Suites

Marc SAGE

jeudi 27, lundi 31 mars, mardi 1ier, jeudi 3, lundi 7, mardi 8, jeudi 10 avril

Exercices : 1-3 p. 195, 27-28 p. 204, 32-33 p. 205, 27-28 p. 204, 45-52 p. 206, 61, 63, 64, 65, p. 207, 81-83 p. 209,
D. M. : exos 88-90 p. 209, 75, 77 ,79 p. 208

1 Définitions

Définitions.
On appelle ***suite*** *(réelle) toute fonction de* $\mathbf{N}$ *vers* $\mathbf{R}$*.*
Si a *est une suite et* n *un naturel, on note* $a_n = a(n)$ *le* n*-ième terme de la suite* a*.*

Avec cette notation, il est usuel d'écrire une suite a sous la forme $(a_p)_{p\in\mathbf{N}}$ (on peut remplacer le p muet par n'importe quel symbole) ou abusivement (a_n) (où le symbole n est muet).

Ainsi peut-on représenter une suite par ses termes "à la suite" : a_0, a_1, a_2, a_3, a_4...

Exemple. On définit une suite $a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ n & \longmapsto & n^2 - 3n \end{array} \right.$. Ses premiers termes sont

$$\begin{aligned} a_0 &= 0^2 - 3\cdot 0 = 0 - 0 = 0, \\ a_1 &= 1^2 - 3\cdot 1 = 1 - 3 = -2, \\ a_2 &= 2^2 - 3\cdot 2 = 4 - 6 = -2, \\ a_3 &= 3^2 - 3\cdot 3 = 9 - 9 = 0, \\ a_4 &= 4^2 - 3\cdot 4 = 16 - 12 = 4, \\ a_5 &= 5^2 - 3\cdot 5 = 25 - 15 = 10... \end{aligned}$$

On peut aussi définir une suite de proche en proche en donnant un premier terme et une "règle" pour passer d'un terme au suivant.

Exemple. Soit (b_n) une suite telle que $\left\{ \begin{array}{c} b_0 = -6 \\ \forall p \in \mathbf{N},\ b_{p+1} = 2b_p + 8 \end{array} \right.$. On peut calculer de proche en proche

$$\begin{aligned} b_0 &= -6, \\ b_1 &= 2b_0 + 8 = 2(-6) + 8 = -4, \\ b_2 &= 2b_1 + 8 = 2(-4) + 8 = 0, \\ b_3 &= 2b_2 + 8 = 2\cdot 0 + 8 = 8, \\ b_4 &= 2b_3 + 8 = 2\cdot 8 + 8 = 24... \end{aligned}$$

On voit ainsi que les deux conditions de l'accolade déterminent tous les termes de la suite (b_n). On aurait donc pu *définir* "Notons (b_n) la suite définie par..." au lieu d'*invoquer* une telle suite.

Définitions. Soit (a_n) une suite.
On dit que la suite (a_n) ***croît*** *(ou est* ***croissante****) lorsque* $\forall n \in \mathbf{N},\ a_{n+1} \geq a_n$*. Cela revient à la positivité de* $a_{n+1} - a_n$ *pour tout naturel* n*.* [dessin]

*On dit que la suite (a_n) **décroît** (ou est **décroissante**) lorsque $\forall n \in \mathbf{N},\ a_{n+1} \leq a_n$. Cela revient à la négativité de $a_{n+1} - a_n$ pour tout naturel n.* [dessin]

Exemple. Notons c la suite $k \mapsto \frac{1}{k+1}$. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a les égalités :

$$c_{n+1} - c_n = \frac{1}{(n+1)+1} - \frac{1}{(n)+1} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-(n+2)}{(n+2)(n+1)} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)}\ ;$$

puisque n est positif, le dénominateur est positif, donc la différence $c_{n+1} - c_n$ est négative. Par conséquent, la suite (c_k) décroît.

2 Suites de références

Définition. *On dit qu'une suite est **arithmétique** lorsque la différence entre deux termes consécutifs est constante : cette différence s'appelle la **raison** de la suite arithmétique.*

Exemples / activité :

a_p (p muet)	p	$p+1$	$2p+4$	$-p$	$3+7p$	$5-18p$
raison	1	1	2	-1	7	-18

.

Traitons la cinquième suite. Soit $n \in \mathbf{N}$: on a les égalités

$$a_{n+1} - a_n = (3 + 7(n+1)) - (3 + 7(n)) = 3 + 7n + 7 - 3 - 7n = 7.$$

On remarque sur ces exemples qu'une suite arithmétique de raison r et de premier terme α s'écrit

$$n \mapsto \alpha + rn.$$

Elle vérifie par ailleurs (si on l'appelle a) la relation de récurrence $\left\{ \begin{array}{c} a_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbf{N},\ a_{n+1} = a_n + r \end{array} \right.$.

Définition. *On dit qu'une suite est **géométrique** lorsque le quotient de deux termes consécutifs fait toujours sens[1] et est constant : ce quotient s'appelle la **raison** de la suite géométrique.*

Exemples / activité :

g_k (k muet)	1	-7	2^k	$3(-1)^k$	$-18 \cdot 4^k$	$\frac{2}{5^k}$
raison	1	1	2	-1	4	$\frac{1}{5}$

.

Traitons la cinquième suite. Soit $n \in \mathbf{N}$: on a les égalités

$$\frac{g_{n+1}}{g_n} = \frac{-18 \cdot 4^{n+1}}{-18 \cdot 4^n} = \frac{4^n 4}{4^{n+1}} = 4.$$

On remarque sur ces exemples qu'une suite géométrique de raison r et de premier terme α s'écrit

$$n \mapsto \alpha r^n.$$

Elle vérifie par ailleurs (si on l'appelle g) la relation de récurrence $\left\{ \begin{array}{c} g_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbf{N},\ g_{n+1} = g_n r \end{array} \right.$.

[1] La bonne définition serait (si la suite s'appelle g) l'existence d'un réel r tel que $\forall n \in \mathbf{N},\ g_{n+1} = g_n r$. Ces deux définitions diffèrent uniquement lorsqu'un tel r est nul (ce qui n'arrive jamais en pratique).