Fonctions

Marc SAGE

jeudi 5 septembre – jeudi 17 octobre

Table des matières

Introduction : partir d'un bon pied 1-3 p. 12
Exercices : 25 p. 28., 32 p. 30, 35, 37 p. 31, 47-52 p. 33, (79-81 p. 39, 83 p. 40, 85 p. 41)
DM : exo 37 p. 31
DS : exo 3 et 6 de la feuille d'exos

Introduction : vers "être fonction de"

Quel est le nombre d'élèves de la classe ? *Ça dépend.* De plein de choses : temps, imprévus, moments de la journée, classe, année... Quel est la couleur des cheveux du profs ? Idem. La température de l'atmosphère ? Idem

Lorsqu'une grandeur (souvent un nombre) *dépend de* plusieurs choses (le temps, le lieu, d'autres nombres...), on dit que la grandeur est *fonction de* ces choses et on appelle ces choses les paramètres de la grandeur. ★ Il est impossible de trouver tous les paramètres d'une grandeur (ce sont des limites de la science). Pour simplifier, on étudie d'abord les grandeurs fonctions d'*un seul* paramètre

Remarque. La grandeur "inverse d'un nombre" dépend bien sûr du nombre considéré mais on ne peut pas choisir n'importe quel nombre ! En effet, l'inverse de zéro n'a pas de sens. De même, la grandeur "racine carrée d'un nombre" n'a pas de sens lorsque ce nombre est strictement négatif. Les paramètres sont donc "limités" à un certain ensemble.

1 Domaine, image, antécédent

Défintion. *Se donner une **fonction**, c'est*

1. *se donner un ensemble de nombres, appelé **ensemble de définition** ou **domaine de définition** de la fonction et noté D_f (si la fonction est notée f) ;*
2. *associer à chaque élément x de D_f un nombre (et $\underline{\underline{\text{un seul}}}$!) appelé l'**image** de x par f.*

*Si f est une fonction et si x est un élément de D_f, l'image de x par f sera noté $f(x)$ (prononcer "f de x", souvenir de "fonction de x") et x est appelé $\underline{\underline{\text{un}}}$ **antécédent** de $f(x)$.*

⋈**Exemple 1.** Appelons d la fonction "doubler" définie sur $\mathbf{N}$ (ensemble des ***entiers naturels*** : $0, 1, 2, 3, ...$). Remarquer que $D_d = \mathbf{N}$. On a $d(3) = 2 \times 3 = 6$, c'est-à-dire 6 est l'image de 3 par d, ou encore 3 est un antécédent de 6 par d. De même, on a $d(7) = 14$, ce qui se reformule en "7 est un antécédent de 14 par c" ou "14 est l'image par c de 7".

Exemple 2. Appelons c la fonction "élever au carré" définie sur $\mathbf{Z}$ (ensemble des ***entiers relatifs*** : $0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, ...$). Remarquer que $D_c = \mathbf{Z}$. On a $c(5) = 5^2 = 25$; en d'autres termes, 25 est l'image de 5 par c, ou encore 5 est un antécédent de 25 par c. Or on a par ailleurs $c(-5) = (-5)^2 = 25$, ce qui montre que -5 est *aussi* un antécédent de 25. Ainsi 25 possède-t-il deux (au moins) antécédents par c.

Question : combien 0 a-t-il d'antécédents par c ? Déjà 0 en est un puisque $c(0) = 0^2 = 0$. Montrons qu'il est le seul.

⋈ Soit a un antécédent de 0 (impératif du verbe *être* : littéralement, on demande à un antécédent de 0 d'*être* et on appelle a l'antécédent ainsi invoqué). On a donc $c(a) = 0$, çàd $a^2 = 0$, ou encore $a \cdot a = 0$. Or un produit est nul ssi l'un l'un (au moins) des facteurs est nul, ce qui permet de déduire $a = 0$ ou $a = 0$, d'où $a = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Autre façon de répondre à la question. Nous cherchions à prouver l'équivalence "être un antécédent de 0 par c" $\iff$ "valoir 0". Le paragraphe précédent montrait le sens $\Longrightarrow$ et celui d'avant encore montre le sens $\Longleftarrow$. Il était possible de montrer les deux sens à la fois comme suit. Soit x un élément de D_c. On a alors les équivalences :

$$\begin{aligned}
& x \text{ est un antécédent de 0 par } c \\
\iff\ & c(x) = 0 \quad \text{(par définition d'un antécédent)} \\
\iff\ & x^2 = 0 \quad \text{(par définition de } c\text{)} \\
\iff\ & x \cdot x = 0 \quad \text{(par définition d'un carré)} \\
\iff\ & x = 0 \text{ ou } x = 0 \quad \text{(par le "théorème du produit nul" rappelé plus haut)} \\
\iff\ & x = 0.
\end{aligned}$$

En ne regardant que les premier et dernier "maillons" de la "chaîne" d'équivalences, on obtient ce que l'on voulait.

Exemple 3. Appelons q la fonction définie sur $\mathbf{Q}$ (ensemble des ***nombres rationnels*** (*ratio = rapport = quotient*), çàd des fractions d'entiers) et qui associe 42 à tout rationnel. Le domaine de définition D_c vaut

$\mathbf{Q}$. On a les égalités $q\left(\frac{1}{5}\right) = 42$, $q(14) = 42$, $q(0) = 42$... On dit que la fonction q est ***constante*** : lorsque le paramètre varie, son image ne change pas, elle reste constante. Ainsi l'image de tout rationnel vaut-elle 42 ; en d'autres termes, les antécédents de 42 par q sont tous les rationnels, on encore l'ensemble des antécédents de 42 par q est $\mathbf{Q}$.

$\bowtie$**Question** : combien 18 possède-t-il d'antécédents par q ? Montrons qu'il n'y en a pas. Raisonnons par équivalences. Soit $x \in D_q$. On a alors les équivalences :

$$\begin{aligned} & x \text{ est un antécédent de 18 par } q \\ \iff & q(x) = 18 \quad \text{(par définition d'un antécédent)} \\ \iff & 42 = 18 \quad \text{(par définition de } q\text{), ce qui est faux.} \end{aligned}$$

On vient de montrer que, pour tout élément de D_q, être un antécédent de 18 par q est faux. En d'autres termes : aucun élément de D_q n'est un antécédent de 18 par q, ce qui conclut la preuve.

Autre façon de répondre à la question. Soit a un antécédent de 18 par q. On a alors $q(a) = 18$ (par définition d'un antécédent) mais on a par ailleurs $q(a) = 42$ (par définition de q), d'où l'égalité $18 = 42$, ce qui est absurde. Nous avons montré que l'existence d'un antécédent de 18 menait à une contradiction : il ne peut donc en exister.

Traduisons encore autrement : l'ensemble des antécédents de 42 par q ne contient aucun élément. On dit qu'il est ***vide*** et on le note $\emptyset$ (appelé l'***ensemble vide***).

Résumé.

1. Une fonction agit sur un certain ensemble de nombres ; elle transforme un élément de son domaine en son image.
2. À un élément du domaine correspond une seule image.
3. À un nombre peuvent correspondre plusieurs antécédents ou aucun.

★ Même si l'image $f(x)$ est fonction de x (elle en dépend), ce n'est pas la fonction f !

(image du distributeur de boissons : les paramètres sont la somme d'argent et le code qu'on lui donne, les images sont les boissons distribuées, la fonction est le distributeur) $\bowtie$

2 Expression fonction d'un paramètre

Soit f une fonction, soit $x \in D_f$. Souvent, il est possible d'exprimer l'image $f(x)$ comme une expression littérale où le symbole x peut apparaître. Par exemple (les fonctions d, c et q sont les mêmes qu'à la section précédente) :

1. si $f = d$, alors $f(x) = 2x$;
2. si $f = c$, alors $f(x) = x^2$;
3. si $f = q$, alors $f(x) = 42$ (ici le paramètre n'apparaît pas dans l'expression-image)

En d'autres termes, on peut souvent exprimer $f(x)$ à l'aide d'une expression fonction de x. Dans ce cas, il est usuel de décrire la fonction f sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{ccc} D_f & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{array}{c}\text{l'expression littérale où } x \text{ peut apparaître} \\ \text{et qui représente l'image de } x \text{ par } f\end{array} \end{array} \right.$$

(lire : "*la fonction qui va de D_f dans (ou vers) $\mathbf{R}$ et qui à un x élément de D_f associe l'expression [...] image de x par f*").

La lettre $\mathbf{R}$ dénote l'ensemble des ***nombres réels***, *i. e.* de tous les nombres à connaître en seconde. (On verra bientôt le lien avec les droites.)

Par exemple, on aurait pu définir :

1. la fonction d par $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 2x \end{array} \right.$ (lire "*la fonction qui va de $\mathbf{N}$ vers $\mathbf{R}$ et qui à un x élément de $\mathbf{N}$ associe $2x$*") ;

2. la fonction c par $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ (lire "*la fonction qui va de* $\mathbf{Z}$ *dans* $\mathbf{R}$ *et qui à un* x *élément de* $\mathbf{Z}$ *associe* x^2") ;
3. la fonction q par $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{Q} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 42 \end{array} \right.$.(lire "*la fonction qui va de* $\mathbf{Q}$ *vers* $\mathbf{R}$ *et qui à un élément* x *de* $\mathbf{Q}$ *associe* x").

Remarque : le symbole de variable (ici x) ne désigne rien en dehors de $\left\{ \begin{array}{ccc} D_f & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$, il n'exprime rien, on dit qu'il est ***muet***. On peut le remplacer par tout autre symbole qui n'a pas déjà du sens. Par exemple :

1. la fonction d peut s'écrire $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ n & \longmapsto & 2n \end{array} \right.$ ou encore $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \square & \longmapsto & 2\square \end{array} \right.$;
2. la fonction c vaut $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ k & \longmapsto & k^2 \end{array} \right.$ ou $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \sharp & \longmapsto & \sharp^2 \end{array} \right.$;
3. l'on peut réécrire la fonction q sous la forme $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{Q} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ r & \longmapsto & 42 \end{array} \right.$ ou $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{Q} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \boxplus & \longmapsto & 42 \end{array} \right.$.

★ La "fonction" $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ 2 & \longmapsto & 2^2 \end{array} \right.$ n'est pas bien définie car on ne sait pas si les symboles 2 à droite sont des symboles de variable ou bien de nombre : il pourrait s'agir de l'une des quatre fonctions $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ n & \longmapsto & n^2 \end{array} \right.$, $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ n & \longmapsto & 2^n \end{array} \right.$, $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ n & \longmapsto & n^n \end{array} \right.$ ou $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ n & \longmapsto & 2^2 \end{array} \right.$. Cette confusion vient de ce qu'on a utilisé pour symbole muet le symbole 2 qui a déjà du sens.

$\bowtie$**Autre exemples.** Définissons huit fonctions

CUB : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & t^3 \end{array} \right.$, RAC : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ z & \longmapsto & \sqrt{z+1} \end{array} \right.$, INV : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{Q} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right.$, ID : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \alpha & \longmapsto & \alpha \end{array} \right.$,

SOM : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ k & \longmapsto & k^2+k^3 \end{array} \right.$, QUO : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{Q} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \beta & \longmapsto & \frac{3\beta}{\beta+1} \end{array} \right.$, EXP : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ m & \longmapsto & 2^m \end{array} \right.$, FRA : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \gamma & \longmapsto & \frac{3\gamma+1}{\gamma^2-4} \end{array} \right.$.

Activité. Calculer les images par chacune de ces fonctions des nombres -2, -1, 0 et $\frac{1}{2}$. Pour cela,

remplacer, dans l'expression fonction du symbole de variable,
ce dernier par le nombre dont on cherche l'image.

★ Certaines de ces images ne font pas sens car les éléments dont on veut l'image ne font partie du domaine de définition ! C'est le cas des images $\mathrm{RAC}\left(\frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{SOM}\left(\frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{EXP}(-1)$ et $\mathrm{EXP}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Ces cas immédiats de non-sens étant écartés, on obtient les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{CUB}(-2) &= (-2)^3 = -8, \quad \mathrm{CUB}(-1) = (-1)^3 = -1, \quad \mathrm{CUB}(0) = 0^3 = 0, \quad \mathrm{CUB}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}, \\
\mathrm{RAC}(-1) &= \sqrt{-1+1} = \sqrt{0} = 0, \ \mathrm{RAC}(0) = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1, \\
\mathrm{INV}(-2) &= \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}, \quad \mathrm{INV}(-1) = \frac{1}{-1} = -1, \quad \mathrm{INV}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2, \\
\mathrm{ID}(-2) &= -2, \quad \mathrm{ID}(-1) = -1, \quad \mathrm{ID}(0) = 0, \quad \mathrm{ID}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \\
\mathrm{SOM}(-2) &= (-2)^2 + (-2)^3 = 4 - 8 = -2, \quad \mathrm{SOM}(-1) = (-1)^2 + (-1)^3 = 1 - 1 = 0, \\
\mathrm{SOM}(0) &= 0^2 + 0^3 = 0 + 0 = 0, \\
\mathrm{QUO}(0) &= \frac{3 \cdot 0}{0+1} = \frac{0}{1} = 0, \quad \mathrm{QUO}(1) = \frac{3 \cdot 1}{1+1} = \frac{3}{2}, \quad \mathrm{QUO}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{3}{1+2} = 1, \\
\mathrm{EXP}(0) &= 2^0 = 1, \quad \mathrm{EXP}(1) = 2, \\
\mathrm{FRA}(-1) &= \frac{3(-1)+1}{(-1)^2-4} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}, \quad \mathrm{FRA}(0) = \frac{3 \cdot 0 + 1}{0^2 - 4} = -\frac{1}{4}, \\
\mathrm{FRA}\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{3\frac{1}{2}+1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4} = \frac{\frac{3}{2}+1}{\frac{1}{4}-4} = \frac{6+4}{1-16} = \frac{10}{-15} = -\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

⋈**Problème** : quel sens donner

$$\begin{array}{ll} \text{à} & \mathrm{RAC}\,(-3) = \sqrt{(-3)+1} = \sqrt{-2}\,? \\ \text{à} & \mathrm{INV}\,(0) = \dfrac{1}{0}\,? \\ \text{à} & \mathrm{QUO}\,(-1) = \dfrac{3\,(-1)}{(-1)+1} = \dfrac{-3}{0}\,? \\ \text{à} & \mathrm{FRA}\,(2) = \dfrac{3\,(2)+1}{(2)^2-4} = \dfrac{7}{0}\,? \end{array}$$

Aucune de ces images ne fait sens ! Ainsi, certain éléments des "domaines de définition" n'ont pas d'image : on dit que ces quatre fonctions ne sont pas ***bien définies*** (*i. e.* définies correctement).

Morale de l'histoire : lorsque D désigne un ensemble de nombres et quand E est un expression littérale,

toujours vérifier, si l'on exprime une fonction f sous la forme $\left\{ \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & E \end{array} \right.$ que l'expression E fait sens pour chaque $x \in D$.

Méthode : Commencer par écrire "*Soit $x \in D$. Le nombre $f(x)$ fait sens ssi...*" et se rappeler que, si E et F sont deux expressions faisant sens, alors :

1. les somme $E+F$, différence $E-F$ et produit EF font toujours sens ;
2. le quotient $\frac{E}{F}$ fait sens ssi $F \neq 0$;
3. la racine $\sqrt{E}$ fait sens ssi $E \geq 0$;
4. la puissance E^F fait sens ssi $F \in \mathbf{N}$ (en seconde).

Application-activité. *Déterminer les domaines des quatre fonctions* RAC, INV, QUO *et* FRA. (Les autres sont bien définies car ne mettent en jeu ni des quotients, ni des racines, ni des puissances (sauf EXP qui est bien définie).)

Soit $x \in \mathbf{Q}$. Son image $\mathrm{INV}\,(x)$ fait sens ssi $\frac{1}{x}$ fait sens, *i. e.* ssi $x \neq 0$. Ainsi le domaine de définition de INV est-il formé des ratinnels non nuls :

$$D_{\mathrm{INV}} = \mathbf{Q}^*.$$

(L'astérisque dénote la privation de 0. Ainsi $\mathbf{Z}^*$ désigne-t-il l'ensemble des entiers relatifs non nuls.)

⋈Soit $\beta \in \mathbf{Q}$. Son image $\mathrm{QUO}\,(\beta)$ fait sens ssi $\frac{3\beta}{\beta+1}$ fait sens, *i. e.* ssi $\beta+1 \neq 0$, *i. e.* ssi $\beta \neq -1$. Il en résulte que le domaine de définition de QUO est constitué des rationnels autres que -1 :

$$D_{\mathrm{QUO}} = \mathbf{Q} \setminus \{-1\}\,.$$

(L'anti-slash $\setminus$ se lit "privé de" : si A et B désignent deux ensembles, alors l'ensemble $A \setminus B$ a pour éléments ceux de A qui n'appartiennent pas à B.)

Soit $z \in \mathbf{Z}$. Son image $\mathrm{RAC}\,(z)$ fait sens ssi $\sqrt{z+1}$ fait sens, *i. e.* ssi $z+1 \geq 0$, *i. e.* ssi $z \geq -1$. On en déduit que le domaine de définition de RAC est formé des entiers supérieurs ou égaux à -1 :

$$D_{\mathrm{RAC}} = \mathbf{Z} \cap [-1, \infty[= \{-1, 0, 1, 2, 3, ...\}\,.$$

(Le symbole $\cap$ se lit "inter" : si A et B désignent deux ensembles, alors l'ensemble $A \cap B$, appelé ***intersection*** de A et B, dénote l'ensemble des éléments appartenant à A et à B. L'ensemble $[-1, \infty[$ s'appelle un ***intervalle***, il contient tous les réels compris entre -1 (au sens large) et l'infini ∞ (au sens strict).)

Soit $\gamma \in \mathbf{R}$. Son image $\mathrm{FRA}\,(\gamma)$ fait sens ssi $\frac{3\gamma+1}{\gamma^2-4}$ fait sens, *i. e.* ssi $\gamma^2 - 4 \neq 0$, *i. e.* ssi $(\gamma-2)(\gamma+2) \neq 0$, *i. e.* ssi $\left\{ \begin{array}{c} \gamma - 2 \neq 0 \\ \gamma + 2 \neq 0 \end{array} \right.$, *i. e.* ssi $\left\{ \begin{array}{c} \gamma \neq 2 \\ \gamma \neq -2 \end{array} \right.$, *i. e.* ssi $\gamma \notin \{-2, 2\}$. Par conséquence, le domaine de définition de FRA est formé des réels autres que -2 et 2 :

$$D_{\mathrm{FRA}} = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}\,.$$

Résumé.

1. On peut décrire l'image d'un nombre x à l'aide d'une expression littérale où apparaît (peut-être) le symbole x.
2. Vérifier alors que l'expression (fonction de x) utilisée fait sens pour chaque x appartenant au domaine de définition.
3. Dans ce cas, l'image d'un $a \in D_f$ s'obtient en remplaçant dans l'expression le symbole de variable par a.

3 Algorithme d'association

$\bowtie$Dans tous les exemples ci-dessus on peut décrire la formations de l'expression $f(x)$ à l'aide d'une liste de commandes, d'instructions, appelée ***procédure*** ou ***algorithme*** :

d : prendre un nombre, le doubler ($x \mapsto 2x$).
c : prendre un nombre, l'élever au cube ($x \mapsto x^3$).
q : afficher 42 ($x \mapsto 42$).
CUB : prendre un nombre, l'élever au cube ($x \mapsto x^3$).
RAC : prendre un nombre, lui ajouter 1, prendre la racine carrée ($x \mapsto \sqrt{x+1}$).
INV : prendre un nombre, l'inverser ($x \mapsto \frac{1}{x}$).
ID : prendre un nombre, l'afficher ($x \mapsto x$).
SOM : prendre un nombre, ajouter son cube et son carré ($x \mapsto x^3 + x^2$).
QUO : prendre un nombre, d'une part le tripler et noter t le résultat, d'autre part lui ajouter 1 et noter a le résultat, afficher $\frac{t}{a}$ ($x \mapsto \frac{3x}{x+1}$).
EXP : prendre un nombre, le mettre en exposant de base 2 ($x \mapsto 2^x$).
FRA : prendre un nombre, d'une part le tripler puis ajouter 1 et noter N le résultat, d'autre part l'élever au carré puis retirer 4 et noter D le résultat, afficher $\frac{N}{D}$ ($x \mapsto \frac{3x+1}{x^2-4}$).

Réciproquement, on peut former une expression $f(x)$ à l'aide d'un algorithme à qui on donne un paramètre en entrée. Par exemple :

1. L'algorithme "*prendre un nombre, prendre sa racine carrée, ajouter* 1*, élever au carré*" décrit l'association $n \mapsto (\sqrt{n}+1)^2 = n + 2\sqrt{n} + 1$.
2. La procédure "*prendre un nombre, lui ajouter* 1*, élever au carré, soustraire* 1*, prendre la racine carrée*" code l'association $x \mapsto \sqrt{(x+1)^2 - 1} = \sqrt{x^2+2x} = \sqrt{x}\sqrt{x+2}$.
3. L'algorithme "*prendre un nombre, l'élever au carré, opposer, soustraire* 1*, prendre sa racine carrée*" décrit l'association $a \mapsto \sqrt{-a^2-1}$.
4. La procédure "*prendre un nombre, ajouter* 2*, élever au cube*" code l'association $t \mapsto (t+2)^3 = t^3 + 6t^2 + 12t + 8$.
5. La procédure "*prendre un nombre, élever au cube, ajouter* 2" code l'association $t \mapsto t^3 + 2$.

On observe sur les deux derniers exemples que

l'ordre des instructions importe !

$\bowtie$Il se peut qu'un algorithme "buggue", auquel cas l'algorithme ne définit pas bien une fonction. On déterminer alors le domaine de définition comme vu à la section précédente.

Exemples-exercices (reprendre les trois premiers précédents) :

1. Soit $x \in \mathbf{R}$. Son image $(\sqrt{x}+1)^2$ fait sens ssi $\sqrt{x}$ fait sens, *i. e.* ssi $x \geq 0$. Le plus grand domaine possible est donc l'ensemble des réels positifs, qui est noté $\mathbf{R}_+$ ou $[0, \infty[$.
2. Soit $x \in \mathbf{R}$. Son image $\sqrt{(x+1)^2 - 1}$ fait sens ssi $(x+1)^2 - 1 \geq 0$, *i. e.* ssi $(x+1)^2 \geq 1$, *i. e.* ssi $x+1 \geq 1$ ou $x+1 \leq -1$, *i. e.* ssi $x \geq 0$ ou $x \leq -2$. Le plus grand domaine possible est donc l'ensemble $]-\infty, 2] \cup \mathbf{R}_+$. (Le symbole $\cup$ se lit "union" : si A et B désignent deux ensembles, alors l'ensemble $A \cup B$, appelé la ***réunion*** de A et B, dénote l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B.)
3. Soit $x \in \mathbf{R}$. Son image $\sqrt{-x^2-1}$ fait sens ssi $-x^2 - 1 \geq 0$, *i. e.* ssi $-1 \geq x^2$, ce qui est faux (car un carré est positif). Le plus grand domaine possible est donc $\emptyset$ (cas où l'algorithme buggue toujours).

★ si, au lieu de $\sqrt{(x+1)^2 - 1}$, on avait utilisé l'expression $\sqrt{x}\sqrt{x+2}$, on aurait affirmé que cette dernière fait sens ssi $x \geq 0$ et $x \geq -2$, *i. e.* ssi $x \geq 0$, d'où le domaine $\mathbf{R}_+$, qui n'est pas celui trouvé ! Le problème vient de l'égalité $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ qui ne fait pas toujours sens (par exemple lorsque a et b sont tous deux strictement négatifs).

Résumé.

1. Pour définir une fonction, on peut utiliser un algorithme.
2. Dans ce cas, le plus grand domaine de définition possible est l'ensemble des nombres réels pour lesquel fait sens l'expression obtenue à la fin de l'algorithme.

4 Autres fonctions

Certaines grandeurs très simples sont fonctions de plus paramètres. Par exemple, l'aire d'un rectangle est le produit de sa largeur par sa longueur. En modélisant l'ensemble des largeurs (resp. longueurs) par $\mathbf{R}_+$, on obtient une fonction $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (\ell, L) & \longmapsto & \ell L \end{array}\right.$.

Remarque. Une suite de symboles de la forme (a, b) s'appelle un ***couple*** (à ne pas confondre avec la ***paire*** $\{a, b\}$). Deux couples sont égaux ssi les éléments correspondant sont égaux dans le même ordre :

$$(a, b) = (\alpha, \beta) \Longleftrightarrow (a = \alpha \text{ et } b = \beta).$$

Si A et B sont des ensembles, on note $A \times B$ (lire "A croix B") l'ensemble des couples (a, b) où a est un élément A et où b est un élément de B. Lorsque $B = A$, on abrège $A \times A = A^2$. Ainsi $\mathbf{R}_+^2$ désigne-t-il l'ensemble des couples de réels positifs.

Exercices.

Déterminer une fonction qui à un couple (b, h) associe l'aire d'un parallélogramme de base b et hauteur h.

Déterminer une fonction qui à un couple (b, h) associe l'aire d'un triangle de base b et hauteur h.

Déterminer une fonction qui à un triplet (b, B, h) associe l'aire d'un trapèze de bases b et B et de hauteur h.

Montrer que tout rationnel est une image par la fonction $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{Z} \times \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (n, d) & \longmapsto & \frac{n}{d} \end{array}\right.$.

Certaines fonctions ne s'expriment pas directement comme on a pu voir précédemment.

Par exemple, la fonction définie sur $\{1, 2, 3\}$ qui à 1 associe 2, à 2 associe 3 et à 3 associe 1. (Cette fonction fait "tourner" les images dans un "cycle" de "longueur".)

Autre exemple, la fonction E : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \begin{array}{c}\text{le plus grand entier} \\ \text{inférieur ou égal à } t\end{array} \end{array}\right.$. Elle vérifie $E(0) = 0$, $E(1) = 1$, $E\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $E\left(\frac{7}{3}\right) = 2$, $E(1{,}9) = 1$, $E(2{,}99) = 2$.