Dérivées

La lettre $\mathbb{R}$ dénote l'ensemble des nombres "réels" : ceux qui servent à mesurer les longueurs sur une droite (avec éventuellement un signe).

Ainsi les symboles $\forall t \in \mathbb{R}$ se liront-ils « pour chaque t appartenant à $\mathbb{R}$ » ou « pour chaque reél t ».

Soit I un intervalle réel. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

La ***dérivée*** de f (quand elle fait sens) est une fonction, notée f'. On dit alors que f est ***dérivable*** (sur I).

Dérivées usuelles.

1. *Si on a* $\forall t \in I,\ f(t) = 1$, *on a alors* $\forall t \in I,\ f'(t) = 0$.
2. *Si on a* $\forall t \in I,\ f(t) = t$, *on a alors* $\forall t \in I,\ f'(t) = 1$.
3. *Si on a* $\forall t \in I,\ f(t) = t^2$, *on a alors* $\forall t \in I,\ f'(t) = 2t$.
4. *Si on a* $\forall t \in I,\ f(t) = t^3$, *on a alors* $\forall t \in I,\ f'(t) = 3t^2$.
5. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Si on a* $\forall t \in I,\ f(t) = t^n$, *on a alors* $\forall t \in I,\ f'(t) = nt^{n-1}$
   (retrouver les quatre exemples précédents en remplaçant n par $0, 1, 2, 3$)

Dérivées et lois usuelles. *Soient* F *et* G *deux fonctions dérivables sur* I, *soit* $a \in \mathbb{R}$.
Les trois fonctions aF, $F + G$, FG *sont alors dérivables et l'on a les égalités*

$$[aF]' = aF' \qquad [F+G]' = F' + G' \quad \textit{et} \quad [FG]' = F'G + FG'.$$

1. (attention : la dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées !)

Dérivées et sens de variation. Soit $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Alors :

1. F croît sur I ssi f' est positive sur I.
2. F décroît sur I ssi f' est négative sur I.

Exemple : la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ a pour dérivée $t \mapsto -\frac{1}{t^2}$ (qui est négative) sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ décroît sur $\mathbb{R}_+^*$ et décroît sur $\mathbb{R}_-^*$.