Dérivation

Marc SAGE

mardi 12 novembre – jeudi 19 décembre

Table des matières

1 Tangente, dérivée **2**

2 Dérivées et *extrema* **3**

3 Dérivées et variations **4**

Introduction : activités *découvrir* 1 & 4 p. 116-117, détermination des tangentes à une parabole
Exercices : QCM 9-12 p. 125, exos 86-91 p. 135, (114 p. 125, 119 p. 127)
D. M. : exo 26-30 & 35 p. 127
D. S. : exos 93-94 p. 135
D. M. 2 : exos 70 p. 133, 74 & 82 p. 134, 95 p. 135

Introduction : un problème physique. *On éclaire le côté convexe d'une parabole par un faisceau lumineux de même direction que l'axe. Déterminer la partie de l'axe où se réfléchissent les rayons.*

Il s'agit dans un premier temps de comprendre comment les rayons se réfléchissent sur la parabole. Si cette dernière était une droite, cela serait connu. Mais si l'on zoome beaucoup autour d'un point A de la parabole, cette dernière semble devenir de plus en plus rectiligne et se confondre avec une droite que l'on appellera sa *tangente* en A : un rayon se réfléchira alors sur la parabole en A comme s'il se réfléchissait sur la tangente en A. Il faut donc comprendre comment déterminer la tangente en A.

Pour définir cette dernière, on va considérer un *autre* point P de la parabole et faire "tendre" le point P vers A : la droite (AP) semble alors "tendre" vers la tangente que l'on cherche. Mettons cela en œuvre.

Fixons un repère où notre parabole a pour équation cartésienne $y = x^2$. Appelons-la $\mathcal{P}$.

Soit $P \in \mathcal{P}$. Notons p son abscisse. Alors la pente de la droite (OP) vaut $\frac{y_P - y_O}{x_P - x_O} = \frac{p^2}{p} = p$ et tend vers 0 lorsque P tend vers 0 : cette pente limite est celle de la droite limite, à savoir celle de la tangente à $\mathcal{P}$ en O, qui est donc la droite passant par O et de pente 0 (l'axe les abscisses).

Soit à présent un autre point $A \in \mathcal{P}$. Notons a son abscisse et posons[1] $\varepsilon := p - a$ (qui tend vers 0 quand P tend vers A). Alors la pente de la droite (AP) vaut $\frac{y_P - y_A}{x_P - x_A} = \frac{(a+\varepsilon)^2 - a^2}{(a+\varepsilon) - a} = \frac{a^2 + 2a\varepsilon + \varepsilon^2 - a^2}{a + \varepsilon - a} = \frac{2a\varepsilon + \varepsilon^2}{\varepsilon} = 2a + \varepsilon$ et tend vers 0 lorsque P tend vers A. La tangente à $\mathcal{P}$ en A est donc la droite passant par A et de pente $2a$.

(Les tangentes à $\mathcal{P}$ étant maintenant connues, on pourrait montrer que tous les rayons se réfléchissent en un même point de l'axe (d'ordonnée $\frac{1}{4}$), donc se *focalisent* un même point, appelé pour cela le ***foyer*** de $\mathcal{P}$.)

Pour expliquer une propriété physique (la focalisation des rayons en le foyer), il nous a fallu introduire la tangente à une parabole à un de ses points. On peut en fait remplacer la fonction représentée $t \mapsto t^2$ par n'importe quelle autre fonction et appliquer la démarche précédente.

1 Tangente, dérivée

Rappel. La ***pente*** (ou ***coefficient directeur***) d'une droite est le rapport de l'accroissement des ordonnées sur l'accroissement des abscisses de deux points distincts quelconques de cette droite (le rapport ne dépend pas des points choisis). La pente $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ est donc un *taux d'accroissement* ou *de variation*. Plus généralement, le ***taux de variation*** (ou ***d'accroissement***) d'une fonction f entre deux nombres a et b de son domaine est le rapport $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$: c'est la pente de la corde reliant les points du graphe de f d'abscisses a et b.

Soit f une fonction. Soit a dans son domaine, soit ε un petit nombre (positif ou négatif) tel que $a + \varepsilon$ reste dans le domaine de f. On fixe un repère du plan. Notons A et P les points du graphe de f d'abscisses respectives a et $a+\varepsilon$. La pente de la corde $[AP]$ vaut $\frac{f(a+\varepsilon) - f(a)}{(a+\varepsilon) - a}$. On peut espérer que, quand P tend vers A, la corde-droite (AP) tend vers ce que l'on voudrait appeler la *tangente* au graphe en A. Or une droite est définie par sa pente et l'un de ses points : (AP) et la tangente passant toutes par A, elles sont définies par leur pente, ce qui motive la définition suivante.

Définitions.

On appelle ***nombre dérivé*** *de f en a la limite (si elle fait sens) de taux d'accroissement $\frac{f(a+\varepsilon) - f(a)}{\varepsilon}$ lorsque ε tend vers 0. Lorsqu'elle fait sens, on la note $f'(a)$ et on dit que f est* ***dérivable*** *en a.*

On appelle ***tangente*** *au graphe de f en le point $(a, f(a))$ la droite passant par ce point et de pente $f'(a)$. Elle admet pour équation cartésienne $y - f(a) = f'(a)((x - a)$.*

On appelle ***fonction dérivée*** *de f la fonction $t \mapsto f'(t)$ définie sur le plus grand ensemble possible. On la note f'.*

(Sanity check : $f'(a)$ désigne à la fois l'image de a par f' ET le nombre dérivé de f en a, notions qui coïncident.)

Exemples-exercices. *(toujours un dessin pour accompagner !)*

Une fonction constante est dérivable sur $\mathbf{R}$ de dérivée nulle (tous les taux d'accroissement sont nuls), chacune de ses tangentes est son graphe.

La fonction $t \mapsto t$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ de dérivée 1 (tous les taux d'accroissement valent 1), chacune de ses tangentes est son graphe.

Soit λ un réel. La fonction linéaire $t \mapsto \lambda t$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ de dérivée λ. Soit μ un réel. La fonction affine $t \mapsto \lambda t + \mu$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ de dérivée λ.

[1] La lettre grecque "ε" se lit *epsilon* et mesure un **é**cart, une **e**rreur, d'où l'analogue du "e" latin. Traditionnellement, les erreurs sont pensées petites, d'où l'adjectif *epsilonesque* de la langue vernaculaire.

L'introduction montre que la fonction quadratique $t \mapsto t^2$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ de dérivée $t \mapsto 2t$.

On montre de même que la fonction cubique $t \mapsto t^3$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ de dérivée $t \mapsto 3t^2$.

On admettra que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, la fonction monomiale $t \mapsto t^n$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ de dérivée $t \mapsto nt^{n-1}$.

On admettra que la fonction racine $t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ de dérivée $t \mapsto \frac{1}{2\sqrt{t}}$.

On admettra que la fonction inverser $t \mapsto \frac{1}{t}$ est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ de dérivée $t \mapsto -\frac{1}{t^2}$.

Ces fonctions de bases permettent, par opérations élémentaires, de construire la plupart des fonctions usuelles en première (sommes, produit, quotient,). Afin de pouvoir dériver ces dernières, il suffit de savoir ce que devient la dérivée après une opération élémentaire.

Propriété. *Soient f et g deux fonctions dérivables sur même ensemble E.*

1. *(combinaison linéaire) Soit λ un réel. Alors la fonction $\lambda f + g$ est dérivable sur E et a pour dérivée $[\lambda f + g]' = \lambda f' + g'$.*
2. *(produit) La fonction fg est dérivable sur E et a pour dérivée $[fg]' = f'g + fg'$.*
3. *(inverse) Si g ne s'annule pas sur E, alors $\frac{1}{g}$ est dérivable sur E et a pour dérivée $\left[\frac{1}{g}\right]' = \frac{g'}{g^2}$.*
4. *(quotient) Si g ne s'annule pas sur E, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur E et a pour dérivée $\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$.*

Sanity checks. Pour le produit, vérifier ce qui se passe quand $g = 1$. Pour l'inverse, prendre $g : t \mapsto t$. Pour le quotient, prendre $g = 1$ puis $g = f$ puis $f = 1$.

Exemples.
Dériver $t \mapsto 2t + t^3 - 4\sqrt{t} - \frac{1}{t}$ (sur $\mathbf{R}_+^*$) donne $t \mapsto 2 + 3t^2 - \frac{2}{\sqrt{t}} + \frac{1}{t^2}$.

Dériver $t \mapsto \frac{3}{t} + \frac{t^5}{10} + \frac{\sqrt{t}}{2} + 4$ (sur $\mathbf{R}_+^*$) donne $t \mapsto -\frac{3}{t^2} + \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{4\sqrt{t}}$.

Exercices : dériver $t \mapsto \square$ en remplaçant successivement le symbole $\square$ par $-t^3 + 3t^2 + 1$, $\frac{2t}{t^2+4}$, $\frac{-t^2+3t-2}{4t}$, $\frac{2}{3t+2}$, $(2t+1)\sqrt{t}$ et $\frac{1}{t} + \frac{4}{1-t}$.

2 Dérivées et *extrema*

Observation : lorsqu'un fonction admet un *maximum* local en un nombre a de son domaine, le graphe de f présente un sommet au point $(a, f(a))$ avec une tangente horizontale. Cela est une conséquence du théorème suivant (admis).

Théorème. *Soit f dérivable sur un intervalle I. Soit $a \in I$ qui n'est pas une borne de I où f admet un* extremum *local. On a alors l'égalité $f'(a) = 0$.*

★ Le théorème est faux (en général) si a est une borne de I : la fonction $t \mapsto t$ est dérivable sur $[0, 1]$, admet un *minimum* global (donc local) en 0 et un *maximum* global (donc local) en 1 mais sa dérivée 1 ne s'annule jamais.

★ La réciproque du théorème est fausse : la fonction $t \mapsto t^3$ a une dérivée nulle en 0 mais n'admet pas d'*extremum* local en 0 puisqu'elle croît strictement sur tout $\mathbf{R}$.

Exemples.
Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$. Soit m un réel où le trinôme $t \mapsto at^2 + bt + c$ est *extremum.* Alors la dérivée de ce trinôme en m est nulle, ce qui s'écrit $2am + b = 0$, d'où $m = -\frac{b}{2a}$. On retrouve le cours sur le second degré.

[dessin] *On place sur un segment de longueur 2 un cloche parabolique de hauteur 1 symétrique par rapport à la médiatrice du segment. Déterminer l'aire maximale d'un rectangle inscrit entre le segment et la cloche.*

On se place dans un repère où le segment est $[0, 2] \times \{0\}$. Notons $p : t \mapsto 1 - (1-t)^2 = 2t - t^2$ une fonction qui modélise notre cloche. Soit R un rectangle inscrit sous la cloche d'aire maximale (on admet qu'il en y a). Notons d la distance entre la médiatrice (d'équation $x = 1$) et un côté de R. L'aire de R vaut

$2d \times p(1-d) = 2d\left(1-d^2\right) = 2d - 2d^3 = A(d)$ où A est la fonction $t \mapsto 2t - 2t^3$. Puisque d maximise A, il annule sa dérivée $A' : t \mapsto 2\left(1-3t^2\right)$, d'où $1 - 3d^2 = 0$ et $d = \frac{1}{\sqrt{3}}$. L'aire de R vaut donc

$$A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}^3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}.$$

(non traité) [dessin] *L'œil d'un observateur détermine l'horizontale. Il regarde un tableau dans un musée. Appelons h et H les hauteurs respectives du bas et du haut du tableau. Déterminer la distance du tableau à laquelle l'observateur doit se placer pour le voir sous le plus grand angle.*

Soit d une telle distance (on admet qu'il y en a). Appelons α l'angle (maximal) sous-tendu par le tableau depuis l'œil. L'aire du triangle associé vaut $\frac{1}{2}(H-h)\,d$. Mais elle vaut aussi (d'après Pythagore) $\frac{1}{2}\sqrt{d^2+h^2}\sqrt{d^2+H^2}\sin\alpha$, d'où l'on tire

$$\frac{(H-h)^2}{\sin^2\alpha} = \frac{\left(d^2+h^2\right)\left(d^2+H^2\right)}{d^2} = d^2+h^2+H^2+\frac{h^2H^2}{d^2} = T\left(d^2\right) \text{ où } T \text{ est la fonction } t \mapsto t+h^2+H^2+\frac{h^2H^2}{t}.$$

Puisque α est maximal et que $\sin^2$ croît, le membre de gauche $\frac{(H-h)^2}{\sin^2\alpha}$ est minimal, donc d^2 minimise la fonction T, donc annule sa dérivée $t \mapsto 1 - \frac{h^2H^2}{t^2}$, d'où $1 - \frac{h^2H^2}{(d^2)^2} = 0$ et[2] $d = \sqrt{hH}$.

3 Dérivées et variations

Le sens de variation étant donné par le signe des cordes, il en est de même "à la limite" : on observe en effet que le signe des pentes des tangentes s'accordent toujours avec les variations. Cela résulte du théorème (admis) suivant.

Théorème. *Soit I un intervalle. Soit f une fonction dérivable sur I. On a les équivalences et implications :*

1. *f croît $\iff f' \geq 0$;*
2. *f décroît $\iff f' \leq 0$;*
3. *$f' > 0 \implies f$ croît strictement ;*
4. *$f' < 0 \implies f$ décroît strictement.*

★ Le théorème est faux si I n'est pas un intervalle : la fonction inverser est de dérivée négative sur $\mathbf{R}^*$ mais n'y décroît pas.

★ Les implications réciproques sont fausses en général : la fonction cube croît strictement sur $\mathbf{R}$ mais sa dérivée s'annule en 0.

Exemples.

On reprend notre trinôme $t \mapsto at^2 + bt + c$. Sa dérivée $t \mapsto 2at + b$ a un signe connu (c'est une fonction affine), d'où les variations du trinôme comme vu en cours.

On reprend notre cloche. La dérivée de l'aire $A' : t \mapsto 2\left(1-3t^2\right)$ est du signe de $\frac{1}{\sqrt{3}} - t$, donc A croît puis décroît, ce qui justifie *a posteriori* que la distance trouvée réalise bien une aire maximale.

On reprend notre œil dans le musée. La dérivée $T' : t \mapsto 1 - \frac{h^2H^2}{t^2}$ est du signe de $t - hH$, donc T décroît puis croît, donc α (vu comme fonction de d) croît puis décroît, ce qui justifie *a posteriori* que la distance trouvée réalise bien une angle maximal.

[2] Cette distance s'appelle la ***moyenne géométrique*** de h et H et admet une construction géométrique très simple, ce qui fournit une construction de la distance recherchée par l'observateur du tableau.