Trinômes quadratiques

13 octobre 2013

Table des matières

Introduction : jeu où élève donne somme et produit et où je trouve les deux nombres.

Énigme : Jeanne et Pierre ont âge différent de 2 et produit 1599. Jeanne est la plus agée. Trouvez-les !
On nomme les inconnues : j et p.
On traduit les hypothèses : $j - p = \pm 2$, $jp = 1599$, $j > p$.
Puis je fais de la magie (pas obligé de savoir refaire mais obligé de pouvoir suivre !). Soit x un réel. On a les équivalences

$$\begin{aligned}
x \in \{j, -p\} &\iff x = j \text{ ou } x = -p \qquad \text{(par définition d'un paire)}\\
&\iff x - j = 0 \text{ ou } x + p = 0\\
&\iff (x-j)(x+p) = 0 \qquad \text{(car un produit est nul ssi l'un au moins des facteurs est nul)}\\
&\iff x^2 - jx + px - jp = 0 \qquad \text{(on a développé)}\\
&\iff x^2 - (j-p)\,x = jp \qquad \text{(on a regroupé les termes de même degré en } x\text{)}\\
&\iff x^2 - 2x = 1599 \qquad \text{(on a utilisé les hypothèses)}\\
&\iff x^2 - 2x + 1 = 1599 + 1 \qquad \text{(on a ajouté 1 des deux côtés)}\\
&\iff (x-1)^2 = 40^2 \qquad \text{(on a reconnu deux carrés parfaits)}\\
&\iff x - 1 = \pm 40 \qquad \text{(on a extrait les racines carrées)}\\
&\iff x = 1 \pm 40 \qquad \text{(on a ajouté 1 des deux côtés)}\\
&\iff x = -39 \text{ ou } x = 41\\
&\iff x \in \{-39, 41\} \qquad \text{(par définition d'une paire).} \ \bowtie
\end{aligned}$$

On vient de montrer pour tout nombre x l'équivalence $x \in \{j, -p\} \iff x \in \{-39, 41\}$, ce qui montre que les ensembles $\{j, -p\}$ et $\{-39, 41\}$ ont mêmes éléments. Pour des raisons de signes, on trouve $j = 41$ et $p = 39$.

1 Fonctions trinomiales

Définition. *On appelle **trionôme de degré** 2 ou **fonction trinomiale de degré** 2 toute fonction de la forme* $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & at^2 + bt + c \end{array}\right.$ *où a est un nombre non nul et où b et c sont des nombres. Un tel trinôme est somme de trois termes : son **terme constant** c (qui ne dépend pas de t), son **terme linéaire** bt (qui est linéaire en t) et son **terme quadratique** at^2 (qui contient un carré). De même, les coefficients a, b et c sont appelés **coefficients** respectivement **quadratique**, **linéaire** et **constant**.*

Exemples 0 : $x \mapsto 5x^2 - 7x + 4$, $d \mapsto d^2 + 18d - 3$.

Exemple 1 : la fonction "élever au carré" $x \mapsto x^2$. Un rapide tableau de valeurs $\bowtie$

t	0	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
t^2	0	$0,25$	1	2	$2,25$	4	$6,25$

donne une idée du graphe : une ***parabole*** d'axe celui des ordonnées et de sommet l'origine.

Question : qu'obtient-on en symétrisant le graphe de $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & t^2 \end{array}\right.$ (demi-parabole) par rapport à la droite d'équation $y = x$? On obtient le graphe de la fonction "racine carrée" $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \sqrt{t} \end{array}\right.$. Cette dernière est définie sur $\mathbf{R}_+$ et y croît strictement :

$$\forall a \geq 0,\ \forall b \geq 0,\ a \leq b \iff \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$$

(*i. e.* : pour tous réels positifs a et b, les comparaisons $a \leq b$ et $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ sont équivalentes ; ou encore : deux réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs racines carrées).

Exemple 2 : $t \mapsto t^2 - 1$. Graphiquement, son graphe s'obtient en translatant le graphe de $t \mapsto t^2$ de 1 vers le bas. Cette nouvelle parabole coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses 1 et -1 (les réels d'image nulle par la fonction considérée $t \mapsto (t-1)(t+1)$).

$\bowtie$**Exemple 3** : $t \mapsto (t-1)^2$. Graphiquement, son graphe s'obtient en translatant le graphe de $t \mapsto t^2$ de 1 vers la droite. Pour ne pas se tromper de signe, repérer le sommet du graphe, çàd en quelle abcisse le trinôme est extrémal (ici $(t-1)^2$ est minimal quand $t = 1$).

Exemple 4 : $t \mapsto 2t^2$. Graphiquement, son graphe s'obtient en "étirant" verticalement le graphe de $t \mapsto t^2$ d'un facteur 2.

Exemple 5 : $t \mapsto \frac{1-t^2}{3}$. Graphiquement, on part du graphe de $t \mapsto t^2$, on le symétrise par rapport à l'axe des abscisses pour obtenir le graphe de $t \mapsto -t^2$, on translate ce dernier verticalement de 1 pour obtenir le graphe de $t \mapsto 1 - t^2$ (observer qu'il coupe l'axe des abscisses en ± 1), puis on "écrase" ce dernier verticalement d'un facteur 3.

2 Racines

Définition. *Soit T un trinôme. On appelle **racine** de T tout réel dont l'image par T est nulle.*

$\bowtie$**Exemples.**

Le trinôme $t \mapsto (t-18)^2$ admet une unique racine 18 (dite double : le graphe est tangent à l'axe des abscisses).

Le trinôme $x \mapsto (x+42)^2$ admet une unique racine double -42.

Le trinôme $x \mapsto x^2 - 9 = (t-3)(t+3)$ admet deux racines ± 3.

Le trinôme $t \mapsto t^2 - 18 = \left(t - 2\sqrt{3}\right)\left(t + 2\sqrt{3}\right)$ admet deux racines $\pm 2\sqrt{3}$.

Le trinôme $t \mapsto t^2 + 18$ reste toujours plus grand que $0 + 18$ (puisque le carré t^2 est positif), donc n'a pas de racines.

Quelles sont les racines du trinômes $T : x \mapsto (x-2)^2 - 9$? On factorise : pour tout t réel on a

$$T(t) = (t-2)^2 - 3^2 = ((t-2) - 3)((t-2) + 3) = (t-5)(t+1),$$

ce qui montre que T a pour racines -1 et 5. On peut alors tracer le graphe de T : vu le carré $(x-2)^2$ positif, T admet un minimum -9 atteint en 2. Ce sommet de coordonnées $(2, -9)$ et les deux points de coordonnées $(-1, 0)$ et $(5, 0)$ fournissent trois points donnant l'allure du graphe (branches vers le haut)

$\bowtie$Quelles sont les racines du trinômes $\tau : t \mapsto 49 - (t-3)^2$? On factorise : pour tout x réel on a

$$\tau(x) = 7^2 - (x-3)^2 = (7 - (x-3))(7 + (x-3)) = (10 - x)(x+4),$$

ce qui montre que τ a pour racines -4 et 10. On peut alors tracer le graphe de τ : vu le $-(t-3)^2$ négatif, τ admet un maximum 49 atteint en 3. Ce sommet de coordonnées $(3, 49)$ et les deux points de coordonnées $(-4, 0)$ et $(10, 0)$ fournissent trois points donnant l'allure du graphe.

À retenir. Soit A et B deux réels. Le trinôme $t \mapsto (t-A)^2 - B$ $\left\{\begin{array}{l} \text{n'a pas de racine si } B < 0\,; \\ \text{a une racine double } A \text{ si } B = 0\,; \\ \text{a deux racines distinctes } A \pm \sqrt{B} \text{ si } B > 0. \end{array}\right.$

Vu l'intérêt pour les racines, peut-on mettre tout trinôme sous la forme ci-dessus ? La réponse sera *oui* (au coefficient quadratique près).

3 Forme canonique

Propriété-définition. *Tout trinôme de degré 2 peut s'écrire sous la forme* $t \mapsto a(t-A)^2 + B$ *pour certains réels* A *et* B *et où* a *désigne le coefficient quadratique. Cette forme s'appelle la* ***forme canonique*** *du trinôme.*

$\bowtie$**Intérêt 1.** Tracer le graphe pour trouver les variations et les extremums :

1. tracer la parabole-graphe de $t \mapsto t^2$;
2. la translater de $+A$ horizontalement ;
3. la translater de $+B$ verticalement ;
4. l'"étirer" verticalement d'un facteur a.

Intérêt 2. Trouver les racines et le signe. Si $-B$ est un carré, on peut factoriser

$$(t-A)^2 + B = (t-A)^2 - \sqrt{-B}^2 = \left(t - A - \sqrt{-B}\right)\left(t - A + \sqrt{-B}\right),$$

d'où les racines $A \pm \sqrt{-B}$ et le tableau de signes

x	$-\infty$ $A-$	$\sqrt{-B}$ $A+$	$\sqrt{-B}$ ∞
$x - A - \sqrt{-B}$	$-$	$-$	$+$
$x - A + \sqrt{-B}$	$-$	$+$	$+$
$(x-A)^2 + B$	$+$	$-$	$+$

.

$\bowtie$

4 Discriminant

On peut deviner, à partir de la forme développée d'un trinôme, tout de suite le nombre de ses racines. Un outil permet de *discriminer* les trois cas possibles : il s'appelle le ***discriminant***.

Définition. *On appelle* ***discriminant*** *d'un trinôme le carré de son coefficient linéaire moins quatre fois le produit de ses coefficients quadratique et constant.*

Soit T un trinôme de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$. Son discriminant vaut $b^2 - 4ac$.

Soit t un réel. On peut vérifier (exercice !) l'égalité $T(t) = a\left(\left(t + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$ où l'on a noté le Δ discriminant. Ainsi :

1. si $\Delta < 0$, alors $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ et la parenthèse reste > 0 : le trinôme n'a pas de racines ;
2. si $\Delta = 0$, alors le trinôme a une racine double $-\frac{b}{2a}$ et on a raté une identité remarquable !
3. si $\Delta > 0$, alors le terme $\frac{\Delta}{4a^2}$ est un carré et on peut factoriser la parenthèse

$$\begin{aligned}\left(t + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} &= \left(t + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 \\ &= \left(\left(t + \frac{b}{2a}\right) - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)\left(\left(t + \frac{b}{2a}\right) + \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right) \\ &= \left(t - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(t - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right),\end{aligned}$$

ce qui montre que le trinôme a deux racines $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exemples.

Le trinôme $x \mapsto x^2+2x+1$ a pour discriminant $2^2-4\cdot1\cdot1=0$, donc on a raté une identité remarquable. De fait, on a l'égalité $x^2+2x+1=(x+1)^2$, d'où une racine double -1.

$\bowtie$ Le trinôme $t \mapsto t^2-2t+2$ a pour discriminant $(-2)^2-4\cdot1\cdot2=-8$, donc n'a pas de racines. On peut d'ailleurs vérifier (pour tout réel t) que $t^2-2t+2=(t-1)^2+1$.

Le trinôme $t \mapsto 2t^2-12t+10$ a pour discriminant $(-12)^2-4\cdot2\cdot10=144-80=64=8^2$, donc admet pour racines $\frac{-(-12)+8}{2\cdot2}=\frac{20}{4}=5$ et $\frac{-(-12)-8}{2\cdot2}=\frac{12}{4}=3$. De fait, on vérifie (pour tout réel t) que $2(t-5)(t-3)=2t^2-12t+10$.

Le trinôme $x \mapsto -3x^2+7t-4$ a pour discriminant $7^2-4\cdot(-3)\cdot(-4)=49-48=1$, donc admet pour racines $\frac{-7+1}{2\cdot(-3)}=\frac{-6}{-6}=1$ et $\frac{-7-1}{2\cdot(-3)}=\frac{-8}{-6}=\frac{4}{3}$. On pourra vérifier (pour tout réel x) que $-3\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-1)=(4-3x)(x-1)=-3x^2+7x-4$.

Remarque (hors programme). En développant $(t-\lambda)(t-\mu)=t^2-(\lambda+\mu)t+\lambda\mu$, on peut LIRE la somme et le produit des racines d'un trinôme (de coefficient quadratique valant 1) directement dans les coefficient :

1. la somme vaut moins le coefficient linéaire ;
2. le produit vaut le coefficient constant.

Exemple. Les racines du trinôme $x \mapsto x^2-11x+28$ ont pour somme 11 et produit 28. Vérifions-le. Le discriminant de ce trinôme vaut $(-11)^2-4\cdot28=121-112=9=3^2$, donc a pour racines $\frac{-(-11)+3}{2}=\frac{14}{2}=7$ et $\frac{-(-11)-3}{2}=\frac{8}{2}=4$: on retrouve la somme $4+7=11$ et le produit $4\cdot7=28$.

Ceci explique le tour de magie en introduction !