jeu de preuve

Marc SAGE (collab. Jean-Christophe JAMEUX)

14 mai 2022

Table des matières

Ce texte, auto-suffisant, reprend une conférence faite par les auteurs le samedi 14 mai 2022 de 15h à 18h.

quelques passages importants de la video
7'50-8'20 & 1^{h}42'40-1^{h}44'27 descriptifVSnormatif : le cadre proposé (valide en prépa) peut/doit évoluer
1^{h}02'50-1^{h}03'06 dire *les noms* devants les symboles (cf. JP SERRE *How to write mathematics badly* 24'14)
1^{h}03'40-1^{h}04'20 13'31-13'35 commentaires = contexte dispensable mais humain
1^{h}06'37-1^{h}16'57 les 4actes à voir qui structurent les démos
1^{h}30'37-1^{h}32'00 le sens c'est l'usage : apprentissage d'un jeu, d'une langue
1^{h}46'47-1^{h}46'54 voir une tautologie en la *prononçant* en français
1^{h}47'00-1^{h}47'16 interchangeabilité des équivalents
2^{h}25'10-2^{h}25'53 rédaction dans slides sont ANTI-modèles
2^{h}38'24-2^{h}40'36 on affirme *quoi* ? = ou $\Longleftrightarrow$?
3^{h}02'19-3^{h}03'33 que chaque symbole ait reçu son sens en amont

1 les 4 actes fondamentaux du jeu de preuve

1.1 mise en scène des 4 actes

Notons P votre prédicat préféré et, pour chaque objet $\square$, notons $P_\square$ l'énoncé « l'objet $\square$ vérifie le prédicat P ». Montrons alors l'équivalence

$$\neg\,[\exists x,\ P_x] \quad\Longleftrightarrow\quad \forall x,\ \neg P_x.$$

Raisonnons par double-implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons l'absence $\neg\,[\exists x,\ P_x]$ et prouvons la généralité $\forall x,\ \neg P_x$.
Soit o un objet et établissons la négation $\neg P_o$, çàd l'implication $P_o \Longrightarrow$ absurde
Supposons la prémisse P_o et montrons une contradiction.

D'une part, on a l'hypothèse (prémisse) P_o, donc on a l'existence $\exists x,\ P_x$. D'autre part, on a l'hypothèse (absence) $\neg\,[\exists x,\ P_x]$: on a donc une conjonction de la forme $E \wedge \neg E$, çàd une contradiction, CQFD.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons les négations $\forall x,\ \neg P_x$ et réfutons l'existence $\exists x,\ P_x$ (çàd prouvons sa négation).
Supposons donc cette dernière et soit o un objet tel que P_o. On a alors l'hypothèse (imposée) P_o. Par ailleurs, spécialiser l'hypothèse (généralité-négations) en o livre le cas spécial $\neg P_o$ (on dit aussi « remplacer $x \leftarrow o$ dans l'hypothèse »), ce qui conclut à la contradiction.

Cette rédaction comporte :
- des termes primitifs[1] (prédicat, énoncé, objet, prouver)
- des termes à connaître (généralité, existence, cas spécial, négation, implication, prémisse, conjonction, absurde, contradiction, hypothèse, réfuter, remplacer, spécialiser)
- des commentaires, dispensables sur le fond mais précieux pour la lectrice (montrons... raisonnons par... établissons... çàd... par ailleurs... ce qui conclut...)

... et **4 actes fondamentaux**, à lire selon 2 prismes possibles :

1. *ce sur quoi* portent ces actes (énoncés VS objets)
2. le "prix" de ces actes ("gratuits" libres VS "payants" régis)

formulation :

"prix" \ porte sur	énoncés	objets
"gratuit"	« supposons »	« soit »
"payant"	« on a »	« soit... tel que »

nom de l'acte :

\ porte sur	énoncés	objets
libre	supposition	évocation générale
régi	affirmation	évocation spéciale

RQ évoquer = *créer par la magie* (et non *faire allusion à* !), choix de vocabulaire inspiré de « que la lumière soit »

« **soit** » est l'impératif du verbe *être* : littéralement on demande à un objet d'être. En pratique, on demande plus précisément à pouvoir **disposer d'**un objet.

Le mot « soit » apparaît dans les deux actes portant sur les objets, d'où notre choix terminologique commun "*évocation*"[2]. L'évocation *spéciale* se distingue de l'évocation *générale* en cela que celle-ci sert à établir une *généralité*.

RQ suffixe en -ion dénote l'ACTE, mais parfois aussi le résult**AT** –> gare aux confusions... (évitables EG dans distillation VS distill**AT**)

Dans cet exposé, et comme dans l'exemple ci-dessus, nous soulignerons doublement chacun des actes afin de clairement **mettre en relief leur présence sous-jacente** (à l'exception des affirmations, plus communes).

[1] on pourrait les définir (de façon formelle) mais seul importe à ce stade qu'on ne puisse pas les réduire à d'autres termes antérieurs

[2] un autre choix, aux consonances moins magiques, est la *commande* – comme l'on commanderait une pizza. Aucune pizza *calzone* n'est identique à aucune autre mais on s'attend quand même à quelque chose de précis quand on commande une *calzone* ! Pareil quand on dit « soit un réel » : on s'attend certes à pouvoir disposer d'un réel mais seule l'atmosphère "en cuisine" décidera des caractéristiques de ce réel...

1.2 les règles du jeu de preuve

L'exemple précédent a mis à jour plusieurs "coups" du jeu de preuve : dans telle situation, tel acte pouvait être effectué – et l'a été. (Un analogue serait la mise à jour aux échecs des règles du jeu : dans telle position, on peut roquer, dans telle autre on peut prendre en passant...)

S'il y a des règles régissant ces actes, elles sont motivées par le sens "intuitif" que l'on prête aux mots

supposer, *affirmer*, *évoquer*, *pour chaque*, *il y a*,

un sens qui n'a pas dû vous arrêter à la première lecture. Nous nous appuierons donc sur ce sens intuitif pour rendre ces règles aussi "naturelles" que possibles.

Voici les règles du jeu mises à jour. Nous les présentons sous forme de "fractions", où

$$\text{la règle } \frac{\mathbb{A}}{\mathbb{M}} \quad \text{signifie} \quad \begin{array}{c}\textit{si l'acte } \mathbb{A} \textit{ a été effectué, alors} \\ \textit{on a le droit effectuer l'acte } \mathbb{M}.\end{array}$$

Certaines règles auront *deux* actes en amont $\frac{\mathbb{A} \quad \mathbb{B}}{\mathbb{M}}$ (dont l'ordre « $\mathbb{A}$ puis $\mathbb{B}$ » importe guère mais clarifie), voire *aucun* acte $\frac{[\text{rien}]}{\mathbb{M}}$ (on peut alors *toujours* effectuer l'acte $\mathbb{M}$).

Par exemple, la règle aux échecs décrivant la prise en passant serait présentée sous la forme[3]

$$\frac{\text{un pion avance de deux cases en 1 coup et arrive à côté d'un pion adverse (sur la même ligne)}}{\text{le pion adverse prend le pion avancé comme si ce dernier n'avait avancé que d'une seule case}}$$

et la possibilté d'abandonner à chaque coup serait représentée par la règle

$$\frac{[\text{rien}]}{\text{la joueuse (à qui c'est le tour) abandonne}}.$$

Les règles du jeu de preuve.

1. suppositions & « implique » $\Longrightarrow$:

$$\frac{[\text{rien}]}{|\text{supposons } H|} \qquad \left|\frac{\text{supposons } H}{\text{on a l'hypothèse } H}\right| \qquad \frac{\boxed{\text{supposons l'hypothèse } H \qquad \text{on a la thèse } \Theta}}{\text{on a l'implication } H \Longrightarrow \Theta}$$

(on peut évidemment supposer n'importe quoi, mais on ne peut pas affirmer n'importe quoi ! D'où l'intérêt des $\boxed{\textbf{cadres garde-fou}}$, qui nous protègent contre l'affirmation gratuite d'un énoncé supposé)

2. évocations générales & « pour chaque » $\forall$:

$$\frac{[\text{rien}]}{\text{soit } o} \qquad \frac{\text{soit } o \qquad \text{on a l'énoncé } P_o}{\text{on a la généralité } \forall x,\ P_x} \qquad \frac{\text{on a la généralité } \forall x,\ P_x}{\text{on a le cas spécial } P_\tau}$$

3. évocations spéciales & « il y a » $\exists$:

$$\frac{\text{on a l'énoncé } P_\tau}{\text{on a l'existence } \exists x,\ P_x} \qquad \frac{\text{on a l'existence } \exists x,\ P_x}{\text{soit } o \text{ tel que } P_o} \qquad \frac{\text{soit } o \text{ tel que } P_o}{\text{on a l'hypothèse } P_o}$$

Il conviendrait de rajouter **LA règle** (coupure, détachement ou *modus ponens*) permettant d'utiliser les implications :

$$\frac{\text{on a la prémisse } P \qquad \text{on a l'implication } P \Longrightarrow C}{\text{on a la conclusion } C} \qquad \begin{array}{c}\text{essentielle !!! impossible sans} \\ \text{d'utiliser les théorèmes !}\end{array}$$

Si le sens "intuitif" ci-dessus vous semble fumeux car subjectif, vous avez raison pour le côté subjectif. Un moyen de dissiper la fumée est d'acter *sciemment* que **le sens** de ces 4 actes (et des expression « implique » « pour chaque » « il y a ») **est entièrement constitué par les règles** précédentes.

Analogue aux échecs. Le cavalier peut "intuitivement" sauter par dessus d'autres pièces parce que sa monture (le cheval) peut le faire dans la vraie vie[4]. Cette règle est motivée, est facile à retenir. Mais l'*essence* de la pièce "cavalier" aux échecs est une sirène métaphysique : *ce qu'est* le cavalier aux échecs, seule la pratique du jeu permettra de le découvrir.

Bref :

[3] il conviendrait de préciser également que l'avancée du pion ne découvre aucune pièce "à portée longue" mettant en échec le roi adverse, auquel cas cet échec deviendrait le souci premier et ne pourrait être empêché par la prise en passant

[4] et encore, cela dépend des tailles du cheval et de l'obstacle...

le sens, c'est l'usage !

Insistons lourdement :

comprendre le sens des 4 actes et des 3 symboles $\Longrightarrow$ $\forall$ $\exists$
revient ni plus ni moins (en prépa du moins)
à jouer avec les règles ci-dessus.

1.3 le 0^{e} acte : définir

Il reste la **définition** : simple abréviation dispensable – mais tellement pratique !
Dans cet exposé, et comme dans ce qui précède, $\boxed{\text{tous les actes de définitions}}$ seront encadrés.

Quelques exemples :

1. $\boxed{\textit{notons } \sqrt{3} \textit{ l'unique réel positif de carré } 3}$
2. $\boxed{\textit{abrégeons } e := \exp 1}$
   (les indispensables "deux points" indiquent une définition et seront toujours **du côté du défini**)
3. Pour chaque objet $\square$, $\boxed{\text{notons } E_\square \text{ l'énoncé } \square^2 \geq 0.}$
   Il s'agit là d'une "**collection**" de définitions, en quelque sorte "quantifiées". Mais il n'y a ni infinité ni simultanéité : la terminologie « pour chaque » se suffit à elle-même.
4. *considérons* $\boxed{\textit{l'application } f := \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longmapsto & \mathbf{C}^* \\ t & \longrightarrow & e^{it} \end{array} \right.}$

★★ « considérer » est une **invitation à regarder** et NE signale PAS une définition ! ★★

Nous aurions pu écrire de façon équivalente :

portons notre attention sur $\boxed{\textit{l'application, que l'on appellera } f\textit{, définie par...}}$

Ces quatre exemples utilisent les quelques verbes indiquant clairement l'acte-définition[5] :

$\boxed{\textit{notons...}}$ $\boxed{\textit{appelons...}}$ $\boxed{\textit{abrégeons...}}$ $\boxed{\textit{baptisons...}}$

Une seule précaution. Si des parents ont deux enfants dont l'un s'appelle Camille, ils éviteront d'appeler aussi Camille l'autre enfant !

ne jamais donner un nom déjà attribué auparavant.

EG subtil mais tellement courant Pour chaque naturel n, $\boxed{\text{abrégeons } c_n \text{ son carré}}$. Le problème est que (à n fixé) la notation c_n est **déjà prise** : elle dénote le n-ième d'une suite c qui a dû être introduite en amont ! Une issue simple est de directement définir une telle suite c :

$\boxed{\text{notons } c \text{ la suite } \left(n^2\right)_{n \in \mathbf{N}}}$, ou encore : $\boxed{\text{appelons } c \text{ la suite } \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ n & \longmapsto & n^2 \end{array} \right.}$.

EG grossier mais tout aussi courant Soit n un naturel et $\boxed{\boxed{\text{notons } c_n \text{ son carré}}}$. Encore ici la notation séquentielle c_n est déjà réservée et ne saurait être employée. Mais surtout :

*pourquoi diable vouloir signifier une **dépendance***
*en n alors que CE DERNIER EST **FIXE** ? ? ?*

[5] on rencontre aussi « posons », dont la grande polysémie nous retient de le conseiller en première approche

Le n invoqué est en effet aussi variable que 2 ou 894 : or vous est-il déjà venu à l'esprit d'avoir envie de **faire varier 2** ? ? Je vous préviens : il ne va pas se laisser faire – et il aura raison. Faites simple et efficace :

$$\text{« } \underline{\underline{\text{Soit } n \in \mathbf{N}}} \ \boxed{\text{dont on note } c \text{ le carré}} \text{ ».}$$

Si vous tenez absolument à faire "varier" un symbole évoqué, ne le faites-pas ! Revenez simplement à l'exemple précédent, où vous trouverez – dans l'*application* définie – la dépendance que vous cherchez.

RQ Le gros problème de la terminologie "constant/variable" est qu'elle ne peut qu'entretenir la confusion, vu qu'un symbole évoqué aura constamment le cul entre ces deux chaises : il est "variable" au sens où il pourra, AU FUTUR, après généralisation, être remplacé par n'importe quoi, mais **il reste "constant" tant qu'on en parle. Or c'est cette constance qui importe**, sans quoi le discours s'écroule. Imaginez-vous une addition posée à la main dont les chiffres se mettent à bouger au gré de leurs caprices ? Ou encore les bornes d'une intégrale qui changent sournoisement quand on détourne le regard ?

1.4 transition vers la règle manquante

Nos règles ci-dessus ont un grave défaut : elle parlent sans cesse d'affirmations (« on a »). Mais *comment peut-on*, en jouant avec ces règles[6], *produire*[7] *la moindre affirmation ?* Exactement comme aux échecs : même si l'on connaît les règles, sans position initiale, on ne va pas aller très loin... Il convient par conséquent d'autoriser certaines *affirmations initiales* – nécessairement *libres*.

2 affirmations libres – liberté d'affirmer

(partie seulement esquissée dans l'exposé)

2.1 tautologies : un guide intuitif et une recette de cuisine

Que peut-on affirmer librement ?

1. des axiomes, qui dépendent du contexte donné. EG : borne sup dans $\mathbf{R}$, distributivité dans les evs, associativité dans les groupes, 5e postulat d'EUCLIDE, récurrence de PEANO... –> énoncés **avec du contenu**.
2. des énoncés **à contenu vide** : eg $\left|\begin{array}{l} \text{si } E \text{ alors } E \\ \text{si } E \wedge F \text{ alors } E \\ \text{si } E \text{ alors } E \vee F \end{array}\right.$. Dans le 1$^{\text{er}}$ eg, on dit (*logo*) la même chose (*tauto*), ce qui en fait littéralement une **tautologie**, nom donné à ces énoncés à contenu vide.

les règles manquantes (affirmation libres)

$$\frac{[\text{rien}]}{\text{on a l'axiome } A} \qquad \frac{[\text{rien}]}{\text{on a la tautologie } T}$$

Quel CHOIX de tautologies ? On commence par décrire le vivier où les pêcher, çàd par décrire les énoncés parmi lesquels discriminer qui sera tautologie et qui n'en sera pas.

Ces énoncés sont formés à partir :

1. de connecteurs $\wedge \ \vee \ \Longrightarrow \ \neg \ \Longleftrightarrow \Longleftarrow$

[6] En fait, rien que les règles sur la supposition et $\Longrightarrow$ ouvrent déjà tout un champ ludique, en permettant de *dériver* (çàd *arriver à affirmer*) des énoncés de la forme $A \Longrightarrow A$ ou $\Theta \Longrightarrow (A \Longrightarrow \Theta)$ ou encore $[(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow p] \Longrightarrow [q \Longrightarrow p]$ voire $[u \Longrightarrow (v \Longrightarrow w)] \Longrightarrow [(u \Longrightarrow v) \Longrightarrow (u \Longrightarrow w)]$ Amusez-vous à le faire : cela vous donnera un avant-goût des *tautologies* à venir !

[7] De même, dès que l'on l'introduit l'énoncé $\perp$ puis définit les négations $\neg E := [E \Longrightarrow \perp]$, on peut alors dériver les implications $A \Longrightarrow \neg\neg A$ ou $H \Longrightarrow \neg \perp$ ou encore $(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow (\neg q \Longrightarrow \neg p)$, ainsi que les lois de DE MORGAN $\neg [\exists x, \ P_x] \overset{\Longrightarrow}{\Longleftarrow} [\forall x, \ \neg P_x]$ qui ont ouvert ce cours. Saurez-vous dériver les mêmes lois obtenues en échangeant les quanteurs $\exists$ et $\forall$?

2. de "coquilles" d'énoncés (que l'on remplira plus tard par des énoncés) représentées par des lettres
3. de 2 énoncés singuliers (dont les noms et notations peuvent grandement varier)
    (a) le tautologique (T), le vrai ($\mathbb{V}$), le valide (OK, ✓), le blanc/vert (□), 1...
    (b) l'antilogique / le contradictoire / l'absurde / l'impossible ($\perp$), le faux ($\mathbb{F}$), l'invalide (KO, $\times$), le noir/rouge (■), 0...

Guide intuitif : pour chaque tel énoncé E, notons $\lceil E \rceil$ ce que[8] dit E. Nous pouvons alors nous appuyer sur les interprétations suivantes (où E et F dénotent des énoncés formés comme ci-dessus) :

1. $\lceil E \wedge F \rceil$ est : $\lceil E \rceil$ et $\lceil F \rceil$, ce dernier « et » faisant partie de la vie de tous les jours et ne posant donc aucun problème ;
2. $\lceil E \vee F \rceil$ est : $\lceil E \rceil$ ou $\lceil F \rceil$ ou les deux à la fois (de même que pour $\wedge$, les « ou[9] » sont aussi clairs que toute notion de la vie de tous les jours) ;
3. $\lceil \neg E \rceil$ est : $\lceil E \rceil$ est impossible, au sens de la vie de tous les jours où l'admettre conduirait à des contradictions, où se comporter comme si $\lceil E \rceil$ serait absurde ;
4. $\lceil E \iff F \rceil$ est : $\lceil E \rceil$ et $\lceil F \rceil$ reviennent au même, sont interchangeables dans le discours ;
5. $\lceil E \implies F \rceil$ est : on peut affirmer $\lceil F \rceil$ quand on sait que $\lceil E \rceil$ (forme utilitaire), ou encore (forme concise) pas de $\lceil E \rceil$ sans $\lceil F \rceil$.

Ce guide intuitif n'est qu'un **guide** à destination de notre intuition, censé nous **aider** à mettre du sens dans ce jeu de propositions, à **motiver** la terminologie, à **comprendre** les décisions prises par la suite à partir de notre expérience de la vie de tous les jours. Il n'a aucune autre prétention à **prouver** quoi que ce soit – il en serait d'ailleurs bien incapable !

Recette des tautologies en prépa :

1. attribuer à chaque tel énoncé une **valeur** : ou bien T ou bien $\perp$ (oui oui, l'un des énoncés singuliers !)
2. la valeur d'un énoncé de la forme $p * q$ dépend **uniquement**
    (a) des valeurs des connectés (p et q)
    (b) du connecteur ($*$)
3. si la valeur est toujours T indépendamment des valeurs des coquilles, alors l'énoncé est décrété **tautologique**[10].

2.2 six exemples

EG 1 (contradictions & antilogies) Est-ce que $\neg(A \wedge \neg A)$ est une tautologie ? (où A est une coquille d'énoncé)

Il nous faut les tables d'évaluation des connecteurs en jeu, motivées par notre guide intuitif :

négation :

E	$\perp$	T
$\neg E$	T	$\perp$

(complémentaire $0 \leftrightarrow 1$)

conjonction $E \wedge F$:

$F \setminus E$	$\perp$	T
$\perp$	$\perp$	$\perp$
T	$\perp$	T

(minimum dans $\{0, 1\}$)

On trouve que $A \wedge \neg A$ est antilogique.

EG 2 (dualité $\wedge$ $\vee$ via $\neg$) Étudier l'équivalence $\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$.

[8] Gare à la *polysémie* : "le" sens de $\lceil E \rceil$ dépend hautement de l'interprétation que l'on fait de E et n'est donc absolument pas unique !

[9] rappelons que le symbole $\vee$ abrège le latin *vel*, au sens de la conjonction de coordination "ou" marquant l'alternative

[10] le français fait ensuite le reste : une tautologie est (par définition) un énoncé tautologique

Précisons les tables de $\vee$ et $\Longleftrightarrow$, toujours guidé par notre guide intuitif :

disjonction $E \vee F$:

$F \diagdown E$	$\perp$	T
$\perp$	$\perp$	T
T	T	T

(maximum dans $\{0,1\}$)

équivalence $E \Longleftrightarrow F$:

$F \diagdown E$	$\perp$	T
$\perp$	T	$\perp$
T	$\perp$	T

(symbole de Kronecker)

Dans l'énoncé étudié, le membre de gauche $\neg(A \vee B)$ est OK ssi $A \vee B$ est KO, çàd ssi $\left\{ {}_{\text{et}} \begin{array}{l} A \text{ est KO} \\ B \text{ est KO} \end{array} \right.$, çàd ssi $\left\{ {}_{\text{et}} \begin{array}{l} \neg A \text{ est OK} \\ \neg B \text{ est OK} \end{array} \right.$, ou encore ssi $\neg A \ \wedge \ \neg B$ est OK.

RQ Ce qui précède est un raisonnement de la vie de tous les jours, **avec des « et » et des « ssi » sur lesquels on peut s'appuyer sans problème**.

On en déduit que le membre de gauche n'est pas OK ssi celui de droite n'est pas OK **(négation de la vie de tous les jours !)**, çàd que le gauche est KO ssi le droit est KO (car il n'y que 2 valeurs possibles).

EG 3 / exos (neutres et absorbants pour $\wedge$ et $\vee$) Établir la tautologicité des 4 équivalences

$$A \vee \perp \overset{?}{\Longleftrightarrow} A \qquad A \overset{?}{\Longleftrightarrow} A \wedge T \qquad T \overset{?}{\Longleftrightarrow} T \vee A \qquad A \wedge \perp \overset{?}{\Longleftrightarrow} \perp$$

EG 4 (définition de la négation) Vérifier le caractère tautologique de l'équivalence

$$\neg A \overset{?}{\Longleftrightarrow} [A \Longrightarrow \perp]$$

Il faut disposer de la table d'évaluation de l'implication :

implication $\underset{\text{Prémisse}}{P} \Longrightarrow \underset{\text{Conclusion}}{C}$:

Conclusion $\diagdown$ Prémisse	$\perp$	T
$\perp$		
T		

D'après notre guide intuitif, affirmer $P \Longrightarrow C$ est affirmer « pas de P sans C ». Le minimum à demander est donc **prohibitif** (case haut droite) :

si une implication est valide, alors *pas de prémisse sans la conclusion !*

Conclusion $\diagdown$ Prémisse	$\perp$	T
$\perp$		$\perp$
T		

Notre guide nous laisse cependant *totalement démunis* quant aux cas où l'on a déjà la conclusion (2e ligne) ou lorsque la prémisse est absurde (1re colonne). Et pour cause : selon la version utilitaire de l'implication, ces trois cas sont ou **inutiles** (conclusion *déjà valide* – pas besoin pour l'affirmer de se demander si l'on a la prémisse !) ou inutilis**ables** (prémisse impossible : *pourquoi alors*[11] se poser des questions sur telle ou telle conclusion ?). Les évaluer demeure toutefois aussi pratique que d'attribuer une vitesse à un objet immobile : unifier le vocabulaire dans les cas dégénérés.

Quelles valeurs attribuer à ces 3 cas dégénérés ? Déjà LA tautologie par essence « pas de A sans A » livre la validité de l'implication $A \Longrightarrow A$, ce qui nous valide la diagonale. Reste alors (case bas gauche) à se demander si, disposant d'une absurdité, on peut affirmer du tautologique – or cela peut arriver[12] : dans $\mathbf{N}$ multiplier par 0 l'égalité réfutée $0 = 1$ livre l'égalité prouvée $0 = 0$.

Conclusion $\diagdown$ Prémisse	$\perp$	T
$\perp$	T	
T		T

valider $A \Longrightarrow A$

Conclusion $\diagdown$ Prémisse	$\perp$	T
$\perp$		
T	T	

valider 0=1 $\overset{\times 0}{\Longrightarrow}$ 0=0

[11] Il est tout à fait possible de chercher à donner un sens à ces implications dont la prémisse va à l'encontre des faits – énoncés qualifiés justement de *contrefactuels*. Cette logique des mondes parallèles (où la prémisse serait vérifiée) nous paraît néanmoins *hautement toxique* pour les apprenties en herbe logiciennes à qui s'adresse notre texte. Qu'elles soient ici averties des sirènes métaphysiques fredonnant d'innocents « si... alors... ».

[12] Cette échappée dans les contrefactuels se veut séduisante et convaincante – elle n'en reste pas moins *hautement risquée* pour les non-initiées. C'est pourquoi nous donnons ci-après une seconde motivation des 3 cas restants, beaucoup plus pragmatique – quoique sans doute moins attrayante.

D'une autre façon, on veut valider l'implication $C \wedge D \Longrightarrow C$ (c'est le minimum à exiger du « et » !), en particulier quand D est KO la prémisse-conjonction est KO, d'où la validité de $\perp \Longrightarrow C$ (1$^{\text{re}}$ colonne $\perp$). De même, on veut valider l'implication $P \Longrightarrow P \vee Q$ (vu le sens "intuitif" de « ou »), en particulier quand Q est OK, d'où la validité de $P \Longrightarrow T$ (2$^{\text{e}}$ ligne T).

Conclusion \ Prémisse	$\perp$	T
$\perp$	T	
T	T	

valider $C \wedge \perp \Longrightarrow C$

Conclusion \ Prémisse	$\perp$	T
$\perp$		
T	T	T

valider $P \Longrightarrow P \vee$ T

Revenons à notre sanity-check : l'implication $A \Longrightarrow \perp$ est KO ssi $\left\{ {}_{\text{et}} \begin{array}{c} \text{la prémisse est OK} \\ \text{la conclusion est KO} \end{array} \right.$, çàd ssi $\left\{ {}_{\text{et}} \begin{array}{c} A \text{ est OK} \\ \perp \text{ est KO} \end{array} \right.$, çàd ssi A est OK, ou encore ssi $\neg A$ est KO.

Insistons sur le niveau "vie de tous les jours" de ce dernier raisonnement !

EG 5 / exo (nier une implication) Vérifier qu'est tautologique l'équivalence

$$\neg (P \Longrightarrow C) \overset{?}{\Longleftrightarrow} (P \wedge \neg C)$$

EG 6 / exo (sanity check) Vérifier qu'est tautologique l'implication

$$\left\{ \begin{array}{c} h \\ h \Longrightarrow \theta \end{array} \right. \overset{?}{\Longrightarrow} \theta.$$

C'est une manière de coder la règle de coupure en une implication. (Gare cependant à l'excès d'enthousiasme : cette implication-codage ne saurait remplacer la règle codée. Que faire en effet d'une implication sans règle de coupure ? ^^)

Remarque (dispensable) La lectrice qui aura joué à dériver des implications avant de prendre connaissance de notre choix de tautologies pourra évaluer les énoncés qu'elle aura elle-même dérivés (composés de $\Longrightarrow$ ou de $\neg$) et ne manquer de constater... qu'ils sont tous tautologiques ! À elle d'expliquer cette constatation selon sa curiosité – y renoncer ne lui porterait d'ailleurs guère atteinte pour les concours. Quant à savoir si, réciproquement, chaque tautologie est dérivable dans notre jeu (sans les affirmations gratuites, bien sûr), c'est une question digne d'intérêt[13] qui nous emmènerait hélas trop loin : notre présentation se veut donner *un accès algorithmique (efficace) aux tautologies qui sont d'usage en prépa* – que cela suffise à notre lectrice.

2.3 liberté & autonomie – cinq exemples

Intérêt des tautologies Connaître les tautologies choisies (en prépa : *via* la recette/algorithme ci-dessus) mène à l'indépendance, l'autonomie :

pouvoir établir ***soi-même*** *la validité des règles que l'on*
souhaite utiliser sur les affirmations sans quantificateurs

L'idée est simple : si l'on veut utiliser une règle de la forme $\frac{\text{on a } A}{\text{on a } B}$, il suffit (pour la valider) de montrer la tautologicité de l'implication $A \Longrightarrow B$. Cette suffisance repose sur LA RÈGLE :

$$\left(\begin{array}{c} \text{toujours} \\ \text{la coupure} \end{array} \right) : \quad \frac{\text{on a l'hypothèse } h \qquad \text{on a l'implication } h \Longrightarrow \theta}{\text{on a la thèse } \theta}$$

EG 1 (réfutation) Réfuter A, c'est prouver $\neg A$, çàd établir l'implication $A \Longrightarrow \perp$, d'où la validité de la règle

$$\frac{\text{supposons } A \qquad \text{on a une contradiction } \perp}{\text{on a la négation } \neg A}$$

[13] citons pour la culture quelques exemples épineux : l'élimination de la double-négation $\neg\neg A \Longrightarrow A$, le principe d'explosion $\perp \Longrightarrow \Theta$, la loi de Pierce $[(p \Longrightarrow \square) \Longrightarrow p] \Longrightarrow p$, le tiers exclu $E \vee \neg E$, la contraposition $(\neg v \Longrightarrow \neg u) \Longrightarrow (u \Longrightarrow v)$, la loi de de Morgan "existentielle" $\neg (A \wedge B) \Longrightarrow \neg A \vee \neg B$

EG 2 (contraposition) La validité de la règle

$$\frac{\text{on a l'implication } A \Longrightarrow B}{\text{on a l'implication } \neg B \Longrightarrow \neg A}$$

repose sur la tautologicité de l'implication $(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow (\neg B \Longrightarrow \neg A)$. Établissons cette dernière : peut-on avoir la prémisse sans la conclusion ? Si la conclusion $\neg B \Longrightarrow \neg A$ est KO, alors d'une part sa prémisse $\neg B$ est OK, çàd B est KO, d'autre part sa conclusion $\neg A$ est KO, çàd A est OK ; d'où le caractère KO de l'implication $A \Longrightarrow B$, çàd de la prémisse à étudier.

EG 3 (disjonction des cas) La validité de la règle

$$\frac{\text{on a l'alternative } p \vee q \qquad \text{on a l'implication } p \Longrightarrow C \qquad \text{on a l'implication } q \Longrightarrow C}{\text{on a la conclusion } C}$$

repose sur le caractère tautologique de l'implication $\left\{ \begin{array}{c} p \vee q \\ p \Longrightarrow C \\ q \Longrightarrow C \end{array} \right. \Longrightarrow C$. Montrons qu'elle ne peut en effet être KO. Supposons cette dernière KO : alors d'une part sa prémisse est OK, donc les 3 conjoints sont OK, d'autre part sa conclusion C est KO, donc la prémisse de chaque implication valide ? $\Longrightarrow C$ est KO, en particulier p et q sont KO, donc leur alternation $p \vee q$ aussi. Or cette dernière est le premier conjoint OK ci-dessus – contradiction !

Insistons une fois encore sur le caractère "jeu de tous les jours" du raisonnement précédent : réfuter un énoncé est simplement montrer qu'il conduit à des absurdités. En particulier il n'a pas été question de « raisonnement par l'absurde » – notre prochain exemple.

EG 4 (raisonnement par l'absurde) La définition de la réfutation nous permet de valider le raisonnement

$$\frac{\text{supposons la négation } \neg E \qquad \text{on a une contradiction } \perp}{\text{on a la double-négation } \neg(\neg E)}$$

Pour pouvoir alors affirmer E, il suffit que soit valide la règle

$$\frac{\text{on a la double-négation } \neg\neg E}{\text{on a l'énoncé } E}$$

et on vérifie à cet effet qu'est tautologique l'implication $\neg\neg E \Longrightarrow E$.

RQ avec un choix plus restrictif de tautologies (par exemple en logique intuitioniste), cette dernière implication n'en fait plus partie. Si la priorité aux concours reste l'efficacité, mener la chasse aux raisonnement par l'absurde inutiles (beaucoup le sont) apporte un peu de finesse au discours et propose une voie plus "directe", plus "authentique".

EG 5 (loi de De Morgan généralisée) Reprendre l'exemple du début en intervertissant les quantificateurs.

RQ quand on veut montrer l'implication

$$\neg [\forall x,\ P_x] \quad \Longrightarrow \quad \exists x,\ \neg P_x,$$

on est amené à se poser des questions sur le sens (çàd l'usage) que l'on souhaite attribuer au quanteur $\exists$: comment établir une existence sinon en exhibant un objet "témoin" qui ait la propriété voulue ? Les raisonnements par l'absurde et par contraposition (valides en prépa) permettent de dissoudre ces questions (en prépa). Il semble d'ailleurs difficile de s'en passer pour prouver la "minimalité" de 0 dans $\mathbf{R}_+$ au sens des implications

$$\forall p \geq 0, \qquad [\forall \varepsilon > 0,\ p < \varepsilon] \Longrightarrow p = 0.$$

Essayez donc d'établir ces dernières !

3 nouveaux regard sur le discours mathématique – quatre exemples

(seul l'exemple 3.3 a été traité dans l'exposé)

3.0 À LIRE AVANT LA SUITE

Les slides de la vidéo sont des modèles de ce que l'on peut trouver aisément dans des rédactions d'**étudiants** :

1. fond vaguement présent (quand il n'est pas à côté)
2. automathismes sans recul
3. français abonné absent
4. consistance du discours proche de celle de la soupe

À vous d'apprécier en quoi les exemples suivants transforment ces anti-modèles.

3.1 tendance vers 0

Il est classique (et fondamental) que montrer que les suites tendant vers 0 forment un sev. Montrons ici que l'ensemble qu'elles constituent est stable par doublage, çàd que

la tendance vers 0 *est préservée par doublage.*

Le contexte est flou et doit être précisé : visons large (en maths sup) et parlons de suite *numériques*, carrément *complexes*. Soit donc c une suite complexe (abrège l'évocation « soit c un objet » suivie de la supposition « supposons $c \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ ») et montrons l'implication

$$c \longrightarrow 0 \quad \stackrel{?}{\Longrightarrow} \quad 2c \longrightarrow 0.$$

(Le point d'interrogation permettent de repérer tout de suite qu'il ne s'agit pas d'affirmation, si jamais on n'avait pas lu le français auparavant.)

Supposons donc la prémisse $c \longrightarrow 0$ et montrons la conclusion, que l'on reformulera sous forme des existences

$$\forall \varepsilon > 0, \ \stackrel{?}{\exists} N \in \mathbf{N}, \ \forall n \in \mathbf{N}, \ n > N \Longrightarrow \left| \ [2c]_n \ \right| < \varepsilon.$$

Soit donc $\varepsilon > 0$. On veut prouver l'existence

$$\stackrel{?}{\exists} N \in \mathbf{N}, \ \forall n \in \mathbf{N}, \ n > N \Longrightarrow |c_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a l'hypothèse $c \longrightarrow 0$, reformulée sous une forme analogue :

$$\forall E > 0, \ \exists N \in \mathbf{N}, \ \forall n \in \mathbf{N}, \ n > N \Longrightarrow |c_n| < E.$$

(on n'utilise pas ε puisque le nom ε a déjà attribué lors de l'évocation « soit $\varepsilon > 0$ »).

$\boxed{\text{Soit } e > 0\text{, à choisir/définir rétrospectivement}}$: spécialiser l'hypothèse ci-dessus en e livre l'existence

$$\exists N \in \mathbf{N}, \ \forall n \in \mathbf{N}, \ n > N \Longrightarrow |c_n| < e.$$

Soit un tel naturel N. Montrons qu'il convient pour un choix judicieux de e, çàd établissons les implications

$$\forall n \in \mathbf{N}, \ n > N \stackrel{?}{\Longrightarrow} |c_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit donc $n \in \mathbf{N}$ et supposons la prémisse $n > N$. Les propriétés du N introduit permettent d'affirmer l'implication $n > N \Longrightarrow |c_n| < e$, d'où la conclusion $|c_n| < e$. Il suffirait pour conclure de majorer ce dernier e par $\frac{\varepsilon}{2}$, ce qui peut être réalisé en définissant rétrospectivement $\boxed{e := \frac{\varepsilon}{2}}$.

RQ on rencontre très souvent une formulation comme

« la **définition** de N permet d'affirmer... ».

Or, ce qui nous permet précisément d'affirmer [ce que l'on veut] est la **règle** $\frac{\text{soit } o \text{ tel que } P_o}{\text{on a l'hypothèse } P_o}$. Et l'on peut utiliser cette règle car N a pris son sens **non pas dans une définition** mais dans une évocation spéciale (« Soit N tel que »). TOTAL : ce sont bien *les propriétés vérifiés par un tel* N qui nous servent, et non pas l'acte (évocation spéciale) qui lui a donné sens – acte qui d'ailleurs n'est *pas du tout une définition !*

Truc (« fixé », « introduit » ou « évoqué » ?) Si l'usage consacre très souvent le vocabulaire « fixé », il est primordial d'y voir l'acte sous-jacent : une **évocation**. Le vocabulaire « introduit » permet de respecter sa pensée (« là, à cet endroit, N a pris son sens, il a été introduit ») sans brusquer la lectrice (plus habituée à lire « fixé » que « évoqué »).

3.2 suites constantes

Établir pour chaque suite $s \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ *l'équivalence*

$$\exists C \in \mathbf{C},\ \forall n \in \mathbf{N},\ s_n = C \quad \overset{?}{\iff} \quad \forall n \in \mathbf{N},\ s_n = s_{n+1}.$$

(inutile ici en principe de démarquer les deux membres de l'équivalence – le français DIT qu'il s'agit d'une équivalence)

La première chose est de percevoir la **portée** du « pour chaque » :

la phrase finie, la lettre s ne veut plus rien dire !

Il convient donc d'évoquer une suite complexe (çàd d'évoquer un objet que l'on supposera être une suite complexe).

Soit donc $c \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$. Montrons alors l'équivalence souhaitée par double-équivalence.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit C un complexe comme dans l'existence de gauche. Montrons alors les égalités $\forall N \in \mathbf{N},\ s_N = s_{N+1}$. Soit donc $N \in \mathbf{N}$ et montrons l'égalité $s_N = s_{N+1}$. Les propriétés du C introduit livre les égalités $\forall n \in \mathbf{N},\ s_n = C$: remplacer $\begin{matrix} n \leftarrow N \\ n \leftarrow N+1 \end{matrix}$ donne alors les cas spéciaux $\left\{ \begin{matrix} s_N = C \\ s_{N+1} = C \end{matrix} \right.$, d'où l'égalité $s_N = s_{N+1}$ voulue.

RQ On a utilisé tout à la fin les transitivité et symétrie de la relation d'égalité $=$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons les égalités $\forall n \in \mathbf{N},\ s_n = s_{n+1}$ et montrons l'existence $\exists C \in \mathbf{C},\ \forall n \in \mathbf{N},\ s_n = C$.

Comment trouver un tel C ? *Micro analyse* : soit un tel C, spécialiser en 0 l'hypothèse donne $s_0 = C$. Pas le choix ! $\boxed{\text{Notons donc } C := s_0}$ et montrons les égalités $\forall n \in \mathbf{N},\ s_n = C$, ce qui livrera l'existence voulue.

Pour chaque objet $\square$, $\boxed{\text{notons } E_\square \text{ l'égalité } s_\square = C}$. Montrons alors les égalités $\forall n \in \mathbf{N},\ E_n$ par récurrence, çàd montrons la conjonction

$$?\left\{ \begin{array}{l} E_0 \\ \forall \alpha \in \mathbf{N},\ E_\alpha \Longrightarrow E_{\alpha+1} \end{array} \right. .$$

L'égalité E_0 dit $s_0 = C$, çàd $s_0 = s_0$ (par définition de C) : il s'ensuit l'égalité E_0. (Noter l'utilisation de la réflexivité de la relation $=$.)

Soit $\alpha \in \mathbf{N}$, supposons E_α et montrons l'égalité $E_{\alpha+1}$. Remplacer dans l'hypothèse (du tout début) $n \leftarrow \alpha$ donne $s_\alpha = s_{\alpha+1}$. Or l'hypothèse ("de récurrence") E_α dit $s_\alpha = C$, d'où $s_{\alpha+1} = C$, çàd $E_{\alpha+1}$, CQFD.

RQ Au lieu de « Soit $\alpha \in \mathbf{N}$, supposons E_α », il est parfaitement admis d'abréger en « Soit $\alpha \in \mathbf{N}$ tel que E_α »

tant que le contexte permet de distinguer l'évocation générale (le cas ici)
de l'évocation spéciale (normalement indiqué par « Soit... tel que... »).

Application Ce petit lemme permet de trivialiser beaucoup de questions suggérant une récurrence. En effet, ce lemme contient bien (dans la preuve ci-dessus) la récurrence suggérée mais sous la forme la plus dépouillée possible, ce qui le rend suffisamment élémentaire pour pouvoir être affirmé sans preuve.

Par exemple, face à une suite g telle que $\forall n \in \mathbf{N},\ g_{n+1} = 2g_n$ (géométrique de raison 2), au lieu de montrer $g^\alpha = g_0 2^\alpha$ par récurrence sur $\alpha \in \mathbf{N}$, il suffit (à $n \in \mathbf{N}$ fixé) de réécrire l'hypothèse sous la forme $\frac{g_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{g_n}{2^n}$ et d'affirmer la constance de la suite $\left(\frac{g_N}{2^N}\right)$, d'où pour chaque naturel p les égalités $\frac{g_p}{2^p} = \frac{g_0}{2^0}$.

De même, façon à une suite f telle que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ f_n = nf_{n-1}$, diviser par $n!$ livre immédiatement la constance de la suite $\left(\frac{f_p}{p!}\right)$, d'où l'égalité $(f_n) = (f_0 n!)$.

Autre exemple (exo !) Soit $c \in \mathbf{C}^n$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ 3c_n + 5n = nc_{n-1} + 15.$$

Exprimer son terme général de façon simple. (*Hint* : faire naturellement apparaître la suite $\left(\frac{3^p}{p!}(c_p - 5)\right)$)

3.3 trouver les points fixes de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \cdot & 1 \end{pmatrix}$

♠♠♠ trouver où ? ? ? ♠♠♠ Les matrices agissent par multiplication-à-gauche sur des *matrices colonnes*, abusivement identifiées à des *-uplets de scalaires*. Il convient donc d'une part de préciser le cadre scalaire (en prépa : un corps), d'autre part part de chercher les solutions dans le carré cartésien du corps en question. Enfin, la matrice donnée va sûrement être mentionnée à plusieurs reprises, il serait agréable de lui donner un nom – tout comme à l'ensemble de ses points fixes.

Bref : nous prenons l'initiative de reformuler l'énoncé en :

$$\underline{\underline{\textit{Soit } K \textit{ un corps,}}}\ \boxed{\textit{notons } M \textit{ la matrice } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \cdot & 1 \end{pmatrix}}.$$

$$\textit{Déterminer alors l'ensemble } \boxed{\Phi := \left\{v \in K^2\ ;\ Mv = v\right\}}.$$

RQ Auriez-vous préféré laisser une dépendance Φ_M en la matrice M ? Lire la suite vous fera peut-être changer votre préférence. (Sans rapport, le nom Φ "phi" a été choisi pour faire écho à "point **FI**xes".)

Nous allons raisonner par équivalence afin de traduire l'appartenance à Φ en l'appartenance en un ensemble plus "clair". Ces appartenances concernant des vecteurs de K^2,

$\underline{\underline{\text{soit donc } v \in K^2}}$, $\boxed{\text{dont on notera } a \text{ et } b \text{ les abscisse et ordonnée resp.}}$. On a alors les équivalences

$$\begin{aligned}
v \in \Phi \quad & \underset{\text{de } \Phi}{\overset{\text{déf.}}{\iff}} \quad Mv = v \underset{\text{et de } a \,\&\, b}{\overset{\text{déf. de } M}{\iff}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \cdot & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\
& \underset{\text{matriciel}}{\overset{\text{calcul}}{\iff}} \quad \begin{pmatrix} a+b \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \underset{\text{d'applications}}{\overset{\text{égalité}}{\iff}} \begin{cases} a+b = a \\ b = b \end{cases} \\
& \overset{\text{simplifier}}{\iff} \quad \begin{cases} b = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \underset{\text{coordonnées de } v}{\overset{\text{faire apparaître les}}{\iff}} \begin{cases} b = 0 \\ a = a \end{cases} \underset{\text{lignes}}{\overset{\text{échange}}{\iff}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \iff v = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \overset{?}{\iff} \quad \exists \lambda \in K,\ v = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff v \in \left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_{k \in K} = K \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

À la délicate équivalence $\overset{?}{\iff}$ près, nous avons établi la généralité

$$\forall w \in K^2,\ w \in \Phi \iff w \in K \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

laquelle traduit précisément l'égalité ensembliste

$$\Phi = K \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Prouvons l'équivalence $\overset{?}{\iff}$ laissée de côté.

$\boxed{\Longrightarrow}$ $\underline{\underline{\text{Supposons l'égalité } v = a \binom{1}{0}}}$. $\boxed{\text{Poser alors } \lambda := a}$ livre l'existence souhaitée.

$\boxed{\Longleftarrow}$ $\underline{\underline{\text{Soit } \lambda \text{ un scalaire tel que } v = \lambda \binom{1}{0}}}$, çad tel que $\binom{a}{b} = \binom{\lambda}{0}$. Lire les abscisses donne $a = \lambda$, d'où (en remplaçant dans l'hypothèse) l'égalité $v = a \binom{1}{0}$ désirée.

RQ En fait, puisque la généralité quantifie sur K^2, la véritable égalité ensembliste montrée est plutôt $K^2 \cap \Phi = K^2 \cap K\binom{1}{0}$, laquelle se réduit à celle que nous affirmée vu que nous avons quantifié de façon suffisamment large. Mais il arrive parfois que ce ne soit pas le cas... garder en tête comment alors rectifier le tir.

RQ L'introduction de a et b peut sembler lourde mais elle **met clairement à jour les actes concernés** : $\underline{\underline{\text{l'évocation de } v}}$, PUIS $\boxed{\text{les définitions de } a \text{ et } b}$. Une façon plus ramassée serait d'écrire

$$\text{Soit } v =: \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in K^2 \qquad \text{(ou, avec nos conventions d'emphase : } \underline{\underline{\text{Soit } \boxed{\underline{\underline{v}} =: \tbinom{a}{b}} \in K^2}} \text{).}$$

Le « soit v » signale l'évocation de v et les "deux points" du côté de a et b signalent leur définition.

Une autre façon de procéder serait d'évoquer deux scalaires a et b (« soit $a \in K$, soit $b \in K$ ») PUIS de définir un vecteur $v := \binom{a}{b}$. Dans la suite, on utiliserait alors indifféremment l'égalité $v = \binom{a}{b}$. Toutefois l'orientation initiale n'a rien à voir (évocations de a et b PUIS définition de c VS évocation de c PUIS définitions de a et b) et cela impactera considérablement la suite du discours.

(En revanche, écrire comme on le voit trop souvent « soit $\binom{a}{b} \in K^2$ » est problématique car on ne sait pas qui est évoqué et qui est défini !)

3.4 résoudre $\sqrt{2x} = x - 4$

♠♠♠ qui est x ? ? ? ♠♠♠ Vu la tête des opérations en jeu, il est raisonnable d'imposer que x soit un nombre.

–> **soit x un "nombre"**. Mais quel **type** de nombre ? Tapons large et cherchons dans les seuls "nombres" étudiés de la prépa, çàd les complexes.

L'énoncé serait donc plus clairement formulé comme suit :

Résoudre l'équation $\sqrt{2c} = c - 4$ d'inconnue complexe c

–> **soit donc $c \in \mathbf{C}$**. On a tapé large mais il convient à présent de restreindre au plus grand cadre où **l'égalité de l'équation fait sens** (sinon il n'y a rien à résoudre).

Or l'égalité $\sqrt{2c} = c - 4$ fait sens ssi chacun de ses membres fait sens, çàd ssi $\begin{cases} \sqrt{2c} \text{ fait sens} \\ c - 4 \text{ fait sens (ok car } c \in \mathbf{C}) \end{cases}$, çàd ssi $\sqrt{2c}$ fait sens, çàd ssi $\begin{cases} 2c \text{ fait sens (ok tjs car } c \in \mathbf{C}) \\ 2c \text{ tombe dans le domaine de } \sqrt{\cdot} \end{cases}$, çàd ssi $2c \in \operatorname{Dom} \sqrt{\cdot} = \mathbf{R}_+$, ou encore ssi $c \geq 0$.

–> **supposons donc $c \geq 0$.**

RQ tout ce qui précède est un préliminaire indispensable pour clarifier le plus grand domaine où l'on peut chercher des solutions. Il est rare que ce domaine soit imposé et **il est de votre responsabilité de l'établir**.

Venons-en à la résolution proprement dite.

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} & c \text{ est solution de l'équation étudiée} \iff \sqrt{2c} = c - 4 \iff 2c = (c-4)^2 \\ \iff\ & (c-4)^2 = 2c \iff c^2 - 8c + 16 = 2c \iff c^2 - 10c + 25 = 9 \\ \iff\ & (c-5)^2 - 3^2 = 0 \iff ((c-5) - 3)((c-5) + 3) = 0 \iff (c-8)(c-2) = 0 \\ \iff\ & \begin{cases} c - 8 = 0 \\ \text{ou} \\ c - 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 8 \\ \text{ou} \\ c = 2 \end{cases} \iff c \in \{2, 8\} \end{aligned}$$

(on a utilisé la généralité $\forall a, b \in \mathbf{R},\ ab = 0 \iff \begin{cases} a = 0 \\ \text{ou} \\ b = 0 \end{cases}$ en remplaçant $\begin{matrix} a \leftarrow c - 8 \\ b \leftarrow c - 2 \end{matrix}$).

PB la solution 2 n'en est pas une vu l'implication

$$\boxed{2} \text{ est solution} \implies \underbrace{\overbrace{\sqrt{2 \cdot \boxed{2}}}^{\geq 0} = \overbrace{\boxed{2} - 4}^{= -2 < 0}}_{\text{absurde}} \quad \text{:-(:-(:-(}$$

On est donc passé à côté de quelque chose...

Reprenons tout et tachons, au lieu de manier des équivalences qui nous ont aveuglés, de décomposer en analyse-synthèse.

Analyse Soit s une solution complexe. Comme ci-dessus on montre alors la positivité $s \in \mathbf{R}_+$. De plus, la différence $s-4$ est une racine carrée ($\sqrt{2s}$), donc est positive, d'où la minoration $s \geq 4$. Reprendre la résolution ci-dessus (en remplaçant les équivalences $\iff$ par des implications $\implies$) mène alors à l'appartenance $s \in \{2, 8\}$, d'où (avec $s \geq 4$) l'égalité $s = 8$.

Synthèse On vérifie que 8 DONNE SENS À (à ne pas oublier !) et satisfait l'égalité de l'équation :

$$\sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4 = 8 - 4.$$

Voici une rédaction alternative si l'on souhaite conserver nos équivalences, au prix de quelques tautologies. On a à $r \in \mathbf{R}_+$ fixé (l'ensemble $\mathbf{R}_+$ ayant été trouvé comme ci-dessus) les équivalences

$$\begin{array}{cll}
 & r \text{ est solution de l'équation étudiée} \iff \sqrt{2r} = r - 4 & \\
\overset{?}{\iff} & \left\{\begin{array}{c} \sqrt{2r} = r - 4 \\ r - 4 \geq 0 \end{array}\right. & \text{(car l'égalité du haut implique la positivité du bas)} \\
\iff & \left\{\begin{array}{c} \sqrt{2r}^2 = (r-4)^2 \\ r - 4 \geq 0 \end{array}\right. & \begin{array}{c}\text{(car les deux membres de l'égalité étaient } \textbf{positifs}\text{)} \\ \text{(c'est cette positivité qui nous avait échappé plus tôt} \\ \text{pour pouvoir affirmer l'implication réciproque } \Longleftarrow \text{)}\end{array} \\
\overset{\text{reprendre les}}{\underset{\text{éq. ci-dessus}}{\iff}} & \left\{\begin{array}{c} r = 2 \text{ ou } r = 8 \\ r \geq 4 \end{array}\right. \overset{?}{\iff} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} r = 2 \\ r \geq 4 \end{array}\right.}_{\text{absurde}} \text{ ou } \underbrace{\left\{\begin{array}{c} r = 8 \\ r \geq 4 \end{array}\right.}_{\iff r=8} \overset{?}{\iff} r = 8. &
\end{array}$$

Le "truc" qui a assaini notre première tentative a été d'**incorporer** la positivité $r - 4 \geq 0$ **DANS** l'énoncé que l'on travaille par équivalences. C'est certes plus lourd à écrire mais cela permet de conserver nos équivalences. À chacun·e ses goûts.

Reste à clarifier les équivalences $\overset{?}{\iff}$ à coup de tautologies. Ces détails doivent être établis par le calcul via les tables mais **également compris sur le fond par le simple français !** (Nul besoin de les mettre sur une copie, nous le faisons ici uniquement pour la complétude.)

La première $\overset{?}{\iff}$ repose sur la tautologie $(A \implies a) \implies \left(A \iff \left\{\begin{array}{c} A \\ a \end{array}\right.\right)$ (en français : *on n'affaiblit pas un énoncé en le "conjoignant" avec une de ses conséquences*) où l'on a remplacé $\begin{array}{l} A \leftarrow \sqrt{2r} = r - 4 \\ a \leftarrow r - 4 \geq 0 \end{array}$.

La seconde $\overset{?}{\iff}$ repose sur la tautologie $(A \vee B) \wedge C \iff (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ (*la conjonction se distribue sur la disjonction*).

La dernière $\overset{?}{\iff}$ repose sur la tautologie $\perp \vee E \iff E$ (*l'absurde est neutre pour la disjonction*).

Les deux accolades horizontales reposent d'une part sur l'antilogie $\left\{\begin{array}{c} E \\ F \\ E \implies \neg F \end{array}\right.$ (*est absurde la conjonction de deux énoncés dont l'un réfute l'autre*) où l'on a remplacé $\begin{array}{l} E \leftarrow r = 2 \\ F \leftarrow r \geq 4 \end{array}$, d'autre part sur la première tautologie ci-dessus où l'on a remplacé $\begin{array}{l} A \leftarrow r = 8 \\ a \leftarrow r \geq 4 \end{array}$.

RQ dire « à $r \in \mathbf{R}_+$ fixé » revient à dire « pour chaque réel positif r » et rappelle qu'il s'agit d'une **évocation**, mais *locale*, au sens où sa **portée** est *limitée* : la phrase finie, la lettre r perd son sens. On aurait tout aussi bien pu dire « Soit r un réel positif, on a les équivalences... » (conseillé en première approche) mais l'on a ici anticipé la fin de l'évocation pour ramasser la rédaction. Ce ramassement est l'analogue parfait (sur les objets) des suppositions (sur les énoncés) : dire « **si** A alors... » revient à **supposer** *localement* : à la fin de la phrase, l'énoncé supposé ne l'est plus !

4 deux guides simples pour éliminer 99% de ses erreurs

(à peine esquissé dans l'exposé)

4.1 premier guide

LA PLUPART des errements des étudiantes se regroupent en deux axes :

1. les affirmations sans preuve ;
2. les symboles errants, sans acte de naissance.

Il est normal d'y patauger en phase de recherche/brouillon/exploration (je le fais encore). En revanche, **en phase finale de rédaction**, ces axes ne pardonnent pas : **s'y aventurer assurera un coup fatal** d'une correctrice exigeante.

La bonne chose, c'est que traquer le moindre empiétement sur ces axes affine considérablement sa pensée mathématique. À cet égard, s'exercer sur autrui (pairs, enseignants...) est une bonne école – pour peu que cela soit fait de façon bienveillante, voire coopérative.

Nous avons vu comment les affirmations s'insèrent dans un jeu plus vaste d'actes souvent mécompris. **Les règles sont désormais EXPLICITES** : à vous de les respecter pour évoluer sainement et sereinement. En particulier :

ce que tu affirmes, *tu l'auras prouvé* *– sinon tu le tairas.*	(1^{er} commandement de la mathématique)

GROSSE NUANCE   ce commandement est à prendre en compte **uniquement en finale finale de rédaction**. Pendant votre phase exploratrice, tenez-le à distance – comme un horizon – afin de rester libre, spontanée, et créatrice !

Venons-en aux symboles errants.

4.2 Alice e(s)t la sœur de Bob

Partons d'un exemple de la vie de tous les jours : comprendre la phrase

Alice communique avec Bob

nécessite de savoir **qui est Alice**. (Cela nécessiterait bien sûr d'autres choses – qui est Bob, qu'est-ce que « communiquer »... – mais épuiser toutes les nécessités n'est pas notre propos.)

Alice est-elle vivante ? Ce serait une information, intéressante, apportant de la compréhension à la phrase, mais insuffisante : d'autres êtres vivants pourraient en effet très bien communiquent avec Bob (par exemple tout son microbiote intestinal si Bob possède un intestin).

Alice est-elle humaine ? *Idem.*

Peut-être est-elle une fourmi ? Et Bob un tapir ? *Idem.*

Lister les qualités d'Alice à l'aide d'**adjectifs** (eg « être **grande** ») ou d'articles **indéfinis** (eg « être **une** chercheuse ») peut durer longtemps sans parvenir à cerner **qui** est Alice, de manière **uni**voque[14] – çàd non ambigüe.

Pour employer une métaphore ensembliste, rajouter une qualité revient à intersecter avec une classe supplémentaire : la classe formée des objets possédant la dite qualité. Certes la nouvelle intersection est plus petite, mais quand sait-on que cette intersection devient un **sing**leton ?

Alice est-elle la sœur de Bob ? Il y aurait alors **univocité**, marquée par l'article **défini** (« **la** sœur de ») et le problème serait déporté sur Bob : il suffirait en effet de cerner Bob pour cerner sa sœur, çàd Alice.

[14] *uni-voque* : une seule + voie

Mais encore une fois le langage de tous les jours nous joue des tours : qui nous dit que Bob (une fois cerné en tant qu'être humain) n'a pas *plusieurs* sœurs ? Quand on entend « *Je suis allée chez ma sœur* », la matheuse précisera pour elle : « *Je suis allée chez* ***une de mes*** *sœurs* ». Et l'ambigüité ne pose généralement aucun problème dans la vie de tous les jours. Elle en pose cependant en mathématique, au risque de ne plus savoir de qui on parle.

4.3 être ou être – telle devrait être la question

L'exemple précédent met à jour

la polysémie du verbe *être*.

1. La question « qui est Alice ? » parle d'*être* au sens de l'*identité* : eg Alice est le carré de 7, est la présidente française. Cette acception d'*être* va avec des **articles définis**, des **noms propres**, des **singularités**, des êtres **singuliers**, la relation d'**égalité** =.
2. Une seconde acception d'*être* est au sens des *qualités* : Alice est bleue, est une fougère... Elle va avec des **articles INdéfinis**, des **noms communs**, des **particularités**, des êtres **particuliers**, la relation d'**appartenance**[15] $\in$.

Reprenons pour exemple notre résolution de l'équation $\sqrt{2x} = x - 4$. Nous demandions à juste titre « qui est x ? ». S'il est tristement courant d'entendre pour réponse « x réel » (oui, avec autant de français...), l'histoire d'Alice et Bob nous montre en quoi cette réponse tombe à côté : on a répondu en *qualifiant* x, en en donnant une *qualité*, une *particularité*, l'*appartenance* à un certaine classe, bref en comprenant le verbe "être" au sens des *qualités*, et non au sens de l'*identité*.

Mais imaginons un instant que nous n'ayons pas le réflexe de penser que derrière le nom « Alice » se cache nécessairement un être humain, singulier, "bien déterminé". La réponse « Alice est vivante » énonce alors une propriété sur quelqu'un : et, pour que cet énoncé fasse sens, il convient que son unique terme – Alice – fasse sens. Or cela était précisément l'objet de la question !

Sans Alice l'absurdité va devient criante : pour pouvoir comprendre la propriété « x est un réel », il faut bien que x dénote déjà quelque objet !

4.4 défini ou indéfini ? ou quand on compte les sœurs de Bob

Une autre leçon à tirer de l'exemple d'Alice & Bob concerne l'**univocité** les articles définis et **ce vers quoi** ils pointent. Quand je parle de :
« la troisième lune de la Terre »,
« le logarithme de tel réel »,
« l'argument de tel complexe »,
« la base de tel espace vectoriel »,
est-ce que je me suis bien assuré de l'univocité de mes expressions ? En d'autres termes : n'aurais-je pas oublié que Bob pouvait avoir plusieurs sœurs ? Ai-je même considéré l'éventualité où Bob n'aurait *aucune* sœur ? ?

En termes plus techniques : quand je parle de l'image $f(o)$ par une application f d'un objet o, ai-je vérifié

1. que f était bien une application ;
2. que o (pour peu qu'on sache de qui on parle) tombait bien dans le domaine de définition de f ?

Et, si je montre que ce n'est pas le cas, comment rectifier le tir ?

Reprenons nos 4 exemples un par un.

« la troisième lune de la Terre » Cette expression est bien univoque : « la Terre » l'est déjà (c'est notre planète), et l'application « 3^{e} satellite de » est bien une application. En revanche, l'image par cette application de la Terre est... une chimère ! L'expression « la 3^{e} lune de la Terre », bien qu'univoque, bien qu'indiquant un sens, une direction, ne pointe vers rien, ne désigne rien, ne dénote rien. Bref : **Bob n'a ici aucune sœur !**

[15] Le symbole $\in$ est une version (dite lunaire) de la lettre ε, initiale du verbe $\varepsilon\sigma\tau\iota$ (*esti*) signifiant « être au sens des qualités ». Ainsi, l'appartenance $r \in \mathbf{R}$ se lit étymologiquement « r **est** réel » !

« le logarithme de -1 » De même, cette expression est bien univoque (elle signifie « **le** réel dont l'exponentielle vaut -1 ») mais ne dénote rien car le domaine de la fonction logarithme est la demi-droite $\mathbf{R}_+^*$ (en prépa du moins), or -1 tombe en dehors. Ici encore **Bob n'a pas de sœur** et les symboles $\ln(-1)$ ne désignent rien.

« l'argument de -1 » On a cette fois affaire à une plurivocité : l'article défini « l' » est ici impropre car l'application « argument » n'en est pas une ! On peut parler d'**un** argument de -1 (eg le réel π, $-\pi$ ou 68721π), on peut donner **des** arguments de -1 (eg les trois réels précédents), on peut parler **des** arguments de -1 au sens abusif de **l'ensemble de ses** arguments (çàd $2\pi\mathbf{Z}$), on peut même parler de « l'argument principal de -1 » (son unique argument $\in [-\pi, \pi[$). Mais « l'argument de -1 » ne veut rien dire. Bref : **Bob a ici plusieurs sœurs !**

« la base de $\mathbf{R}^2$ » Combien de fois lit-on cette expression ?... Si l'on pensait « la base canonique de $\mathbf{R}^2$ », il n'y aurait rien à redire... Mais là encore on pèche par plurivocité : non seulement un espace vectoriel pourrait avoir *plusieurs* bases, mais en plus il en a *toujours* plusieurs (sauf cas dégénérés laissés à votre perspicacité). Dites donc « **une** base de $\mathbf{R}^2$ » pour être tranquille... Et laissez **Bob avoir plusieurs sœurs !**

On récapitule :

combien Bob a de sœurs	**à prouver** pour pouvoir en parler	**acte** alors légitime	**comment** en parler	type d'article	type de nom
une seule sœur	existence et unicité	définition	**la** sœur de Bob	article **défini**	nom propre
plusieurs sœurs	existence	évocation	(soit) **une** sœur de Bob	article **in**défini	nom commun
aucune sœur	$1 = 0$	se taire !	ne pas en parler !	aucun !	nom sale !

(évidemment « nom sale » est de notre cru).

4.5 faire sens ou ne pas faire sens

Nous dirons qu'un objet – abusivement identifié à une expression censée le dénoter – **fait sens** lorsque

1. cette expression a un sens, une direction (*univocité*)
2. ce sens, cette direction pointe *vers quelque objet* (l'expression *désigne*, *dénote* quelque chose)

Par négation, les expressions *ne faisant pas sens* seront celles ou bien ambigües (plurivoques : Bob a plusieurs sœurs) ou bien ne désignant rien (Bob n'a aucune sœur).

Par exemple, les symboles $\frac{1}{0}$ et $\ln(-1)$ ne font pas sens car, bien qu'univoques, ils ne dénotent rien, tandis que les symboles $\sqrt{i}$ et $\arg i$ ne font pas sens car ils sont ambigus (ont plusieurs sens).

EG Avec notre équation $\sqrt{2x} = x - 4$, quand nous avons délimité un domaine en dehors duquel chercher des solutions n'aurait aucun sens, nous avons déterminé les complexes c « donnant sens à » l'égalité $\sqrt{2c} = c - 4$, çàd tels que les deux membres $\sqrt{2c}$ et $c - 4$ d'une part fassent sens (ce qui nous a conduits à résoudre l'équation dans les réels positifs), d'autre part soient comparables pour la relation = concernée (ce qui est toujours le cas).

Sans rentrer plus en détails, on retiendra plus généralement que

pour peu qu'il soit "bien formé", un énoncé *fait sens* ssi
tous les objets et relations dont il parle font sens et sont "compatibles"

RQ On lit souvent « $\frac{1}{0}$ n'*existe* pas » ou « 1^∞ est *mal défini* ». Or, pour que ces phrases signifient justement quelque chose, qu'elles aient du sens, il faut déjà que leurs sujets en aient, çàd qu'ils existent ou soient bien définis, ce qu'excluent précisément les significations des dites phrases ! (Le paradoxe du menteur, vous connaissez ?) La question n'est donc pas de savoir si tel ou tel **objet** *existe* ou *est bien défini*, mais plutôt si tels ou tels **symboles** – visant un objet – peuvent avoir/recevoir du sens, si ces symboles *font sens.*

4.6 3 actes "donner-sens" – deuxième guide

Laissons Alice, SHAKESPEARE et les sœurs de Bob derrière nous. Comment, en fin de compte, bien parler d'*objets* en maths ? comment éviter les chimères ?

En tout premier lieu : grâce à l'acte **définition**, qui compose un nouvel objet à l'aide d'objets antérieurs[16]. EG « notons γ la limite de la suite $N \mapsto \left(\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{N}\right) - \ln N$ ». En d'autres termes : une définition *nomme un nouvel objet* via une expression qui doit être *univoque* et *dénoter* quelque chose – faute de laisser rentrer une chimère dans la bergerie. Si définir reste un acte "gratuit", les *moyens* de la définition requièrent toujours une affirmation d'**unicité & existence** –> ce qui renvoie au **1**[er] **commandement**. (Dans notre exemple, il s'agirait d'invoquer l'unicité de la limite et d'établir la convergence de la suite considérée.)

Par ailleurs, si l'on pense une **évocation** « soit o un objet » comme une évocation stricte « soit un objet » *suivie d'une définition*[17] « nommons o l'objet évoqué », alors on pourra voir les évocations comme des actes à l'issue desquels *un objet est né, est nommé*, dont on pourra clairement parler.

Enfin, les actes restants ne concernent que les *énoncés* et il serait difficile d'en tirer quelque *objet* que ce soit pour discourir.

En somme :

chaque symbole introduit doit l'avoir été dès la première fois
via ou bien $\boxed{\textit{une } \textbf{\textit{définition}}}$ *ou bien une* ***évocation***.

Dit autrement, chaque notation doit avoir *reçu son sens*, doit avoir *pris sens* quelque part en amont, dans un acte "donner-sens", dans un **acte de naissance**[18] parmi les trois précités :

ce dont tu parles, *tu lui auras donné sens* *au préalable – toi ou autrui.*	(2[d] commandement de la mathématique)

GROSSE NUANCE la même que pour le 1[er] commandement. À suivre uniquement comme horizon pour la rédaction **finale**.

Exemple archétypique Quand on lit « Soit E un ev de dimension n », on peut et on doit se demander : mais qui est n ? A-t-il reçu son sens en amont ? auquel cas l'égalité $\underline{\underline{\dim E = n}}$ fait partie de la supposition ? Ou bien reçoit-il son sens dans cette évocation même ? auquel cas l'égalité $\boxed{\dim E =: n}$ est une définition ? Le premier cas apparaîtra de lui-même après recherche de la première occurrence de n dans le discours. Quant au second cas, on gagnerait à reformuler clairement (tout en tenant compte des programmes boudant les dimensions infinies) :

« $\underline{\underline{\text{Soit } E \text{ un ev de dimension finie}}}$ $\boxed{\text{dont on note } n \text{ la dimension}}$ ».

Faute d'état civil, aucun symbole dans un discours ne saurait dénoter quoi que ce soit **de façon pérenne**, Cela peut cependant s'avérer pratique de façon **locale**, çàd dans certains **contextes**.

[16] Tout comme les preuves reposent *in fine* sur des **improuvables** (les axiomes et les tautologies), si l'on remonte les définitions on va évidemment tomber sur des **indéfinissables**. Le sens de ces derniers soulève de profondes questions épistémologiques, **à soigneusement éviter aux concours**. Feignez donc de savoir ce qu'est un point, une droite, un vecteur, une fonction, un ensemble...

[17] Ceci n'est qu'une vue de l'esprit à visée mnémotechnique : nos règles du jeu empêchent de séparer ainsi dans une évocation la définition sous-entendue.

[18] l'écho phonétique entre « donner-sens » et « de naissance » est volontaire et pourra servir la mnémonique

4.7 un symbole peut-il ne rien dire ?

Il reste en effet tous les symboles dits **muets**, ceux ne "disent rien", qui ne dénotent rien, **hors des contextes où ils apparaissent**.

Par exemple, énoncer la généralité $\forall c \in \mathbf{C},\ \exists r \in \mathbf{C},\ r^2 = c$ revient à dire

« chaque complexe a une racine carré » ;

or dans cette dernière formulation AUCUN nom n'apparaît, ce qui montre que les symboles c et r NE peuvent PAS dénoter quoi que ce soit en dehors de la généralité énoncée. D'ailleurs, changer de lettres est un autre moyen de s'en rendre compte : on dit la même chose en énonçant la généralité $\forall \square \in \mathbf{C},\ \exists \heartsuit \in \mathbf{C},\ \heartsuit^2 = \square$!

De même, l'égalité $\lim_{t\to 0} \sin t = \lim_0 \sin$ montre que le symbole t NE peut RIEN dénoter une fois sorti de la limite où il apparaît. D'ailleurs, prononcer en français « la limite de sinus en 0 » ne met en jeu aucun nom (autre que le point 0 où l'on évalue la limite).

Voici les principaux contextes de prépa où un symbole muet m peut apparaître :

1. les définitions locales : « pour chaque objet m notons... » ;
2. les évocations locales : « on a pour chaque m l'énoncé... » ou « on a à m fixé l'énoncé... » ;
3. les généralités : $\forall m$; les existences : $\exists m$;
4. les applications : $m \mapsto \frac{m+|m|}{2}$ ou $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C}^* \\ m & \longmapsto & e^{im} \end{array} \right.$; les familles $(e^m)_{m\in\mathbf{R}}$;
5. les divers composés de familles : sommes $\sum_{m=1}^{5}$, produits $\prod_{m=6}^{8}$, unions $\bigcup_{m\geq 42}$, intersections $\bigcap_{m\neq 18}$, intégrales $\int_{m=0}^{7} m^2 dm$... ;
6. les tendances : $\frac{1}{m} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$; les limites : $\lim_{m\to 0} \frac{\sin m}{m}$;
7. les ensembles décrits par compréhension/séparation $\{m \in M\ ;\ P_m\}$ ou par image directe $\{f(m)\}_{m\in M}$...

Dans chacun des contextes précédents, il y a un "opérateur" qui rend m muet – un *mutificateur*[19]. Les voici :

« pour chaque » « à fixé » $\forall$ $\exists$ $\sum$ $\prod$ $\int$ $\bigcup$ $\bigcap$ $\rightarrow$ $\mapsto$ $\{\ \in\ ;\ \ \}$ $\{f(\ )\}_{\in}$

La règle est simple pour éviter les symboles muets errants :

*chaque symbole muet doit avoir **son** **mutificateur** exclusivement attitré.*

Évidemment, tous ces contextes peuvent s'emboîter et les mutificateurs peuvent s'associer, comme par exemple dans l'existence tarabiscotée (inventée pour l'exercice)

$$\exists L \in \mathbf{C},\ \bigcap_{\alpha\in\mathbf{Z}} \bigcup_{N\in\mathbf{N}} \left\{ c \in \mathbf{C}\ ;\ \forall r \in \mathbf{R},\ \exists n \in \mathbf{N},\ \left| \sum_{m=1}^{n-1} \prod_{p=2}^{mx} r^p \right| < \int_{t=1}^{\infty} \frac{dt}{N^{\alpha t}} \right\} \subset \left\{ \frac{1}{L^z} \right\}_{z\in\mathbf{Z}}.$$

Saurez-vous repérer dans cette dernière qui mutifie qui ? Est-ce que tous les symboles utilisés ont bien reçu leur sens quelque part ? Si oui, vous êtes parées pour parler mathématique :-)

[19] nous empruntons cette terminologie à René Cori (*cf.* ses notes de cours de *Langage mathématique* à l'Université Paris-Diderot du 18 juillet 2013, chapitre 1, p. 12/13, disponibles en ligne)