortiori* trigonalisables dans chaque base de E, donc cotrigonalisables.

Remarque – On peut également montrer directement (sans le lemme[161]) la généralisation suivante : *quand* $K = \mathbb{C}$*, les éléments de chaque partie commutative de* $L(E)$ *sont cotrigonalisables.*

(b) Supposons $gf = 0$. Tout ce qui précède (le cas trivial $n = 0$, l'initialisation quand $n = 1$, le "passage" de la récurrence) fonctionnera exactement de même à condition de disposer du lemme (lequel est une condition nécessaire comme signalé en note).

Imposons $n \geq 1$. Si $f = 0$, alors chaque vecteur propre de g (il en existe car χ_g est scindé) est dans le sous-espace propre $\operatorname{Ker} f$, ce qui conclut. Sinon, chaque vecteur propre de $f_{|\operatorname{Im} f}$ (il en existe car l'espace $\operatorname{Im} f$ est non nul) tombe dans le sous-espace propre $\operatorname{Ker} g$ (vu l'inclusion $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$ équivalente à l'hypothèse $gf = 0$), ce qui conclut.

(c) Soient $u \in L(E)$ non nul et $\lambda \in K$ tels que $uf = (f - \lambda \operatorname{Id})u$. Si $\lambda = 0$, alors $uf = fu$ et on est ramené à un cas précédent : on imposera donc $\lambda \neq 0$. Vu le facteur u tout à droite, l'image par uf de $\operatorname{Ker} u$ est nulle, donc f stabilise $\operatorname{Ker} u$. Puisque u est nilpotent (donné par l'énoncé), il n'est pas injectif (on a imposé $n > 0$ pour montrer le lemme), donc $\operatorname{Ker} u$ n'est pas nul, donc l'induit $f_{|\operatorname{Ker} u}$ admet un vecteur propre, lequel est propre pour u (car dans son noyau).

Remarque – Les exercices de cotrigonalisation reposent souvent sur une récurrence pédestre matricielle et sur le lemme (moins immédiat et plus sujet au contexte) exhibant un vecteur propre commun aux endomorphismes à cotrigonaliser. Insistons : ce lemme est une condition *nécessaire* de cotrigonalisation (lorsque $n > 0$).

Remarque – **Culture hors programme**. Si A et B sont cotrigonalisables, alors la matrice (dans une base de cotrigonalisation) de chaque polynôme (non commutatif) en A et B est triangulaire et même triangulaire *stricte* pour le polynôme $XY - YX$, donc le produit $p(A, B)[A, B]$ est nilpotent pour chaque polynôme p non commutatif. Cette condition nécessaire est en fait suffisante sur le corps $\mathbb{C}$ d'après un théorème[162] de Neal H. McCoy publié en 1934 dans les *Transactions of the American Mathematical Society*. Nous laissons la lectrice et le lecteur dériver à partir de ce théorème les trois cas particuliers ci-dessus.

---

[161] Indication : raisonner par récurrence sur $\dim E$ en considérant les induits sur les sous-espaces propres d'un élément non scalaire.

[162] Deux autres critères ont été publié en 2000 par Al'pin et Koreshkov dans les *Mathematical notes* de la Russian Academy of Sciences. Leur intérêt sur le théorème de McCoy est d'être implémentables et éclairés par les algèbres de Lie.

4 Le point des compétences

Formulaire

On évoque pour tout ce formulaire :

1. K un corps ;
2. E un K-espace vectoriel ;
3. n un naturel ;
4. f et g deux endomorphismes dans $L(E)$;
5. A et B deux matrices dans $M_n(K)$.

Afin d'unifier chaque proposition ou définition dépendant de f et de $L(E)$ avec son homologue matriciel traitant de A et de $M_n(K)$,

$$\text{nous abrégerons } \begin{pmatrix} \mathcal{A} \\ a \end{pmatrix} \text{ pour désigner } \begin{pmatrix} L(E) \\ f \end{pmatrix} \text{ ou bien } \begin{pmatrix} M_n(K) \\ A \end{pmatrix}.$$

1. Généralités

• On dit que A et B sont ***semblables*** si l'une est conjuguée de l'autre par une matrice inversible :

$$A \text{ semblable à } B \overset{\text{déf.}}{\iff} \exists P \in GL_n(K)\,,\ A = PBP^{-1}.$$

• La relation de similitude (« être semblable à ») est une relation d'équivalence sur $M_n(K)$.

• **Interprétation géométrique**. Lorsque E est de dimension finie n, les matrices A et B sont semblables ssi elles représentent un même endomorphisme de E :

$$A \text{ semblable à } B \underset{\dim E = n}{\overset{\text{quand}}{\iff}} \exists u \in L(E)\,,\ \begin{array}{l} \exists \mathcal{B} \text{ base de } E \\ \exists \mathcal{C} \text{ base de } E \end{array},\ \left\{ \begin{array}{l} A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u \\ B = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}} u \end{array} \right. .$$

• On appelle ***endomorphisme canoniquement associé*** à la matrice A la multiplication à gauche par A définie sur l'espace $M_{n,1}(K)$ des vecteurs colonnes à n lignes abusivement identifié à K^n :

$$\begin{array}{c} \textbf{\textit{endomorphisme canoniquement}} \\ \textbf{\textit{associé}} \text{ à la matrice } A \end{array} := \left\{ \begin{array}{ccc} K^n & \longrightarrow & K^n \\ V & \longmapsto & AV \end{array} \right. .$$

• Chaque matrice de $M_n(K)$ vaut la matrice de son endomorphisme canoniquement associé dans la base canonique de K^n :

$$\underset{\text{base canonique}}{\operatorname{Mat}} \left\{ \begin{array}{ccc} K^n & \longrightarrow & K^n \\ V & \longmapsto & AV \end{array} \right. = A.$$

Soit V un sous-espace vectoriel de E.

• Chaque endomorphisme de E induit par restriction à V un endomorphisme de V ssi ce dernier espace est stable par l'endomorphisme concerné :

$$f_{|V}^{|V} \in L(V) \iff f \text{ stabilise } V \iff f(V) \subset V.$$

• Imposons E de dimension finie, soit $\mathcal{B}$ une base de E obtenue en complétant une base de V. On voit $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f$ comme matrice 2×2 blocs en séparant les $\dim V$ premières rangées des autres. Alors V est stable par f ssi la matrice par blocs $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f$ est triangulaire supérieure :

$$\mathcal{B} \text{ adaptée à } V \Longrightarrow \left[f \text{ stabilise } V \iff \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f \text{ est la forme } \begin{pmatrix} M & R \\ {\scriptscriptstyle 0} & N \end{pmatrix} \right].$$

2. Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

• On appelle ***valeur propre*** de f tout scalaire λ tel que

$$\exists v \in E,\ v \neq 0 \text{ et } f(v) = \lambda v.$$

Un tel vecteur v est alors dit ***associé*** à la valeur propre λ (pour f).

• Lorsque E est de dimension finie, on appelle ***spectre*** de f l'ensemble de ses valeurs propres et on le note

$$(\text{si } \dim E < \infty) \qquad \operatorname{Sp} f := \{\lambda \in K \ ;\ \exists v \in E \backslash \{0\}\ ,\ f(v) = \lambda v\}.$$

Soit λ une valeur propre de f.

• On appelle ***sous-espace propre*** de f associé à λ le noyau

$$\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}) = \{v \in E \ ;\ f(v) = \lambda v\}.$$

• On appelle ***vecteur propre*** de f associé à λ tout vecteur NON NUL du sous-espace propre associé à λ :

$$v \text{ vecteur propre de } f \text{ associé à } \lambda \overset{\text{déf.}}{\iff} \left\{ \begin{array}{l} \boxed{v \neq 0} \\ f(v) = \lambda v \end{array} \right. .$$

• Chaque somme finie de sous-espaces propres est directe :

$$\forall \Lambda \subset K,\ \Lambda \text{ fini} \Longrightarrow \sum_{\lambda \in \Lambda} \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}).$$

• Chaque famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre :

$$\forall \Lambda \subset K,\ \forall (v_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}) \backslash \{0\}\ ,\ (v_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \text{ libre.}$$

• Lorsque E est de dimension finie, le spectre de chaque endomorphisme de E est fini de cardinal au plus la dimension de E :

$$E \text{ de dimension finie} \Longrightarrow \left[\operatorname{Sp} f \text{ fini et } \operatorname{Card} \operatorname{Sp} f \leq \dim E\right].$$

• Quand deux endomorphismes de E commutent, chacun stabilise chaque sous-espace propre de l'autre :

$$g \circ f = f \circ g \Longrightarrow \forall \lambda \in \operatorname{Sp} g,\ \operatorname{Ker}(g - \lambda \operatorname{Id}) \text{ stable par } f.$$

Cas matriciel

• On appelle ***valeur propre*** de A tout scalaire $\lambda \in K$ tel que

$$\exists V \in K^n,\ V \neq 0 \text{ et } AV = \lambda V.$$

Un tel vecteur v est alors dit ***associé*** à la valeur propre λ (pour A).
• On appelle ***spectre*** de A l'ensemble de ses valeurs propres et on le note

$$\operatorname{Sp} A := \{\lambda \in K \ ;\ \exists V \in K^n \setminus \{0\},\ AV = \lambda V\} =: \operatorname*{Sp}_K A.$$

• Deux matrices semblables ont même spectre :

$$A \text{ et } B \text{ semblables} \Longrightarrow \operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp} B.$$

• Soit L un corps dont K est un sous-corps. Alors le spectre de A est inclus dans celui de la matrice A vue dans $M_n(L)$:

$$K \text{ sous-corps de } L \Longrightarrow \operatorname*{Sp}_K A \subset \operatorname*{Sp}_L A.$$

Soit λ une valeur propre de A.
• On appelle ***sous-espace propre*** de A associé à λ le noyau

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) = \{V \in K^n \ ;\ AV = \lambda V\}.$$

• On appelle ***vecteur propre*** de A associé à λ tout vecteur NON NUL du sous-espace propre associé à λ :

$$V \text{ vecteur propre de } A \text{ associé à } \lambda \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{V \neq 0} \\ AV = \lambda V \end{array}\right. .$$

• On appelle ***équation aux éléments propres*** de A

$$\text{l'équation } AV = \lambda V \text{ d'inconnue } (\lambda, V) \in K \times K^n.$$

3. Polynôme caractéristique

On impose E de dimension finie n.

• On appelle ***polynôme caractéristique*** *de* A le polynôme

$$\chi_A := \det(XI_n - A) = \begin{vmatrix} X-a_{1,1} & -a_{1,2} & -a_{1,3} & \cdots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & X-a_{2,2} & -a_{2,3} & \cdots & -a_{2,n} \\ -a_{3,1} & -a_{3,2} & X-a_{3,3} & \cdots & -a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & -a_{n,3} & \cdots & X-a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

• Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique :

$$\forall P \in GL_n(K), \ \boxed{\chi_{PAP^{-1}} = \chi_A}.$$

• On appelle ***polynôme caractéristique*** de f la valeur commune de χ_M quand M décrit les matrices de f :

$$\forall \mathcal{B} \text{ base de } E, \ \chi_f := \chi\left(\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} f\right).$$

• Dans chaque polynôme caractéristique :

1. le coefficient dominant vaut 1,
2. le coefficient sous-dominant vaut l'opposé de la trace,
3. le coefficient constant vaut le déterminant multiplié par $(-1)^n$:

$$\boxed{\chi_a = X^n - (\operatorname{tr} a) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det a}.$$

• Les valeurs propres de a sont les racines de χ_a :

$$\operatorname{Sp} a = \{\lambda \in K \ ; \ \chi_a(\lambda) = 0\}.$$

• Pour chaque valeur propre λ de a, on appelle ***ordre de multiplicité*** de λ pour a son ordre de multiplicité en tant que racine de χ_a, noté

$$\begin{array}{c} \omega_\lambda(a) \\ \text{ou } m_\lambda(a) \end{array} := [\text{ordre de multiplicité de } \lambda \text{ pour } a] := \begin{array}{c} \text{ordre de multiplicité de } \lambda \\ \text{vue comme racine de } \chi_a \end{array}.$$

• Le polynôme caractéristique de chaque matrice triangulaire vaut, en notant $(d_1, d_2, ..., d_n)$ la famille de ses coefficients diagonaux, le produit des binômes $X - d_i$ lorsque i décrit $[1, n|]$:

$$\forall d \in K^n, \ \boxed{\chi\begin{pmatrix} d_1 & ? & \cdots & ? \\ & d_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & ? \\ & & & d_n \end{pmatrix} = (X - d_1)(X - d_2)\cdots(X - d_n)}.$$

• Le polynôme caractéristique de chaque endomorphisme induit divise celui de l'endomorphisme induisant :

$$\forall V \text{ sous-espace vectoriel de } E, \ f(V) \subset V \Longrightarrow \chi_{f_{|V}} \mid \chi_f.$$

• La dimension de chaque sous-espace propre de a est majorée par l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante :

$$\forall\lambda \in \operatorname{Sp} a,\ \dim E_\lambda(a) \leq \omega_\lambda(a).$$

4. Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables

On impose E de dimension finie n.

• On dit que f est ***diagonalisable*** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale :

$$f \text{ diagonalisable} \overset{\text{def.}}{\iff} \exists\mathcal{B} \text{ base de } E,\ \operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} f \text{ diagonale.}$$

Une telle base est alors composée de vecteurs propres de f.

• On dit que A est ***diagonalisable*** si son endomorphisme canoniquement associé est diagonalisable. Cela revient à dire que A est semblable à une matrice diagonale :

$$\begin{aligned} A \text{ diagonalisable} &\overset{\text{déf.}}{\iff} \left\{\begin{array}{ccc} K^n & \longrightarrow & K^n \\ V & \longmapsto & AV \end{array}\right. \text{ diagonalisable} \\ &\iff \exists D \in M_n(K),\ \left\{\begin{array}{l} A \text{ semblable à } D \\ D \text{ diagonale} \end{array}\right. . \end{aligned}$$

• Chaque endomorphisme de E est diagonalisable ssi la somme (nécessairement directe) de ses sous-espaces propres vaut E :

$$f \text{ diagonalisable} \iff E = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}).$$

• Exemples : chaque projecteur de E est diagonalisable, chaque symétrie de E est diagonalisable.

• Chaque élément de $\mathcal{A}$ possédant n valeurs propres est diagonalisable :

$$\operatorname{Card} \operatorname{Sp} a = n \Longrightarrow a \text{ diagonalisable.}$$

• Quand $\mathcal{A}$ n'est pas nulle, chaque élément de $\mathcal{A}$ est diagonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé et si l'ordre de multiplicité de chacune de ses valeurs propres vaut la dimension du sous-espace propre correspondant :

$$(\text{si } n \geq 1) \qquad a \text{ diagonalisable} \iff \left\{\begin{array}{l} \chi_a \text{ est scindé} \\ \forall\lambda \in \operatorname{Sp} a,\ \omega_\lambda(a) = n - \operatorname{rg}(a - \lambda 1) \end{array}\right. .$$

5. Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables

On impose E de dimension finie n.

• On dit que f est ***trigonalisable*** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure :

$$f \text{ trigonalisable} \overset{\text{déf.}}{\iff} \exists \mathcal{B} \text{ base de } E,\ \operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} f \text{ triangulaire supérieure.}$$

• On dit que A est ***trigonalisable*** si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure. Cela revient à dire que son endomorphisme canoniquement associé est trigonalisable :

$$\begin{aligned} A \text{ trigonalisable} \quad & \overset{\text{déf.}}{\iff} \quad \exists T \in M_n(K), \begin{cases} T \text{ triangulaire supérieure} \\ A \text{ semblable à } T \end{cases} \\ & \iff \quad \begin{cases} K^n & \longrightarrow & K^n \\ V & \longmapsto & AV \end{cases} \text{ trigonalisable.} \end{aligned}$$

• Quand $\mathcal{A}$ n'est pas nulle, chaque élément de $\mathcal{A}$ est trigonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé :

$$(\text{si } n \geq 1) \qquad a \text{ trigonalisable} \iff \chi_a \text{ scindé .}$$

• La somme (resp. le produit) des valeurs propres COMPTÉES AVEC MULTIPLICITÉS de chaque endomorphisme trigonalisable de $\mathcal{A}$ vaut sa trace (resp. son déterminant) :

$$a \text{ trigonalisable} \Longrightarrow \begin{cases} \operatorname{tr} a = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} a} \omega_\lambda(a)\, \lambda \\ \det a = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} a} \lambda^{\omega_\lambda(a)} \end{cases}.$$

• On impose que K soit un sous-corps de $\mathbb{C}$ et que A admette une valeur propre complexe non nulle telle que chaque autre valeur propre complexe de A lui est en module strictement inférieure. Alors la suite $\left(\frac{\operatorname{tr} A^{N+1}}{\operatorname{tr} A^N}\right)$ fait sens à partir d'un certain rang et tend vers cette valeur propre :

$$\begin{aligned} K \subset \mathbb{C} \text{ et } & \left[\exists \mu \in \operatorname*{Sp}_{\mathbb{C}} A,\ \forall \lambda \in \operatorname*{Sp}_{\mathbb{C}} A,\ \lambda \neq \mu \Longrightarrow |\lambda| < |\mu|\right] \\ & \Longrightarrow \left[\frac{\operatorname{tr} A^{N+1}}{\operatorname{tr} A^N} \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} \text{l'unique tel } \mu\right]. \end{aligned}$$

6. Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

On impose E de dimension finie n.

• On dit que a est ***nilpotent*** si l'une de ses puissances est nulle :

$$a \text{ nilpotent} \overset{\text{déf.}}{\iff} \exists \nu \in \mathbb{N},\ a^\nu = 0.$$

Dans ce cas, on appelle ***indice de nilpotence*** de a le plus petit naturel ν tel que $a^\nu = 0$:

$$[\text{indice de nilpotence de } a \text{ nilpotent}] := \min \{\nu \in \mathbb{N}\ ;\ a^\nu = 0\}.$$

• Quand $\mathcal{A}$ n'est pas nulle, chaque élément de $\mathcal{A}$ est nilpotent ssi il est trigonalisable avec 0 pour seule valeur propre :

$$(\text{si } n \geq 1) \qquad a \text{ nilpotent} \Longleftrightarrow \begin{cases} a \text{ trigonalisable} \\ \operatorname{Sp} a = \{0\} \end{cases} .$$

• L'indice de nilpotence de chaque élément de $\mathcal{A}$ est majoré par la dimension de l'espace vectoriel sur lequel il agit :

$$a \text{ nilpotent} \Longrightarrow [\text{indice de nilpotence de } a] \leq n$$

(le cas matriciel n'est pas explicitement au programme).

Exercices d'entraînement

D'autres exercices sur le même thème sont proposés au chapitre suivant.
On fixe un corps K et un naturel n. (Les lettres A, E et f restent "libres".)

1. ★*Soit* $a \in \mathbb{R}^3$. *Étudier la diagonalisabilité de l'endomorphisme* $v \mapsto a \wedge v$ *de* $\mathbb{R}^3$ *(produit vectoriel)*
2. ★*Notons* M *la matrice réelle* $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. *Calculer* M^z *pour chaque* $z \in \mathbb{Z}$.
3. ★*Étudier la diagonalisabilité de l'endomorphisme* $M \mapsto 18M + (\operatorname{tr} M)\, A$ *de* $M_n(K)$.
4. ★*Quelles transvections de* $M_n(K)$ *sont diagonalisables ?*
5. ★*Déterminer les matrices diagonalisables de* $GL_n(K)$ *lorsque* $K = \{0, 1\}$.
6. ★★*Soit* E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie* n *et soit* $f \in L(E)$ *nilpotent d'indice* n. *Montrer alors que* f *stabilise exactement* $n+1$ *sous-espaces vectoriels de* E *dont on précisera les dimensions respectives.*
7. ★★*Soit* $A \in SL_n(\mathbb{R})$ *telle que* $\begin{cases} n \text{ impair} \\ \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}} A \subset \mathbb{U} \end{cases}$. *Montrons que* A *fixe un vecteur non nul de* $\mathbb{R}^n$. *Discuter les hypothèses.*
8. ★★*Soit* $A \in M_n(K)$ *diagonalisable et imposons* $2 \neq 0$ *dans* K. *Montrer alors que la matrice* $\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ *est diagonalisable. Discuter l'hypothèse* $2 \neq 0$.
9. ★★*La matrice* $\begin{pmatrix} 13 & -9 & 45 \\ -3 & 3 & -11 \\ -3 & 2 & -10 \end{pmatrix}$ *est-elle trigonalisable ? diagonalisable ? Trouver et expliciter une réduite de la forme* $\begin{pmatrix} ? & 0 & 0 \\ 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & ? \end{pmatrix}$.
10. ★★★*Soit un cube dans l'espace* $\mathbb{R}^3$. *Compter le nombre de chemins formés de* n *arêtes du cube (retours et répétitions autorisés) reliant deux sommets donnés.*

Solutions des exercices d'entraînement

1. Notons π l'endomorphisme considéré (π comme « **p**roduit vectoriel »). Soit (λ, v) un couple propre de π. Appliquer à l'égalité $a \wedge v = \lambda v$ un produit scalaire contre v donne alors $0 = \lambda \|v\|^2$, d'où $\lambda = 0$ (puisque v est non nul car propre), ce qui montre que π n'a qu'un seul sous-espace propre – son noyau. Or ce dernier vaut $\mathbb{R}a$ si $a \neq 0$ (et $\mathbb{R}^3$ sinon). Finalement π est diagonalisable ssi a est nul.

   Donnons une *autre* solution, matricielle. Notons $a =: (r, s, t)$. L'endomorphisme π a alors pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & -r & s \\ r & 0 & -t \\ -s & t & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, donc son polynôme caractéristique vaut

$$\begin{aligned}
\chi_\pi &= \chi \begin{pmatrix} 0 & -r & s \\ r & 0 & -t \\ -s & t & 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} X & r & -s \\ -r & X & t \\ s & -t & X \end{vmatrix} \overset{\text{Sarrus}}{=} \\
&= X^3 + rts + (-s)(-r)(-t) - sX(-s) - (-t)tX - X(-r)r \\
&= X^3 + s^2X + t^2X + r^2X = X\left(X^2 + r^2 + s^2 + t^2\right) = X\left(X^2 + \|a\|^2\right).
\end{aligned}$$

   Si a n'est pas nul, le facteur $X^2 + \|a\|^2$ n'a pas de racine réelle, donc χ_π n'est pas scindé, donc π n'est pas trigonalisable. Finalement π n'est jamais trigonalisable sauf cas trivial où $a = 0$ et $\pi = 0$.

2. La matrice M est une matrice d'inductance (*cf.* exemple vu en cours). Ses valeurs propres sont $6 - 5 = 1$ (inductance cyclique) et $6 + 2 \cdot 5 = 16$ (inductance homopolaire) et l'on a l'égalité

$$M = P\Lambda P^{-1} \text{ où } \Lambda := \operatorname{Diag}(1, 1, 16) \text{ et } P := \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix} = {}^tP^{-1}.$$

   On en déduit pour chaque $z \in \mathbb{Z}$ les égalités

$$\begin{aligned}
M^z &= \left(P\Lambda P^{-1}\right)^z = P\Lambda^z P^{-1} = P \operatorname{Diag}(1, 1, 16)^z \ {}^tP \\
&\overset{\substack{\text{abréger} \\ \Theta := 16^z}}{=} \begin{pmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} {}^tP \\
&= \begin{pmatrix} -2 & 0 & \Theta\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \Theta\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \Theta\sqrt{2} \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \Theta + 2 & \Theta - 1 & \Theta - 1 \\ \Theta - 1 & \Theta + 2 & \Theta - 1 \\ \Theta - 1 & \Theta - 1 & \Theta + 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{16^z - 1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Sanity check : la puissance obtenue est bien à coefficients entiers quand $z \in \mathbb{N}$ car on a alors *modulo* 3 les égalités $16^z \equiv 1^z = 1$, d'où l'intégralité de la fraction $\frac{16^z-1}{3}$.

3. Rajouter une homothétie ne changeant pas le caractère diagonalisable (resp. trigonalisable), on est ramené à l'étude de $M \mapsto (\operatorname{tr} M)\, A$. Cet endomorphisme est de rang 1 (son image est incluse dans la droite dirigée par A), donc est diagonalisable ssi sa trace est non nulle. Or cette trace évaluée dans la base canonique de $M_n(K)$ vaut

$$\sum_{i,j\in[1,n|]} \operatorname*{Coef}_{E_{i,j}} [\ (\operatorname{tr} E_{i,j})\, A\ ] = \sum_{i,j\in[1,n|]} \underbrace{\operatorname*{Coef}_{E_{i,j}} [\ \delta_{i,j} A\ ]}_{\text{nul si } i\neq j} = \sum_{i\in[1,n|]} \operatorname*{Coef}_{E_{i,i}} A = \operatorname{tr} A.$$

Conclusion : l'endomorphisme étudié est diagonalisable ssi A est de trace non nulle.

4. Chaque transvection de $M_n(K)$ est triangulaire à diagonale constante, donc est diagonalisable ssi elle est scalaire, ce qui n'est pas le cas (sauf cas pathologique $n \leq 1$ où il n'y a pas de transvections dans $M_n(K)$). Par conséquent, aucune transvection n'est diagonalisable.

5. Soit D une matrice diagonalisable inversible sur le corps $\{0,1\}$: chacune de ses valeurs propres est alors non nulle (car D est inversible), donc vaut 1 (car $K = \{0,1\}$), donc D est diagonalisable à spectre constant, *a fortiori* scalaire, d'où $D = I_n$.

6. L'endomorphisme f est nilpotent d'indice n, donc vérifie les égalités

$$\forall N \in [0,n|]\,,\ \dim \operatorname{Ker} f^N = N.$$

Puisque f commute avec ses itérés, ces derniers noyaux sont stables par f ; étant par ailleurs de dimensions distinctes, ils forment forment $n+1$ sous-espaces vectoriels stables par f.

Soit réciproquement S un sous-espace vectoriel de E stable par f. L'induit $f_{|S}$ est alors nilpotent d'indice au plus $\dim S$, ce qui s'écrit $S \subset \operatorname{Ker} f^{\dim S}$, inclusion qui est une égalité vu l'égalité des dimensions.

7. Première observation : avoir un point fixe revient à admettre 1 comme valeur propre. On veut donc montrer $\omega_1 > 0$.

Abrégeons $(\alpha,\beta) := (\omega_1, \omega_{-1})$. Le polynôme caractéristique de A, qui est à coefficients réels, se scinde alors sur $\mathbb{C}$ en

$$\chi_A = (X-1)^\alpha (X+1)^\beta \prod_{\lambda\in \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}} A}^{\operatorname{Im}\lambda>0} (X-\lambda)^{\omega_\lambda} \left(X-\overline{\lambda}\right)^{\omega_\lambda}$$

en regroupant les valeurs propres non réelles deux par deux. Le déterminant de A vaut donc

$$1 = \det A = 1^\alpha (-1)^\beta \prod_{\lambda\in\operatorname{Sp} A,\ \operatorname{Im}\lambda>0} \underbrace{\lambda^{\omega_\lambda}\overline{\lambda}^{\omega_\lambda}}_{=|\lambda|^{2\omega_\lambda}=1} = (-1)^\beta\text{, d'où la parité de } \beta.$$

On en déduit les égalités *modulo* 2

$$1 \equiv n = \deg \chi_A = \alpha + \beta + \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} A}^{\operatorname{Im} \lambda > 0} 2\omega_\lambda \equiv \alpha + 0 + 0, \text{ d'où l'imparité de } \alpha.$$

L'ordre positif α est donc non nul, *c. q. f. d.*

Toutes les hypothèses sont nécessaires : si $K = \mathbb{C}$, la matrice $\operatorname{Diag}(-1, i, i)$ est un contre-exemple ; si n est pair, considérer les matrices de rotation autres que I_2 ; si $\det A \neq 1$ ou si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} A \not\subset \mathbb{U}$, imposer $n = 1$.

8. Il y a plein de méthodes différentes pour résoudre cette question, autant (au moins) que de critères de diagonalisabilité.

(a) **Exhiber une base de vecteurs propres.** Soit $\mathcal{V}$ un ensemble de n vecteurs propres de A formant une base de K^n. de vecteurs propres de A. Montrons alors que

$$\text{les } 2n \text{ vecteurs formés par } \begin{pmatrix} V \\ V \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} V \\ -V \end{pmatrix} \text{ lorsque } V \text{ parcourt } \mathcal{V}$$

constituent une base de K^{2n} de vecteurs propres de $\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$.

Soit $(\lambda_V) \in K^{\mathcal{V}}$ tel que $\forall V \in \mathcal{V},\ AV = \lambda_V V$. On a alors les égalités

$$\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ \pm V \end{pmatrix} = (1 \pm 1)\, \lambda_V \begin{pmatrix} V \\ \pm V \end{pmatrix},$$

ce qui montre que l'on a bien une famille de $2n$ vecteurs propres.

Ces derniers forment par ailleurs une famille libre vu pour chaques familles (α_V) et (β_V) de $K^{\mathcal{V}}$ les implications

$$\begin{aligned}
&\sum_{V \in \mathcal{V}} \alpha_V \begin{pmatrix} V \\ V \end{pmatrix} + \sum_{V \in \mathcal{V}} \beta_V \begin{pmatrix} V \\ -V \end{pmatrix} = 0 \implies \begin{cases} \sum_{V \in \mathcal{V}} (\alpha_V + \beta_V) = 0 \\ \sum_{V \in \mathcal{V}} (\alpha_V - \beta_V) = 0 \end{cases} \\
&\overset{\mathcal{V} \text{ libre}}{\Longrightarrow} \begin{cases} \forall V \in \mathcal{V},\ \alpha_V + \beta_V = 0 \\ \forall V \in \mathcal{V},\ \alpha_V - \beta_V = 0 \end{cases} \implies \forall V \in \mathcal{V}, \begin{cases} \alpha_V + \beta_V = 0 \\ \alpha_V - \beta_V = 0 \end{cases} \\
&\overset{2 \neq 0}{\Longrightarrow} \forall V \in \mathcal{V},\ \alpha_V = \beta_V = 0.
\end{aligned}$$

(b) **Comparer ordres algébriques et géométriques.** Calculons le polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned}
\chi \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} XI_n - A & -A \\ -A & XI_n - A \end{vmatrix} \underset{\text{pour chaque } i \in [1,n|]}{\overset{C_i \longleftarrow C_i - C_{i+n}}{=}} \begin{vmatrix} XI_n & -A \\ -XI_n & XI_n - A \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{pour chaque } i \in]n,2n|]}{\overset{L_i \longleftarrow L_i + L_{i-n}}{=}} \begin{vmatrix} XI_n & -A \\ 0 & XI_n - 2A \end{vmatrix} = X^n \det(XI_n - 2A) \\
&\underset{\text{car } 2 \neq 0}{\overset{\text{fait sens}}{=}} (2X)^n \det\left(\frac{X}{2} I_n - A\right) = (2X)^n \chi_A\left(\frac{X}{2}\right) \\
&= (2X)^n \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, A} \left(\frac{X}{2} - \lambda\right)^{\omega_\lambda} = X^n \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, A} (X - 2\lambda)^{\omega_\lambda}.
\end{aligned}$$

Comparons les ordres algébriques et géométriques. Ils vont coïncider pour chaque scalaire, ce qui montrera que $\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Soit $\lambda \in K$ non nul. Le scalaire 2λ est alors valeur propre de $\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ d'ordre (algébrique) ω_λ et son ordre géométrique vaut

$$\begin{aligned} & 2n - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} A-2\lambda & A \\ A & A-2\lambda \end{pmatrix} \underset{\text{que pour } \chi_A}{\overset{\text{mêmes calculs}}{=}} 2n - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -2\lambda & A \\ {\scriptscriptstyle 0} & 2A-2\lambda \end{pmatrix} \\ = \quad & 2n - (n + \operatorname{rg}(2A-2\lambda)) \overset{2\neq 0}{=} n - \operatorname{rg}(A-\lambda) \underset{\text{diagonalisable}}{\overset{A \text{ est}}{=}} \omega_\lambda . \end{aligned}$$

Par ailleurs, 0 est d'ordre (algébrique) $n+\omega_0$ pour $\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ et son ordre géométrique vaut

$$\begin{aligned} 2n - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} & = 2n - \operatorname{rg} A = n + (n - \operatorname{rg} A) \\ & \underset{\text{diagonalisable}}{\overset{A \text{ est}}{=}} n + \omega_0, \ c.\ q.\ f.\ d. \end{aligned}$$

(c) **Exhiber une matrice de passage qui "diagonalise" A.** Regardons le cas $n = 1$. La matrice A est alors juste un scalaire (λ) et la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix}$ admet deux vecteurs propres $(1,1)$ et $(1,-1)$, lequels sont libres car $2 \neq 0$, ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} &= P \begin{pmatrix} 0 & {\scriptscriptstyle 0} \\ {\scriptscriptstyle 0} & 2\lambda \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec} \\ P &:= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dans le cas général, on sait que A s'écrit PDP^{-1} où D est diagonale. Par analogie avec le cas $n = 1$, on définit $Q := \begin{pmatrix} P & P \\ P & -P \end{pmatrix}$ qui est inversible d'inverse $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} P^{-1} & P^{-1} \\ P^{-1} & -P^{-1} \end{pmatrix}$ (légitime car $2 \neq 0$) et l'on vérifie que la matrice

$$\begin{aligned} & Q^{-1}\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} P^{-1} & P^{-1} \\ P^{-1} & -P^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & P \\ P & -P \end{pmatrix} \\ = \quad & \begin{pmatrix} P^{-1}AP & {\scriptscriptstyle 0} \\ {\scriptscriptstyle 0} & P^{-1}AP \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & {\scriptscriptstyle 0} \\ {\scriptscriptstyle 0} & D \end{pmatrix} \text{ est diagonale, } c.\ q.\ f.\ d. \end{aligned}$$

(d) **Invoquer le théorème spectral lorsque le corps de base est $\mathbb{R}$.** La matrice A est diagonalisée par une certaine matrice $P \in GL_n(K)$; essayons de diagonaliser $\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ à l'aide de la matrice $\begin{pmatrix} P & {\scriptscriptstyle 0} \\ {\scriptscriptstyle 0} & P \end{pmatrix} \in GL_{2n}(K)$.

En notant $D := P^{-1}AP$, on a les égalités

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} PDP^{-1} & PDP^{-1} \\ PDP^{-1} & PDP^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & D \\ D & D \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Cette dernière matrice étant symétrique réelle, elle est diagonalisable, donc $\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ est semblable à une matrice diagonalisable, *a fortiori* est semblable à une matrice diagonale, ce qui conclut.

Enfin, si $K = \{0, 1\}$, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est nilpotente non nulle, donc non diagonalisable, ce qui montre la nécessité de l'hypothèse $2 \neq 0$ (bien observer où cette hypothèse est intervenue dans chacune des quatre démonstrations précédentes).

9. Notons A la matrice étudiée. Son polynôme caractéristique vaut

$$\begin{aligned} & \chi \begin{pmatrix} 13 & -9 & 45 \\ -3 & 3 & -11 \\ -3 & 2 & -10 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} X-13 & 9 & -45 \\ 3 & X-3 & 11 \\ 3 & -2 & X+10 \end{vmatrix} \\ \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{=} & \begin{vmatrix} X-13 & 9 & -45 \\ 3 & X-3 & 11 \\ 0 & 1-X & X-1 \end{vmatrix} \overset{C_2 \leftarrow C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} X-13 & -36 & -45 \\ 3 & X+8 & 11 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix} \\ = & (X-1) \begin{vmatrix} X-13 & -36 \\ 3 & X+8 \end{vmatrix} = (X-1)\left(X^2 - 5X + 4\right) \\ = & (X-1)^2 (X-4), \text{ d'où } \operatorname{Sp} A = \{1, 4\}. \end{aligned}$$

Le polynôme χ_A étant scindé, la matrice A est trigonalisable. Les égalités

$$\operatorname{rg}(A - I_3) = 3 - \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 12 & -9 & 45 \\ -3 & 2 & -11 \\ -3 & 2 & -11 \end{pmatrix} \underset{L_2 = L_3}{\overset{L_1 \leftarrow \frac{1}{3} L_1}{=}} 3 - \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 15 \\ -3 & 2 & -11 \end{pmatrix} = 2$$

montrent par ailleurs que l'ordre géométrique de la valeur propre -1 vaut $3 - \operatorname{rg}(A - I_n) = 1$, lequel diffère de son ordre algébrique $\omega_1 = 2$. La matrice A n'est par conséquent pas diagonalisable.

Explicitons deux vecteurs propres associés resp. à 1 et 4, que l'on cherchera ensuite à compléter à l'aide d'un troisième vecteur afin de trigonaliser A sous la forme

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ? \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a à $(a,b,c)\in K^2$ fixé d'une part les équivalences

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}\in E_1(A)\iff (A-I_3)\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}=0\\
\iff\quad &\begin{pmatrix} 12 & -9 & 45\\ -3 & 2 & -11\\ -3 & 2 & -11\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}=0\iff\left\{\begin{array}{l} 3b=4a+15c\\ 2b=3a+11c\end{array}\right.\\
\overset{L_1\leftarrow 3L_2-2L_1}{\iff}\quad &\left\{\begin{array}{r} 0=a+3c\\ 2b=3a+11c\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l} a=-3c\\ 2b=3a+11c\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l} a=-3c\\ b=c\end{array}\right.\\
\iff\quad &\exists\lambda\in K,\ \left\{\begin{array}{r} a=-3\lambda\\ b=\lambda\\ c=\lambda\end{array}\right.\iff\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}\in K\begin{pmatrix} -3\\ 1\\ 1\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

d'autre part les équivalences

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}\in E_4(A)\iff (A-4I_3)\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}=0\\
\iff\quad &\begin{pmatrix} 9 & -9 & 45\\ -3 & -1 & -11\\ -3 & 2 & -14\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}=0\iff\left\{\begin{array}{l} b=a+5c\\ 3a+b+11c=0\\ 2b=3a+14c\end{array}\right.\\
\underset{L_2\leftarrow L_2+3L_1}{\overset{L_3\leftarrow L_3-2L_1}{\iff}}\quad &\left\{\begin{array}{l} b=a+5c\\ 4b=4c\\ 0=a+4c\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l} b=c\\ a=-4c\end{array}\right.\iff\exists\lambda\in K,\ \left\{\begin{array}{r} a=-4\lambda\\ b=\lambda\\ c=\lambda\end{array}\right.\\
\iff\quad &\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}\in K\begin{pmatrix} -4\\ 1\\ 1\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ce qui montre que les couples $(1,V)$ et $(4,W)$ sont propres pour A où l'on abrégé

$$V:=(-3,1,1)\qquad\text{et}\qquad W:=(-4,1,1).$$

Imposons pour troisième vecteur $X:=(0,1,0)$ afin de simplifier les calculs. Pour décomposer

$$AX=[\text{deuxième colonne de }A]=(-9,3,2)$$

selon la base $(V\ W\ X)$, il s'agit de lire les coordonnées du vecteur $(V\ W\ X)^{-1}\ AX$. Or la résolution d'un système linéaire livrerait les égalités

$$(V\ W\ X)^{-1}=\begin{pmatrix} -4 & -3 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3\\ 1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

(résolution qui montrerait au passage la liberté de la famille (V,W,X)), d'où les égalités

$$\begin{aligned}
(V\ W\ X)^{-1}\ AX &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\text{et } \operatorname*{Mat}_{(V,W,X)} (A\cdot) &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Pour se débarrasser du coefficient 3 en haut à droite, on remplace X par $X - tV$ où t est un scalaire à choisir : vu la liberté de la famille $(V, W, X - tV)$ et les égalités

$$\begin{aligned}
A(X - tV) &= AX - tAV = (3V - W + X - tV + tV) - 4tV \\
&= 3(1 - t)V - W + (X - tV),
\end{aligned}$$

imposer $t = 1$ convient, auquel cas on a

$$X = (0, 1, 0) - (-4, 1, 1) = (4, 0, -1).$$

Finalement, on peut trigonaliser

$$A = P \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ où } P := \begin{pmatrix} -4 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sanity check : utiliser l'égalité $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ pour vérifier l'égalité ci-dessus.

REMARQUE – **Hors programme**. Remplaçant X par $X - W$ transformerait le coefficient -1 en 1 et l'on obtiendrait alors la réduite de JORDAN de A.

10. L'aspect réduction n'est pas immédiat mais viendra en temps voulu. Un dessin montre qu'il y a quatre types de paires de sommets départ-arrivée à distinguer :

FIG
deux sommets confondus (cas 0)
formant une arête (cas 1)
formant une diagonale d'une face (cas 2)
formant une diagonale du cube (cas 3).

On va dénombrer ces derniers par récurrence. Pour chaque naturel N, notons resp. a_N, b_N, c_N, d_N le nombre de chemins formés de N arêtes entre deux sommets situés dans la configuration resp. $0, 1, 2, 3$. Fixons un naturel N pour la suite.

Il est alors facile de constater les relations de récurrence suivantes en regardant où peut se terminer un chemin donné dont on a éliminé la dernière arête (doit-on préciser que dessiner un cube peut aider à la résolution de l'exercice ?) :

$$\begin{cases} a_{N+1} = 3b_N \\ b_{N+1} = a_N + 2c_N \\ c_{N+1} = 2b_N + d_N \\ d_{N+1} = 3c_{N+1} \end{cases}.$$

En introduisant le vecteur colonne $C_N := {}^t(a_N, b_N, c_N, d_N)$ et en traduisant la relation de récurrence ci-dessus de façon matricielle, on obtient les égalités

$$C_N = A^N \cdot C_0 = A^N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } A := \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

On va donc réduire la matrice A pour pouvoir calculer ses puissances. Le calcul du polynôme caractéristique donnerait

$$\chi_A = X^4 - 10X^2 + 9 = \left(X^2 - 1\right)\left(X^2 - 9\right) = (X-1)(X+1)(X-3)(X+3),$$

lequel est simplement scindé, donc A est diagonalisable : c'est une bonne nouvelle. En cherchant à la main les quatre droites propres, on trouve

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ où } P := \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit les égalités

$$C_N = A^N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-3)^N \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour conclure, il suffit de trouver la première colonne de P^{-1}, *i. e.* décomposer $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base de vecteurs propres donnée par P. Un calcul donnerait $\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ pour la colonne voulue. En substituant dans l'expression de C_N, on trouve finalement

$$C_N = \begin{pmatrix} 3\frac{3^{N-1}+1}{4} \\ 0 \\ \frac{3^N-1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ si } N \text{ est pair et } \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3^N+1}{4} \\ 0 \\ 3\frac{3^{N-1}-1}{4} \end{pmatrix} \text{ si } N \text{ est impair.}$$

On vérifiera que les 0 sont bien à leur place pour des questions d'invariants, que les nombres écrits sont bien entiers selon les parités et que les petites valeurs de $N \geq 0$ donnent les bons résultats : indispensables *sanity checks* !

Remarque – **Culture graphique**. Étant donné un graphe dont les sommets sont étiquetés par $[1, n|]$, on définit sa ***matrice d'adjacence*** par la matrice de $M_n(K)$ dont le coefficient (i, j) vaut le nombre d'arêtes allant du sommet étiqueté i à celui étiqueté j. Le lien avec notre problème est le suivant : pour chaque $N \in \mathbb{N}$, le coefficient (i, j) de la puissance N-ième de la matrice d'adjacence compte le nombre de chemins formés de N arêtes allant du sommet étiqueté i à celui étiqueté j.

Lorsque le graphe admet une partition en deux "parts" de sommets tels que chaque sommet d'une part donnée a pour voisins uniquement des sommets de l'autre part (on dit alors que le graphe est ***bipartite***), le calcul des puissances de la matrice d'adjacence se simplifie. Or c'est le cas du cube pour la numérotation suivante :

FIG

La matrice d'adjacence s'écrit alors $A := \begin{pmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{pmatrix}$ où $B := H - I_4$ et où H dénote la matrice de taille 4×4 remplie de 1, d'où les égalités

$$A^N = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{pmatrix}^N = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & B^N \\ B^N & 0 \end{pmatrix} & \text{si } N \text{ impair} \\ \begin{pmatrix} B^N & 0 \\ 0 & B^N \end{pmatrix} & \text{si } N \text{ pair} \end{cases}.$$

Or les matrices H et I_4 commutent, donc le binôme s'applique et donnerait (avec les égalités $H^i = 4^{i-1}H$)

$$\begin{aligned} B^N &= (H - I_4)^N = \frac{3^N - (-1)^N}{4} H + (-1)^N I_4, \text{ d'où} \\ a_N &= \left[A^N\right]_{1,1} = \begin{cases} \text{si } N \text{ pair : } \frac{3^N-1}{4} + 1 = 3\frac{3^{N-1}+1}{4} \\ \text{si } N \text{ impair : } 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

On retrouverait de même les autres coefficients.