Représentations graphiques des fonctions

lundi 6 janvier – jeudi 23 janvier

Table des matières

Introduction : activités *découvrir* 2 et 3 p. 15
Exercices : A, C p. 27, 61-64 p. 35-36, 28, 30 p. 86, C p. 129, 74-75 p. 135
D. M. : exos 33, 40-41 p. 58-59
D. S. : épreuve commune

1 Rappels : droite, R et plan

Questions : *Qu'est-ce qu'une droite ? Qu'est-ce qu'un nombre réel ?*
Des créations de notre esprit. Ça n'existe pas dans la réalité ! On ne peut répondre proprement au lycée. Mais l'on peut quand même relier et utiliser ces notions.

Sur une droite, fixons un point (notons-le O et appelons-le une ***origine*** de la droite) et un point distinct de O (que l'on notera I) [dessin]. En reportant la longueur OI un nombre fini de fois depuis O vers I, on obtient un ensemble de points chacun en correspondance avec un entier naturel : *[dessin]*. De même, en reportant OI de l'autre côté, on obtient un ensemble de points en correspondance avec $\mathbf{Z}$ (parfois appelé une ***droite entière***[1]) : *[dessin]*.

Ensuite, en reportant des fractions de la longueur OI, on obtient une ***droite rationnelle***, ensemble de points en correspondance avec $\mathbf{Q}$: *[dessin avec $-\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1]*

A-t-on ainsi obtenu tous les points de la droite de départ ? NON : on peut montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel *[dessin avec le "trou" $\sqrt{2}$]*. Or il y a beaucoup de "trous", beaucoup d'autres nombres irrationnels – et même beaucoup plus que de rationnels... Quand on "bouche" les "trous" de la droite rationnelle, les nombres correspondant rajoutés vont former (avec $\mathbf{Q}$) l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels. La droite ainsi "complétée" s'appelle une ***droite réelle***.

On retiendra les inclusions :

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}.$$

Question : *Qu'est-ce qu'un plan ?*

[1] vient de "nombre entier", pas de "tout entier"

Suivons les mêmes idées que pour une droite. Prenons deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ sécantes dont on note O l'intersection. Choisissons un point $I \in \mathcal{D}$ et un point $J \in \mathcal{E}$ [dessin]. En reportant OI et OJ depuis O vers I et J, on obtient un ensemble de points en correspondance avec $\mathbf{N}^2 = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ (ensemble des couples d'entiers naturels) : [dessin]. En reportant dans les deux sens, on obtient un ensemble de points (appelé un ***réseau***) en correspondance avec $\mathbf{Z}^2 = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ (ensemble des couples d'entiers relatifs) : [dessin]. En fractionnant, on obtient un correspondant de $\mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$, qui comporte des trous (par exemple le points correspondant au couple $(1, \sqrt{2})$). En bouchant ces trous, on obtient un plan, qui est naturellement en correspondance avec $\mathbf{R}^2$.

Définitions. *Soit P un plan. On appelle **repère** de P tout triplet ordonné de points non alignés de P. Le premier point s'appelle l'**origine** du repère, la droite joignant l'origine au deuxième (resp. troisième) point s'appelle l'**axe des abscisses** (resp. **axe des ordonnées**) du repère.*

*Un repère (O, I, J) est dit **orthogonal** lorsque ses deux axes sont orthogonaux, il est dit **orthonormé** si de plus les longueurs OI et OJ sont égales à 1.*

Soient P un plan et R un repère de P. Soit A un point de P.

*On appelle **abscisse** et **ordonnée** de A dans le repère R les nombres réels x et y tels que le couple $(x, y) = \binom{x}{y}$ corresponde au point A. Ces deux nombres sont également appelés les **coordonnées** de A dans le repère R. On les note très souvent x_A et y_A respectivement (où le repère est sous-entendu).*

Exemples : $\binom{1}{0}$, $\binom{0}{1}$, $\binom{3}{2}$, $\binom{-1}{1}$, $\binom{4}{-1}$.

Résumé.

1. En seconde, on ne définit ni une droite ni l'ensemble $\mathbf{R}$. Mais les deux sont en correspondance *via* le choix d'une origine et d'une unité "dirigée".
2. En seconde, on ne définit pas un plan. Mais un plan P est en correspondance avec l'ensemble $\mathbf{R}^2$ des couples de réels *via* le choix d'un repère de P : associer à tout point A de P le couple (x_A, y_A) de ses abscisse et ordonnée dans le repère considéré.

2 Graphe d'une fonction

Il peut être pratique de représenter les images par une fonction d'un nombre fini de nombres dans un tableau.

Exemple. Notons $c : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{Q} & \longrightarrow & \mathbf{Q} \\ t & \longmapsto & 2t^2 \end{array} \right.$. On peut dresser le tableau suivant :

t	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	1
$c(t)$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{8}{9}$	2

Fixons un repère dans un plan. On représente alors le point de coordonnées $\binom{t}{c(t)}$ (dans le repère donné) lorsque t décrit les nombres donnés : [dessin]. Plus on rajoute de points, plus une "courbe" semble se dessiner. Cette courbe "représente" c en un sens que l'on précisera : c'est donc une courbe *représentative*.

Définition. *Soit f un fonction. Soit R un repère d'un plan. On appelle **courbe représentative** de f (ou **graphe** de f) dans le repère R l'ensemble des points de coordonnées $\binom{x}{f(x)}$ dans le repère R lorsque le nombre x parcourt le domaine D_f.*

Remarque. Si l'on appelle Π le plan considéré, on peut écrire ce graphe sous la forme (on sous-entend le repère R)

$$\{P \in \Pi\,;\, \text{ordonnée}\,(P) = f\,(\text{abscisse}\,(P))\},$$

ce qui se lit littéralement "*l'ensemble des P appartenant à Π tels que ordonnée$(P) = f\,($abscisse$\,(P))$*" ou (de façon plus coulée) "*l'ensemble des points du plan Π dont l'ordonnée vaut l'image par f de l'abscisse*".

Remarque. Il est *impossible* de dessiner le graphe d'une fonction car le domaine comporte quasiment toujours une *infinité* de points (et dans un tableau nous ne pouvons représenter qu'un nombre *fini* de valeurs). On peut cependant s'aider d'un tableau pour tracer *approximativement* le graphe, donner son allure générale.

Exemple-activité. Donner l'allure générale des graphes des fonctions suivantes en choisissant une "fenêtre" convenable : $t \mapsto t$, $t \mapsto \frac{1}{2}t + 1$, $t \mapsto 3t - 2$, $t \mapsto 2t^2$, $t \mapsto t^2 - 2t$, $t \mapsto \frac{1}{2}t^2 - 3t + 5$, $t \mapsto \frac{1}{t}$, $t \mapsto \frac{1}{t-1}$, $t \mapsto \frac{2t}{t+1}$, $t \mapsto$ (le plus petit entier $\geq t$).

Réciproquement, si l'on se donne une "courbe" dans le plan, on pourra lire l'image d'un nombre x en regardant (si elle fait sens) l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse x : [dessin].

★ Pour qu'une "courbe" représente une fonction, il faut et il suffit que, pour tout nombre x, il n'y ait qu'un plus un point de la courbe d'abscisse x, *i. e.* que toute droite verticale ne rencontre la courbe qu'en au plus un point.

Contre-exemples : un courbe bouclée comme γ, une courbe avec allers-retours comme Ω.

Résumé.

1. Se donner une fonction de domaine D, c'est comme se donner une "courbe" $\mathcal{C}$ dans $D \times \mathbf{R}$ telle que toute droite verticale coupe $\mathcal{C}$ exactement en un point.
2. Pour lire l'image d'un $x \in D_f$, on trace la droite verticale d'abscisse x et on lit l'ordonnée du point d'intersection avec le graphe.

Certaine propriété de la fonction se "voient" sur son graphe. Cette vision *n'est pas une démonstration* propre mais elle est utile.

3 Variation

Problème : étant donnés une fonction f et deux nombres a et b distincts dans D_f, peut-on comparer leurs images par f sans calculer ces dernières ?

Vu l'équivalence $x \leq y \iff y - x \geq 0$ (valide pour tous réels x et y), ce problème revient à déterminer le signe de la différence $f(b) - f(a)$ connaissant celui de $b - a$, ce qui peut se faire grâce à la règles des signes si l'on connaît le signe du *produit* de ces deux différences. Il sera plus commode (et sensé) de considérer le *rapport* plutôt que le produit de ces deux différences (la règle des signes est la même), ce qui nous amène à étudier des rapports de différences. Une différence mesurant tout aussi bien un *accroissement* ou une *variation*, ces rapports seront également appelés ***taux d'accroissement(s)*** ou ***taux de variation(s)***.

Rappel. Soit R un repère dans un plan. La ***pente*** (ou le ***coefficient directeur***[2]) d'une droite D est défini par le rapport $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ où A et B sont deux points distincts de cette droite (le théorème de Thalès nous assure que ce taux de variation ne dépend pas des points choisis).

Exemple génériques : [avec dessins]

1. pente positive : la droite "monte"
2. pente négative : la droite "descend"
3. pente nulle : la droite est "plate", horizontale
4. pente infinie : la droite est "un mur", est verticale.

Définition. *Soit f une fonction. Soient a et b distincts dans D_f. On appelle* ***taux de variation*** *(ou* ***d'accroissement****) de f entre a et b le rapport $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$*

Remarque. [dessin] Un taux de variation $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ mesure la pente de la corde reliant les points $\binom{a}{f(a)}$ et $\binom{b}{f(b)}$ du graphe de f (dans n'importe quel repère).

Définition. Soit I un intervalle inclus dans D_f.

Lorsque le taux de variation entre deux nombres quelconques de I est toujours positif, on dit que f ***croît*** *(ou est* ***croissante****) sur I* [dessin : on voit que le graphe de f "monte" sur I]. *Cela revient à ce que l'ordre de deux nombres de I est* le même que *celui de leurs images, ce qui s'écrit*[3]

$$\forall a \in I,\ \forall b \in I,\ a \leq b \Longrightarrow f(a) \leq f(b)$$

(en effet, les variations $b - a$ et $f(b) - f(a)$ sont du même signe ssi leur quotient est positif).

[2] À ce stade, il n'y a aucun "efficient" auquel se rapporterait un quelconque coefficient (fût-il directeur). Cela viendra avec les fonctions affines ou les équations de droites. En attendant (et même après), nous préférerons dire *pente* qui est bien plus parlant et bien plus court.

[3] en toute rigueur, il faudrait regarder à part le cas $a = b$ (exclu par la bonne définition du taux $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$) mais alors l'implication est tautologique (du vrai implique du vrai).

De même, lorsque le taux d'accroissement entre deux points quelconques de I est toujours négatif, on dit que f ***décroît*** *(ou est* ***décroissante****) sur I* [dessin : le graphe "descend"]*. Cela revient à ce que f* inverse *l'ordre, ce qui s'écrit*

$$\forall a \in I,\ \forall b \in I,\ a \leq b \Longrightarrow f(a) \geq f(b).$$

Lorsque le taux de variation est toujours nul, on dit que f est ***constante*** *sur I* [dessin : le graphe est "plat"].

Exemples. (les dix mêmes qu'à l'activité précédente)

La fonction $t \mapsto t$ croît sur $\mathbf{R}$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{2}t + 1$croît sur $\mathbf{R}$.

La fonction $t \mapsto 3t - 2$ croît sur $\mathbf{R}$.

La fonction $t \mapsto 2t^2$ décroît sur $\mathbf{R}_-$ et croît sur $\mathbf{R}_+$. ★ Elle ne croît pas sur $\mathbf{R}$ (car le taux de variation entre -2 et 1 n'est pas positif) et elle ne décroît pas sur $\mathbf{R}$ (car le taux de variation entre -1 et 2 n'est pas négatif) !

La fonction $t \mapsto t^2 - 2t$ décroît sur $]-\infty, 1]$ et croît sur $[1, \infty[$. Elle ne croît pas sur $\mathbf{R}$ et elle ne décroît pas sur $\mathbf{R}$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{2}t^2 - 3t + 5$ décroît sur $]-\infty, 3]$ et croît sur $[3, \infty[$. Elle ne croît pas sur $\mathbf{R}$ et elle ne décroît pas sur $\mathbf{R}$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ décroît sur $\mathbf{R}_-^*$ et décroît sur $\mathbf{R}_+^-$ mais ★ elle ne décroît pas sur $\mathbf{R}^*$! (En effet, le taux de variation entre -1 et 1 n'est pas négatif (il vaut 1)).

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t-1}$ décroît sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, \infty[$ mais pas sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$.

La fonction $t \mapsto \frac{2t}{t+1} = 2 - \frac{2}{t+1}$ croît sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, \infty[$ mais pas sur $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

La fonction $t \mapsto$ (le plus petit entier $\geq t$) croît sur tout $\mathbf{R}$, elle est constante pour tout $a \in \mathbf{Z}$ sur l'intervalle $[a, a+1[$.

Donner les variations d'une fonction f, c'est découper le domaine D_f en intervalle sur chacun desquels f croît ou f décroît. On représente ces variations dans un ***tableau de variation***.

Résumé. Pour répondre au problème posé au début (on a invoqué une fonction f et deux nombres $a \neq b$ dans D_f) :

1. déterminer l'ordre de a et b ;
2. déterminer les variations de f sur un intervalle contenant a et b ;
3. si f croît ou décroît sur un tel intervalle, conclure (selon que f préserve l'ordre sur cette intervalle ou qu'elle l'y inverse).

4 Fonctions de références

4.1 Fonctions affines : droites

Soient a et b deux réels. La fonction $t \mapsto at + b$ s'appelle une ***fonction affine***. Le réel a s'appelle sa ***pente*** (ou son ***coefficient directeur***), le réel b son ***ordonnée à l'origine***.

Lorsque $b = 0$, on dit que la fonction $t \mapsto at + b$ est ***linéaire***. Dans tous les cas, son graphe est une droite[4] de pente[5] a et dont l'ordonnée du point à la verticale de l'origine[6] est b :

$a \diagdown b$	> 0	$= 0$	< 0
> 0			
$= 0$			
< 0			

.

Son sens de variation est donc donné par le signe de a (croissant si $a > 0$, constant si $a = 0$, décroisant si $a < 0$).

Pour tracer le graphe d'une fonction affine, on peut calculer deux images, placer les deux points du graphe correspondants et tracer la droite passant par ces deux points. Cette méthode donne un graphe précis autour des points placés mais de plus en plus faux lorsqu'on s'éloigne de ces points. Pour éviter cela, on pourra retenir que

[4] ce qui justifie le terme *linéaire* (le graphe est une *ligne* droite) ; on ne peut pas expliquer à ce stade le terme *affine*

[5] le coefficient directeur *dirige* le graphe au sens où il donne la *direction* de cette droite

[6] ce qui justifie la terminologie "ordonnée à l'origine"

1. le point $(0, b)$ est toujours sur le graphe (c'est le point "à l'origine") ;
2. lorsqu'on avance de 1 sur les abscisses, on monte de a sur les ordonnées.

Exemples : les trois de l'activité précédentes.

Supposons désormais $a \neq 0$. Le tableau ci-dessus permet de trouver le signe de $at + b$ selon la position d'un réel t par rapport à $-\frac{b}{a}$. Observer que ce dernier est d'image nulle : $a\left(-\frac{b}{a}\right) + b = -a\frac{b}{a} + b = -b + b = 0$.

Application 1. *Soit $r \in \mathbf{R}$. Donner le signe de $(r+1)(6r-3)$.*

Le premier facteur s'annule si $r = -1$, le second si $r = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. On en déduit le tableau de signes suivant, où la dernière ligne (celle qui nous intéresse) a été rempli grâce à la règles de signes :

t	$-\infty$ $\quad -1$	$\frac{1}{2}$	∞
$t+1$	$-$	$+$	$+$
$6t-3$	$-$	$-$	$+$
$(t+1)(6t-3)$	$+$	$-$	$+$

.

Application 2. *Trouver les réels r tels que $(2r-1)(6-10r) \geq 0$.*

On procède comme ci-dessus. Le premier facteur s'annule si $r = \frac{1}{2}$, le second si $r = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$ $\quad \frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	∞
$2x-1$	$-$	$+$	$+$
$6-10x$	$+$	$+$	$-$
$(2x-1)(6-10x)$	$-$	$+$	$-$

.

L'inéquation considérée admet donc pour ensemble de solutions l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right]$.

4.2 Fonctions quadratiques : paraboles

Nous avons déjà rencontré la fonction $t \mapsto t^2$ qui décroît sur $\mathbf{R}_-$ et qui croît sur $\mathbf{R}_+$ [graphe]. Son graphe est une ***parabole***[7], la même courbe que décrit un objet lancé en l'air sur Terre.

★ On ne peut pas "simplifier" les carrés ! Par exemple, 18 et -18 ont même carré mais sont distincts. Cet exemple est générique au sens de la proposition suivante : $\forall a \in \mathbf{R},\ \forall b \in \mathbf{R},\ a^2 = b^2 \iff (a = b \text{ ou } a = -b)$. Montrons-la. Soient a et b deux réels. On a les équivalences

$$a^2 = b^2 \iff a^2 - b^2 = 0 \iff (a-b)(a+b) = 0 \iff (a - b = 0 \text{ ou } a + b = 0) \iff (a = b \text{ ou } a = -b).$$

★ On ne peut pas sortir le $+$ d'un carré ! Il suffit pour s'en convaincre de dessiner l'identité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$: l'aire d'un carré de côté $a+b$ est la somme des aires de quatre rectangles (un d'aire ab, un d'aire ba, un carré d'aire a^2 et un carré d'aire b^2).

On peut montrer que toute fonction de la forme $t \mapsto at^2 + bt + c$ peut s'écrire $t \mapsto a(t-\alpha)^2 + \beta$ pour certains réels α et β, ce qui montre que toutes ces fonctions *quadratiques*[8] ont pour graphe une parabole (plus ou moins "étirée") :

$\beta \diagdown a$	> 0	< 0
> 0		
$= 0$		
< 0		

.

Par exemple, on a les égalités (à t réel fixé)

$$\begin{aligned} t^2 - 2t &= \left(t^2 - 2t + 1\right) - 1 = (t-1)^2 - 1 \text{ [graphe]}, \\ \frac{1}{2}t^2 - 3t + 5 &= \frac{\left(t^2 - 6t + 9\right) - 9 + 10}{2} = \frac{(t-3)^2 + 1}{2} \text{ [graphe]}, \\ 7 - 2t - t^2 &= 8 - \left(1 + 2t + t^2\right) = 8 - (1+t)^2 \text{ [graphe]}. \end{aligned}$$

[7] on retrouve dans ***bal**istique* la même étymologie que dans *para**bole*** : l'idée de *lancer*

[8] adjectif relatif à *carré*, pour signifier d'un argument *au carré*

4.3 Fonctions homographiques : hyperboles

Nous avons déjà rencontré la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ qui décroît sur $\mathbf{R}_-^*$ et sur $\mathbf{R}_+^*$ mais pas sur $\mathbf{R}^*$ [graphe]. Son graphe est une ***hyperbole,*** la même courbe que décrit un objet lancé en l'air sur Terre.

★ On ne peut pas sortir le + d'un inverse ! Pour un contre-exemple, on observera que $\frac{1}{2+3} = \frac{1}{5} \neq \frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

On peut montrer que toute fonction de la forme $t \mapsto \frac{at+b}{ct+d}$ peut s'écrire $t \mapsto \frac{a}{c}\frac{1}{t-\alpha} + \beta$ pour certains réels α et β, ce qui montre que toutes ces fonctions *homographiques*[9] ont pour graphe une hyperbole (plus ou moins "étirée"). Par exemple, on a les égalités (à t réel fixé)

$$\frac{2t}{t+1} = \frac{2t+2-2}{t+1} = \frac{2(t+1)-2}{t+1} = 2 - \frac{2}{t+1} \text{ [graphe].}$$

En gérénal, le sens de variation de $t \mapsto \frac{at+b}{ct+d}$ est donné par le signe du déterminant $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

5 Inéquations

Activité C p. 129.
Exercies 74-75 p. 135.

[9] il faut attendre les nombres complexes pour justifier cette terminologie : les homographies transforment les cercles ou droites du plan complexes en cercle ou droites, d'où l'idée de *même graphe*