Devoir maison
(probabilités)

à rendre le lundi 3 mars

Paradoxe de Simpson[1]. On étudie chez une population l'efficacité d'un médicament. Pour cela, on la compare à celle d'un placebo. Les effectifs des caractères "guéri" et "non guéri" sont indiqués dans les tableau suivants, répartis selon le sexe de l'individu et son traitement (médicament ou placebo) :

hommes	guéri	non guéri
médicament	36	24
placebo	14	6

femmes	guérie	non guérie
médicament	4	16
placebo	18	42

.

1. *Regrouper dans un seul tableau les effectifs sans distinction de sexe.*
2. *Pour chacun des trois tableaux précédents, calculer la fréquence de guérison parmi les individus qui ont pris le médicament et la fréquence de guérison parmi les individus qui ont pris le placebo.*
3. *Est-ce que le médicament marche mieux que le placebo pour les hommes ? Pour les femmes ? Pour toute la population ?*
4. *Commenter ces résultats et votre prise de décision*

Un jeu de pièces et de pommes.

On se donne une pièce de un euro. On considère l'expérience "jeter la pièce en l'air", qui s'arête quand la pièce s'immobilise en montrant clairement l'un de ses deux côtés ("pile" ou "face").

On code l'issue "la pièce tombe sur pile" par la lettre P et on code l'issue "la pièce tombe sur face" par la lettre F. On choisit de modéliser l'expérience par l'ensemble $\{F, P\}$ que l'on notera Ω. (On rappelle que $\mathcal{P}(\Omega)$ dénote l'ensemble des parties de Ω.)

On joue au jeu suivant : on effectue l'expérience ci-dessus puis on gagne 90 pommes si la pièce tombe sur "pile" et on perd 70 pommes si la pièce tombe sur "face".

On appelle $\mathbf{E}$ l'espérance[2] de la fonction définie sur Ω qui à P (resp. F) associe 90 (resp. -70). Cette fonction modélise le gain aléatoire du jeu.

Soient p et f deux réels. On note A la fonction définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ qui à la partie $\emptyset$ (resp. Ω, $\{P\}$, $\{F\}$) associe 0 (resp. 1, p, f).

1. *Donner une condition simple sur p et f pour que A soit une probabilité sur Ω.*

   On suppose désormais cette condition vérifiée. La fonction A modélise ainsi l'aléa du lancer de pièce.
2. *On suppose qu'il y a équiprobabilité (au sens de A). Trouver p et f, calculer $\mathbf{E}$ et en déduire si le bon sens nous recommande de jouer ou non.*
3. *On suppose que l'issue "obtenir pile" a quatre fois moins de chance (au sens de A) d'apparaître que celle "obtenir face". Mêmes questions.*
4. *Exprimer $\mathbf{E}$ en fonction de p seulement. Retrouver les résultats précédents puis trouver les valeurs de p pour lesquelles le jeu est équitable (au sens de A).*

[1] Un article de *Pour la science* (n°429 juillet 2013) est consacré à ce paradoxe.

[2] qui s'écrira $\mathbb{E}$ en écriture manuscrite