Représentations d'algèbres de dimension finie sur $\mathbb{C}$

Marc SAGE

Table des matières

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $k \in \mathbb{N}^*$.
On regarde l'action de $\mathfrak{S}_k$ dans $V^{\otimes k}$ qui permute les positions.
On a ainsi une injection de $\mathfrak{S}_k$ sur $GL\left(V^{\otimes k}\right)$, mettons $\rho_k : \mathfrak{S}_k \longrightarrow GL\left(V^{\otimes k}\right)$.
On regarde, dans $L\left(V^{\otimes k}\right)$, les combinaisons linéaires de la forme

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \rho_k\left(\sigma_i\right)$$

où $\alpha_i \in \mathbb{C}$ et $\sigma_i \in \mathfrak{S}_k$, ied l'algèbre engendrée par le plongé de $\mathfrak{S}_k$ dans $GL\left(V^{\otimes k}\right)$. Ceci forme une sous-algèbre de $L\left(V^{\otimes k}\right)$.

Quel est le commutant de cette algèbre, ied

$$\left\{u \in L\left(V^{\otimes k}\right) \text{ tel que } \forall \sigma \in \mathfrak{S}_k,\ u\rho_k(\sigma) = \rho_k(\sigma)\, u\right\} ?$$

Toutes les algèbres considérées seront associatives, unitaires, et le corps de base sera $\mathbb{C}$ – sauf mention contraire.

Par exemple, $L(V)$, $T(V)$, $S(V)$.

1 Plongement d'un groupe G dans l'algèbre $\mathbb{C}[G]$

Soit G un groupe. On définit $\mathbb{C}[G]$ comme le $\mathbb{C}$-espace vectoriel libre engendré par G, ied l'ensemble des combinaisons linéaires formelles des élements de G.
On notera

$$\delta_{g_0} : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ g & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } g = g_0 \\ 0 \text{ si } g \neq g_0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

le Dirac en g_0, de sorte que les δ_g forment une base de $\mathbb{C}[G]$:

$$u = \sum_{g \in G} u(g)\, \delta_g.$$

On munit $\mathbb{C}[G]$ d'une structure d'algèbre associative unitaire en définissant un produit $*$ sur les élément de base par

$$\delta_g * \delta_h = \delta_{gh},$$

qui donne lieu à un produit de convolution :

$$[u * v](g) = \sum_{xy=g} u(x)\, v(y) = \sum_{h \in G} u\left(gh^{-1}\right) v(h) = \sum_{h \in G} u(h)\, v\left(h^{-1}g\right).$$

En effet,

$$\begin{aligned}
[u * v](g) &= \left[\sum_{g_u \in G} u(g_u)\, \delta_{g_u}\right] * \left[\sum_{g_v \in G} v(g_v)\, \delta_{g_v}\right](g) \\
&= \left[\sum_{g_u, g_v \in G} u(g_u)\, v(g_v)\, \delta_{g_u} * \delta_{g_v}\right](g) \\
&= \sum_{g_u, g_v \in G} u(g_u)\, v(g_v)\, \delta_{g_u g_v}(g) \\
&= \sum_{g_u g_v = g} u(g_u)\, v(g_v).
\end{aligned}$$

Proposition.

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Se donner un morphisme de groupes

$$G \longrightarrow \mathcal{GL}(V)$$

est équivalent à se donner un morphisme d'algèbres

$$\mathbb{C}[G] \longrightarrow \mathcal{L}(V).$$

Démonstration.
Si on a $\varphi : \mathbb{C}[G] \longrightarrow \mathcal{L}(V)$, on restreint φ à G, et alors les images sont inversibles.
Si on a $\rho : G \longrightarrow \mathcal{GL}(V)$, on le prolonge à $\mathbb{C}[G]$ par linéarité.

2 Représentations d'algèbres : définitions

Définitions.
Soit A une K-algèbre.
Une représentation *de A est un couple (ρ, V) où V est un K-espace vectoriel et*

$$\rho : A \longrightarrow \mathcal{L}(V)$$

un morphisme de K-algèbres (on cherche à représenter A comme une algèbre de matrices sur le corps K). Souvent, ρ sera sous-entendu.
Si une représentation est fixée, on notera par abus

$$\begin{aligned} a \cdot x &:= [\rho(a)](x) \\ A \cdot x &:= \{a \cdot x \text{ où } a \text{ décrit} A\}. \end{aligned}$$

Un sous-espace vectoriel W de V est dit stable *par ρ si*

$$A \cdot W \subset W.$$

On peut alors considérer les représentation restreinte (ρ_W, W) et représentation quotient $\left(\rho_{V/W}, {}^{V}\!/_{W}\right)$ définies respectivement par

$$\rho_W : \begin{cases} A & \longrightarrow & \mathcal{L}(W) \\ a & \longmapsto & \rho(a)_{|W} \end{cases} \quad \text{et}$$
$$\rho_{V/W} : \begin{cases} A & \longrightarrow & \mathcal{L}\left({}^{V}\!/_{W}\right) \\ a & \longmapsto & [x + W \longmapsto a \cdot x + W] \end{cases}$$

(la connaissance de ces deux représentations permet parfois de reconsitituer la représentation entière).
Une représentation (τ, W) est appelée sous-représentation *de (ρ, V) si W est un sous-espace stable par ρ et si (τ, W) est la représentation ρ_W restreinte à W. On dira abusivement que W est une sous-représentation de V* (noter la correspondance entre la donnée d'un sous-espace stable et d'une sous-représentation).
Une représentation V est dite irréductible *si les seuls sous-espaces stables de V sont $\{0\}$ et V.*
Une représentation V est dite complètement réductible *(ou* semi-simple*) si tous sous-espace vectoriel W stable admet un supplémentaire W' stable : $V = W \oplus W'$.*
On dira qu'un élément a d'une algèbre A commute à *une partie B de A si a commute avec tous les éléments de B.*

Donnons tout d'abord une propriété bien pratique, qui sert à faire commuter un endomorphisme à un groupe fini d'isomorphismes.

Propriété (commutativation).
Soit V un espace vectoriel, u un endomorphisme de $\mathcal{L}(V)$ et G un sous-groupe fini de $\mathcal{GL}(V)$. Alors l'endomorphisme

$$\widehat{u} := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) u \rho(g)^{-1}$$

commute à G.

Démonstration.
Pour $g \in G$, on a

$$\begin{aligned}\widehat{u}g &= \left(\frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} huh^{-1}\right) g = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} gg^{-1}huh^{-1}g \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} g\left(g^{-1}h\right)u\left(g^{-1}h\right)^{-1} = g\frac{1}{|G|}\sum_{i\in G} iui^{-1} = g\widehat{u}.\end{aligned}$$

On utilisera également très souvent le petit résultat suivant, qui généralise la propriété bien connue

$$uv = vu \implies \operatorname{Ker} u \textit{ stable par } v.$$

Petit résultat pratique.
Si un endomorphisme u commute à $\rho(G)$, alors son noyau $\operatorname{Ker} u$ est stable par ρ.

Démonstration.
Soit $x \in \operatorname{Ker} u$. On a $\forall g \in G$,

$$u(g\cdot x) = [u\circ\rho(g)](x) = [\rho(g)\circ u](x) = g\cdot u(x) = g\cdot 0 = 0,$$

donc $g\cdot x \in \operatorname{Ker} u$.

3 Représentations de groupes finis

Théorème.
Soit G un groupe fini et ρ une représentation de $\mathbb{C}[G]$. Alors ρ est complétement réductible

(remarque : $\mathbb{C}$ pourrait être remplacé par tout corps où l'ordre du groupe est inversible)

Démonstration du théorème.
Soit W un sous-espace vectoriel stable par ρ. On cherche un supplémentaire stable.
Soit S un supplémentaire quelconque de W :

$$V = W \oplus S.$$

On regarde le projecteur p sur W parallèlement à S, de sorte que $S = \operatorname{Ker} p$ est un candidat potentiel. En effet, d'après le petit résultat, $\operatorname{Ker} p$ sera stable si p commute à $\rho(G)$.

On "commutative" donc p en posant

$$\widehat{p} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)\,p\rho(g)^{-1},$$

et alors

$$K := \operatorname{Ker}\widehat{p}$$

est stable par ρ.

On va montrer que $\widehat{p}$ est un projecteur d'image

$$\operatorname{Im}\widehat{p} = W,$$

ce qui concluera car alors

$$V = \operatorname{Im} \widehat{p} \oplus \operatorname{Ker} \widehat{p} = W \oplus K$$

avec K stable, *CQFD.*

D'une part, pour $x \in W$, on vérifie que

$$\begin{aligned}
\widehat{p}(x) &= \left[\frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \rho(g)\, p \rho(g)^{-1}\right](x) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} g \cdot \left(p\left(\underbrace{g^{-1} \cdot x}_{\in W \text{ car } W \text{ stable}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} g \cdot \left(\underbrace{g^{-1} \cdot x}_{\text{car } W = \operatorname{Im} p}\right) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} x = x,
\end{aligned}$$

d'où

$$\widehat{p}_{|W} = \operatorname{Id}_W$$

et

$$W \subset \operatorname{Im} \widehat{p};$$

d'autre part, pour $x \in V$, on a

$$\begin{aligned}
\widehat{p}(x) &= \left[\frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \rho(g)\, p \rho(g)^{-1}\right](x) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} g \cdot p\left(g^{-1} \cdot x\right) \\
&\in \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \underbrace{g \cdot W}_{= W \text{ car } W \text{ stable par } G} = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} W = W,
\end{aligned}$$

d'où $\operatorname{Im} \widehat{p} \subset W$ et l'égalité

$$\operatorname{Im} \widehat{p} = W.$$

Par ailleurs, pour $x \in V$, on a

$$\widehat{p}^2(x) = \widehat{p}\left(\underbrace{\widehat{p}(x)}_{\in W}\right) = \widehat{p}(x),$$

ied

$$\widehat{p}^2 = \widehat{p},$$

ou encore $\widehat{p}$ projeteur. Ceci achève les vérifications.

4 Opérateurs d'entrelacement – lemme de Schur

Définitions.

On appelle opérateur d'entrelacement *entre deux représentations* $\begin{cases} \rho_1 : A \longrightarrow \mathcal{L}(V_1) \\ \rho_2 : A \longrightarrow \mathcal{L}(V_2) \end{cases}$ *toute application linéaire*

$$T : V_1 \longrightarrow V_2$$

telle que

$$\forall a \in A,\ T\rho_1(a) = \rho_2(a)\, T,$$

ied

$$\begin{cases} \forall a \in A \\ \forall x \in V_1 \end{cases},\ T(a \cdot x) = a \cdot T(x).$$

L'ensemble des opérateurs d'entrelacement entre ρ_1 *et* ρ_2 *sera noté*

$$\operatorname*{Hom}_A(V_1, V_2)$$

(on sous-entendera ρ_1 *et* ρ_2*) et est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{L}(V_1, V_2)$*.*

On dit que ρ_1 et ρ_2 sont équivalentes *s'il existe un opérateur d'entrelacement bijectif :*

$$T\rho_1(a)\,T^{-1} = \rho_2(a)\,,$$

ied

$$T\left(a\cdot T^{-1}(x)\right) = a\cdot x.$$

Si ρ_1 *et* ρ_2 *sont de dimension finie, elles sont équivalentes ssi il existe* $\left\{\begin{array}{l}\mathcal{B}_1 \textit{ base de } V_1\\ \mathcal{B}_2 \textit{ base de } V_2\end{array}\right.$ *telles que pour tout* $a\in A$ *on ait*

$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}_1}\rho_1(a) = \operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}_2}\rho_2(a)$$

(envoyer $\mathcal{B}_1$ sur $\mathcal{B}_2$ via T).

On donne ici une CNS vitale pour que deux représentions irréductibles sur $\mathbb{C}$ de dimension finie soient équivalentes.

Lemmes de Schur.
Soit A une algèbre sur un corps ***algébriquement clos****, et (ρ,V) et (τ,W) deux représentations* ***irréductibles*** *de dimension finie de A. Alors :*
- Deux opérateurs d'entrelacement entre ρ et τ sont nécessairement liés ;
- On dispose de la formule

$$\dim\operatorname*{Hom}_A(V,W) = \left\{\begin{array}{c}1 \textit{ si } \rho \textit{ et } \tau \textit{ sont équivalentes}\\ 0 \textit{ sinon}\end{array}\right. .$$

Démonstration.
- Montrons tout d'abord que tout opérateur d'entrelacement non nul est inversible.

Soit $T: V\longrightarrow W$ non nul. On écrit

$$\forall a\in A,\ T\rho(a) = \tau(a)\,T\,;$$

ainsi, d'une part $\operatorname{Ker} T\subsetneq V$ est stable par ρ, donc est réduit à 0, ied T injective, d'autre part $\operatorname{Im} T\neq 0$ est stable par τ, donc vaut W tout entier et T est surjective.
- Prouvons à présent que deux opérateurs d'entrelacement sont nécessairement liés.

Soient T et S dans $\operatorname{Hom}_A(V,W)$ supposés non nuls (sinon ils sont clairement liés). D'après ce qui précède, ils sont inversibles. Alors $S^{-1}T\in\mathcal{GL}(V)$ possède une valeur propre λ (par l'hypothèse de clôture algébrique), d'où un sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker}\left(S^{-1}T-\lambda\right)$ non réduit à $\{0\}$. Par ailleurs, on a

$$\rho(a)\,S^{-1}T = S^{-1}\tau(a)\,T = S^{-1}T\rho(a)\,,$$

donc $\rho(a)$ commute avec $S^{-1}T$, a fortiori avec $S^{-1}T-\lambda\operatorname{Id}_V$ et par conséquent stabilise le noyau $\operatorname{Ker}\left(S^{-1}T-\lambda\right)$. Ceci tenant pour tout a, $\operatorname{Ker}\left(S^{-1}T-\lambda\right)\neq\{0\}$ est stable par ρ et vaut donc V tout entier, d'où $S^{-1}T-\lambda=0$ et $S=\lambda T$.
- Nous sommes maintenant en mesure de conclure.

Si $\dim\operatorname{Hom}_A(V,W)=1$, alors il existe un opérateur d'entrelacement non nul, ied inversible, d'où $\rho\sim\tau$.

Réciproquement, si $\rho\sim\tau$, il existe un opérateur d'entrelacement T_0 inversible, donc non nul, et alors tous les autres sont liés avec T_0, d'où $\dim\operatorname{Hom}_A(V,W)=1$.

5 Représentation d'algèbres de matrices

5.1 Théorème fondamental

On montre ici que toute représentation de $\mathcal{M}_n(K)$ est équivalente à une somme directe de représentations chacune isomorphe à la représentation standard $\left\{\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_n(K) & \longrightarrow & L(K^n)\\ A & \longmapsto & A\times\end{array}\right.$.

Théorème.

Soit K un corps quelconque, n un entier ≥ 1 et

$$\rho : \mathcal{M}_n(K) \longrightarrow \mathcal{L}(V)$$

une représentation de dimension ***finie*** *de $\mathcal{M}_n(K)$.*

Alors $n \mid \dim V$ et il existe une base $\mathcal{B}$ de V telle que pour tout A dans $\mathcal{M}_n(K)$ on a

$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} \rho(A) = \begin{pmatrix} A & & & \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ & & & A \end{pmatrix}.$$

Démonstration.

On dispose d'un morphisme, donc on regarde l'images de générateurs. On s'intéresse donc naturellement aux $\rho(E_{i,j})$.

Posons $\left\{ \begin{array}{c} P_i = \rho(E_{i,i}) \\ V_i = \operatorname{Im} P_i \end{array} \right.$. Puisque $\left\{ \begin{array}{c} \sum_{i=1}^n E_{i,i} = \mathrm{Id} \\ E_{i,i}E_{j,j} = \delta_i^j E_{i,i} \end{array} \right.$, en passant à ρ, on obtient d'une part $\sum_{i=1}^n P_i = \mathrm{Id}$, d'où $V = V_1 + ... + V_n$, d'autre part $P_iP_j = \delta_i^j P_i$, d'où

$$V = V_1 \oplus ... \oplus V_n$$

car

$$\begin{aligned} v_1 + ... + v_n = 0 &\implies P_1(x_1) + ... + P_n(x_n) = 0 \\ &\implies P_kP_1(x_1) + ... + P_kP_n(x_n) = 0 \\ &\implies 0 + ... + 0 + P_kP_k(x_k) + 0 + ... + 0 = 0 \\ &\implies P_k(x_k) = 0 \\ &\implies v_k = 0 \quad \text{pour tout } k = 1, ..., n. \end{aligned}$$

On notera de plus que, pour $x \in V_i$, disons $x = P_i(y)$, on a

$$P_i(x) = P_i^2(y) = P_i(y) = x,$$

de sorte que

$$(P_i)_{|V_i} = \mathrm{Id}_{V_i}.$$

Montrons maintenant que les V_i ont meme dimension, en établissant la bijectivité des

$$\rho(E_{i,j}) : V_j \longrightarrow V_i.$$

On peut écrire

$$\mathrm{Id}_{V_i} = (P_i)_{|V_i} = \rho(E_{i,i})_{|V_i} = \rho(E_{i,j})\,\rho(E_{j,i})_{|V_i},$$

ce qui donne l'injectivité de $\rho(E_{j,i})_{|V_i}$ et l'inclusion $\operatorname{Im}\rho(E_{i,j}) \supset V_i$. L'inclusion réciproque s'obtient en écrivant

$$\rho(E_{i,j}) = \rho(E_{i,i})\,\rho(E_{i,j})\,\rho(E_{j,j}) = P_i\ \rho(E_{i,j})\ P_j,$$

d'où

$$\operatorname{Im}\rho(E_{i,j}) = V_i$$

et la surjectivité de $\rho(E_{i,j}) : V_j \longrightarrow V_i$.

Fixons maintenant une base $\left(e_1^{(1)}, ..., e_r^{(1)}\right)$ de V_1 et posons

$$e_k^{(i)} = E_{i,1} \cdot e_k^{(1)} \in \operatorname{Im}\rho(E_{i,1}) = V_i$$

(noter la cohérence pour le cas $i = 1$, où

$$E_{1,1} \cdot e_k^{(1)} = P_1\left(\underbrace{e_k^{(1)}}_{\in V_1}\right) = e_k^{(1)} \qquad \text{car } (P_1)_{|V_1} = \mathrm{Id}_{V_i}),$$

de sorte que $\left(e_1^{(i)}, ..., e_r^{(i)}\right)$ est une base de V_i :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{r} \lambda_k e_k^{(i)} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \left(E_{i,1} \cdot e_k^{(1)}\right) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad E_{i,1} \cdot \left(\sum_{k=1}^{r} \lambda_k e_k^{(1)}\right) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{r} \lambda_k e_k^{(1)} = 0 \qquad \text{par injectivité de } \rho\left(E_{i,1}\right)_{|V_1} \\
&\Longrightarrow \quad (\lambda_k) = 0 \qquad \text{car } \left(e_1^{(1)}, ..., e_r^{(1)}\right) \text{ est libre}
\end{aligned}$$

On a ainsi

$$\begin{aligned}
V &= V_1 \oplus ... \oplus V_n \\
&= \left(Ke_1^{(1)} \oplus ... \oplus Ke_r^{(1)}\right) \oplus \left(Ke_1^{(2)} \oplus ... \oplus Ke_r^{(2)}\right) \oplus ... \oplus \left(Ke_1^{(n)} \oplus ... \oplus Ke_r^{(n)}\right)
\end{aligned}$$

Regardons l'action des $E_{i,j}$ sur un $e_k^{(l)}$:

$$E_{i,j} \cdot e_k^{(l)} = E_{i,j} \cdot E_{l,1} \cdot e_k = \delta_j^l E_{i,1} \cdot e_k = \delta_j^l e_k^{(i)}.$$

Ainsi, les sous-espaces stables qui apparaissent naturellement sont les

$$U_k = \text{Vect}\left(e_k^{(1)}, e_k^{(2)}, ..., e_k^{(n)}\right)$$

pour $k = 1, ..., r$. Par ailleurs, le calcul ci-dessus montre que

$$\underset{\left(e_k^{(1)}, ..., e_k^{(n)}\right)}{\text{Mat}} \rho\left(E_{i,j}\right) = E_{i,j},$$

de sorte que, en posant

$$\mathcal{B} = \left(e_1^{(1)}, ..., e_1^{(n)},\ e_2^{(1)}, ..., e_2^{(n)},\ ...,\ e_r^{(1)}, ..., e_r^{(n)}\right)$$

(on met les U_k bout à bout), on a

$$\underset{\mathcal{B}}{\text{Mat}}\, \rho\left(E_{i,j}\right) = \begin{pmatrix} E_{i,j} & & & \\ & E_{i,j} & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_{i,j} \end{pmatrix},$$

d'où le théorème par linéarité.

Remarque.
Le résultat montre que ρ est injective.
Mais on le savait déjà : $\operatorname{Ker} \rho$ est un idéal bilatère de $\mathcal{M}_n(K)$, donc soit $\{0\}$, soit $\mathcal{M}_n(K)$.
En effet, soit I un idéal bilatère non nul de $\mathcal{M}_n(K)$, et soit $A \neq 0$ dans I, mettons $a_{i_0,j_0} \neq 0$. En remarquant que

$$E_{i_0,i_0} A E_{j_0,j_0} = a_{i_0,j_0} E_{i_0,j_0}$$

et que

$$E_{k,i_0} E_{i_0,j_0} E_{j_0,l} = E_{k,l},$$

et en utilisant l'idéalité de I, on montre que

$$\frac{1}{a_{i_0,j_0}} E_{k,i_0}\left(E_{i_0,i_0} A E_{j_0,j_0}\right) E_{j_0,l} = \frac{1}{a_{i_0,j_0}} E_{k,i_0}\left(a_{i_0,j_0} E_{i_0,j_0}\right) E_{j_0,l} = E_{k,i_0} E_{i_0,j_0} E_{j_0,l} = E_{k,l}$$

est dans I, donc I engendre tout $\mathcal{M}_n(K)$.

Corollaire.
Toute représentation irréductible finie de $\mathcal{M}_n(K)$ est équivalente à la representation standard.

Démonstration.
Soit ρ une représentation irréductible finie de $\mathcal{M}_n(K)$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \oplus ... \oplus \mathcal{B}_r$ comme dans le théorème. Alors les $V_i := \operatorname{Vect} \mathcal{B}_i$ sont stables par ρ : en effet, pour a matrice de $\mathcal{M}_n(K)$ et $x \in V_i$, on a

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} a \cdot x &= \operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} \rho(a) \ \operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} x \\
&= \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & A & & & \\ & & A & & \\ & & & A & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_i} x \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & 0 & & & \\ & & A \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_i} x & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

d'où $a \cdot x \in V_i$. Par conséquent, $r = 1$ (sinon $\{0\} \subsetneq V_1 \subsetneq V$, ce qui contredit l'irréductibilité), d'où le résultat.

5.2 Représentations et produit tensoriel

Soit (ρ, V) une représentation d'une algèbre A et U un espace vectoriel quelconque. On dispose d'une représentation de A dans l'algèbre produit tensoriel $U \otimes V$ donnée par

$$\operatorname*{Id}_U \otimes \rho : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathcal{L}(U \otimes V) \\ a & \longmapsto & \operatorname{Id}_U \otimes \rho(a) \end{array} \right. .$$

Si $(e_1, ..., e_p)$ est une base de U, alors

$$U \otimes V \simeq \bigoplus_{i=1}^{p} \mathbb{C} e_i \otimes V \simeq \bigoplus_{i=1}^{p} V.$$

On voit alors $U \otimes V$ comme somme directe de p copies de V. Pour ce faire, on fixe une base $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ de V, on note

$$w_i^{(j)} = e_i \otimes v_j,$$

et on s'intéresse à la base de $U \otimes V$ définie par

$$\mathcal{T} = \left(w_1^{(1)}, ..., w_1^{(n)},\ w_2^{(1)}, ..., w_2^{(n)},\ ...,\ w_p^{(1)}, ..., w_p^{(n)} \right),$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
\left[\operatorname*{Id}_U \otimes \rho(a) \right] \left(w_i^{(j)} \right) &= \left[\operatorname*{Id}_U \otimes \rho(a) \right] (e_i \otimes v_j) \\
&= e_i \otimes [\rho(a)(v_j)] \\
&= e_i \otimes \sum_{k=1}^{n} \left[\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} \rho(a) \right]_{k,j} v_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} \rho(a) \right]_{k,j} (e_i \otimes v_k)
\end{aligned}$$

et donc

$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{T}} \left[\operatorname*{Id}_U \otimes \rho(a) \right] = \begin{pmatrix} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} \rho(a) & & & \\ & \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} \rho(a) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} \rho(a) \end{pmatrix}$$

avec p blocs.

Théorème.
Soit (ρ, V) *une représentation de dimension finie de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*, que l'on cherche à comparer à la représentation canonique* $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$.

On regarde donc les opérateurs d'entrelacement entre ces deux représentations :

$$\underset{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}{\operatorname{Hom}}(\mathbb{C}^n, V) \subset \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, V).$$

On considère maintenant la représentation de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *dans* $\left[\underset{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}{\operatorname{Hom}}(\mathbb{C}^n, V)\right] \otimes \mathbb{C}^n$ *définie par*

$$\tau : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{L}\left(\left[\underset{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}{\operatorname{Hom}}(\mathbb{C}^n, V)\right] \otimes \mathbb{C}^n\right) \\ A & \longmapsto & T \otimes x \longmapsto T \otimes Ax \end{array} \right. ,$$

et on regarde l'opérateur "contraction"

$$\mathcal{T} : \left\{ \begin{array}{ccc} \left[\underset{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}{\operatorname{Hom}}(\mathbb{C}^n, V)\right] \otimes \mathbb{C}^n & \longrightarrow & V \\ T \otimes x & \longmapsto & Tx \end{array} \right. .$$

Alors $\mathcal{T}$ *est un opérateur d'entrelacement bijectif entre* τ *et* ρ.

Démonstration.
On a déjà vu que $V = V_1 \oplus ... \oplus V_r$ où chaque V_i est stable et la représentation restreinte à V_i équivalente à la représentation standard. A fortiori, tous les V_i ont même dimension n.

Soit $T_i : \mathbb{C}^n \longrightarrow V_i$ un opérateur d'entrelacement bijectif entre φ et $\rho_{|V_i}$, de sorte que

$$T_i : \mathbb{C}^n \longrightarrow V$$

soit dans $\operatorname{Hom}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}(\mathbb{C}^n, V)$. Les $T_1, ..., T_r$ ont des images en somme directe, donc sont linéairement indépendants dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n, V)$. Montrons qu'ils en forment une base.

Soit $T \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}(\mathbb{C}^n, V)$. Si $\pi_i : V \longrightarrow V_i$ désigne la projection canonique, $\pi_i \circ T$ est un opérateur d'entrelacement ? ? ? ? ? de $\mathbb{C}^n$ dans V_i, donc lié à T_i par Schur : $\exists \lambda_i \in \mathbb{C}$ tel que

$$\pi_i \circ T = \lambda_i T_i.$$

Or $\sum_{i=1}^r \pi_i = \operatorname{Id}_V$, donc

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i T_i = \sum_{i=1}^r \pi_i \circ T = \left(\sum_{i=1}^r \pi_i\right) \circ T = \underset{V}{\operatorname{Id}} \circ T = T,$$

et donc $T_1, ..., T_r$ génèrent $\operatorname{Hom}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}(\mathbb{C}^n, V)$.

On reprend maintenant

$$\mathcal{T} : \left\{ \begin{array}{ccc} \left[\operatorname{Hom}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}(\mathbb{C}^n, V)\right] \otimes \mathbb{C}^n & \longrightarrow & V \\ T \otimes x & \longmapsto & Tx \end{array} \right. .$$

Soit $T \otimes x \in \left[\operatorname{Hom}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}(\mathbb{C}^n, V)\right] \otimes \mathbb{C}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. D'une part on a

$$[\mathcal{T} \circ \tau(A)](T \otimes x) = \mathcal{T}(\tau(A)(T \otimes x)) = \mathcal{T}(T \otimes Ax) = TAx,$$

d'autre part on a

$$[\rho(A) \circ \mathcal{T}](T \otimes x) = \rho(A) Tx = T\varphi(A) x = TAx,$$

d'où

$$\mathcal{T} \circ \tau(A) = \rho(A) \circ \mathcal{T}$$

pour tout A, ied $\mathcal{T}$ opérateur d'entrelacement entre τ et ρ.

Quid de la surjectivité ? Soit $x \in V$, que l'on décompose sur les V_i en

$$x = x_1 + ... + x_r = T_1(\xi_1) + ... + T_r(\xi_r) = \mathcal{T}\left(\sum_{i=1}^r T_i \otimes \sum_{i=1}^r \xi_i\right) \text{ ? ? ? ? ?}$$

6 Algèbres finies simples

Définition.
Une algèbre est dite simple *si ses seuls idéaux bilatères sont* $\{0\}$ *et elle-même.*
Une $\mathbb{C}$*-algèbre est dite* finie *si, en tant que* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel, elle est de dimension finie.*

On montre ici que toutes les algèbres finies simples sont des algèbres de matrices.

Théorème (Wedderburn).
Soit A *une* $\mathbb{C}$*-algèbre finie* ***simple****. Alors on peut trouver un* $n \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$A \simeq \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

On utilisera le théorème intermédiaire suivant.

6.1 Théorème de Burnside

Théorème (Burnside).
Soit A *une algèbre finie et* (ρ, V) *une représentation irréductible de dimension finie de* A*. Alors*

$$\rho(A) = \mathcal{L}(V).$$

Lemmes.
1. *Soit* $x \in V$ *non nul. Alors tout* x' *de* V *peut s'écrire*

$$x' = a \cdot x$$

pour un $a \in A$.
2. *Soit* $l \in V^*$ *non nul. Alors tout* l' *de* V *peut s'écrire*

$$l' = l \circ \rho(a)$$

pour un $a \in A$.
3. *Si* $u \in \rho(A)$ *est un endomorphisme de rang* ≥ 2*, alors il existe* $u' \in \rho(A)$ *de rang*

$$0 < \operatorname{rg} u' < \operatorname{rg} u.$$

Démonstration.
1. Pour $x \neq 0$, le sous-espace $A \cdot x$ est clairement stable et n'est pas réduit à $\{0\}$ car contient

$$1_A \cdot x = x \neq 0,$$

donc vaut l'espace V tout entier (par l'irréductibilité de ρ).
2. On reprend le lemme 1 en passant au dual. Pour $l \neq 0$ dans V^*, notons

$$B = \{l \circ \rho(a) \text{ où } a \in A\}.$$

À $a \in A$ fixé, B est clairement stable par ${}^t\rho(a)$, donc son orthogonal B° est stable par $\rho(a)$ (car V est de dimension finie), et ce pour tout $a \in A$. Comme B contient

$$l \circ \rho(1_A) = l \circ \mathrm{Id} = l \neq 0,$$

B° ne peut valoir tout l'espace V et est donc réduit à $\{0\}$ (par l'irréductibilité de ρ), d'où

$$B = (B^\circ)^\perp = \{0\}^\perp = V^*.$$

3. On peut trouver x et y dans W tels que $u(x)$ et $u(y)$ sont libres, de sorte que $u(x) \neq 0$, et le lemme 1 donne alors l'existence d'un $a \in A$ tel que
$$a \cdot u(x) = y.$$
Puisqu'on est sur $\mathbb{C}$, la restriction
$$u \circ \rho(a) : \operatorname{Im} u \longrightarrow \operatorname{Im} u$$
possède une valeur propre λ ; en posant
$$v = (u \circ \rho(a) - \lambda \operatorname{Id})_{| \operatorname{Im} u},$$
on a $\operatorname{Im} v \subsetneq \operatorname{Im} u$, d'où
$$\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v \subsetneq \operatorname{Im} u.$$
Par ailleurs, $v \circ u$ est non nul car
$$v \circ u(x) = \left[u \circ \rho(a) - \lambda \operatorname{Id}_{| \operatorname{Im} u}\right](u(x)) = u(a \cdot u(x)) - \lambda u(x) = u(y) - \lambda u(x) \neq 0$$
par liberté de $u(x)$ et $u(y)$. On a finalement
$$0 < \operatorname{rg}(v \circ u) < \operatorname{rg} u$$
comme voulu.

Démonstration de Burnside.
Si $\dim V = 0$, alors $\mathcal{L}(V) = \{0\}$ et $\rho(A) = \{0\} = \mathcal{L}(V)$.
Sinon, $\mathcal{L}(V)$ est linéairement engendré par les applications linéaires de rang 1. Il suffit donc de montrer que $\rho(A)$ contient les endomorphismes de rang 1.
Montrons déjà que si $\rho(A)$ contient un endomorphisme de rang 1, alors il les contient tous.
Soit φ de rang 1 dans $\rho(A)$: $\exists v \in V, l \in V^*$ tel que
$$\varphi = l(\cdot)\ v.$$
Soit $\psi = l'(\cdot)\ v'$ un autre endomorphisme de rang 1. D'après les lemmes 1 et 2, $\exists a, b \in A$ tel que $\left\{\begin{array}{c} v' = a \cdot v \\ l' = l \circ \rho(b) \end{array}\right.$, d'où
$$\begin{aligned} \psi &= l'(\cdot)\ v' = l \circ \rho(b)\ a \cdot v = l \circ \rho(b)\ \rho(a)(v) \\ &= \rho(a)(l \circ \rho(b)\ v) = \rho(a)(\varphi[\rho(b)]) = \rho(a) \circ \varphi \circ \rho(b) \end{aligned}$$
et (si $\varphi = \rho(c)$)
$$\psi = \rho(a)\rho(c)\rho(b) = \rho(abc) \in \rho(A).$$
Montrons maintenant que $\rho(A)$ contient bien un endomorphisme de rang 1. On part de
$$u := \operatorname{Id}_{|V} = \rho(1_A).$$
Si $\dim V = 1$, alors $\operatorname{rg} u = 1$ et c'est gagné. Sinon, $\operatorname{rg} u \geq 2$ et on récurre en utilisant le lemme 3.

6.2 Théorème de Wedderburn

Démonstration de Wedderburn.
Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre finie simple (si $\dim A = 0$, on a de suite $A \simeq \mathcal{M}_0(\mathbb{C})$; on supposera donc $\dim A \geq 1$).
On cherche une représentation irréductible pour pouvoir appliquer Burnside.
On peut toujours représenter A de façon *régulière gauche* par
$$\rho : \left\{\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathcal{L}(A) \\ a & \longmapsto & a\times \end{array}\right. .$$
On cherche alors dans A une sous-représentation irréductible.

Les sous-représentations de A sont exactement les idéaux à gauche. On en prend donc un de dimension >0 minimale – ce qui est possible car A est un idéal à gauche de dimension >0 –, mettons B, de sorte que

$$\rho_B : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathcal{L}(B) \\ a & \longmapsto & a\times \end{array} \right.$$

est irréductible : toute sous-représentation de ρ_B est un idéal à gauche, donc soit $\{0\}$, soit un $C \subset B$ de dimension $\geq \dim B$ par minimalité, ied $C = B$. Burnside nous dit alors que

$$\rho_B(A) \simeq \mathcal{L}(B).$$

Il reste à remarquer que ρ_B est injectif, ce qui entrainera

$$A \simeq \rho_B(A) \simeq \mathcal{L}(B)$$

comme souhaité. En effet, puisque A est simple, $\operatorname{Ker}\rho$ (qui est toujours un idéal bilatère) est soit A tout entier, auquel cas

$$0 = \rho(1)(1) = 1 \times 1 = 1$$

et $A = \{0\}$, *absurde*, soit réduit à $\{0\}$, et dans ce cas ρ – a fortiori ρ_B – est injectif.

7 Algèbres finies semi-simples

Définition.
Une $\mathbb{C}$-algèbre A est dite semi-simple *si elle est isomorphe à une somme directe d'algèbres simples.*
Pour une algèbre ***finie****, cela s'écrit (d'après Wedderburn)*

$$A \simeq \bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{L}(V_i)$$

où $V_1, ..., V_{p\geq 1}$ sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Remarques.
• Comme toute somme directe d'algèbres, la multiplication est effectuée coordonnée par coordonnée, et vérifie clairement la propriété de distributivité :

$$\left(\sum_{i=1}^{p} x_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^{p} y_j\right) = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i = \sum_{i=1}^{p} x_i \times y_i.$$

• En se donnant des bases $\mathcal{B}_i$ pour chaque V_i, on peut voir $\bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{L}(V_i)$ comme un sev de $\mathcal{L}\left(\bigoplus_{i=1}^{p} V_i\right)$ fait de matrices diagonales par bloc en considérant la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_p$:

$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^{p} A_i\right) = \begin{pmatrix} \operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}_1} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}_p} A_p \end{pmatrix}$$

• Si $A = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{L}(V_i)$ est une algèbre semi-simple, on dispose de p projecteurs naturels

$$P_i := \{0\} \oplus ... \oplus \{0\} \oplus \operatorname*{Id}_{V_i} \oplus \{0\} \oplus ... \{0\}$$

qui induisent autant de représentations naturelles V_i de A

$$\Pi_i : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathcal{L}(V_i) \\ a & \longmapsto & aP_i = P_i a \end{array} \right.$$

(on récupère la i-ième composante a_i de l'action d'un $a = \sum_{i=1}^{p} a_i$). Remarquer déjà que la i-ième composante de l'action de $\bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{L}(V_i)$ est

$$\Pi_i(A) = \mathcal{L}(V_i).$$

• Noter que les P_i sont des idempotents centraux :

$$\sum_{i=1}^{p} P_i = \operatorname*{Id}_{A}$$

$$P_i P_j = \delta_i^j P_i = P_j P_i.$$

7.1 Description des représentations irréductibles

On s'intéresse aux représentations irréductibles d'une algèbre finie semi-simple $\bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{L}(V_i)$.

Les (Π_i, V_i) sont de bons candidats (on se ramène au cas connu des algèbres finies simples), et en fait ce sont les seuls.

Proposition.

Soit $A = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{L}(V_i)$ une algèbre semi-simple. Alors les V_i sont des représentations irréductibles de A deux à deux non équivalentes, et ce sont les seules à équivalence près.

Démonstration.

Si $W \subset V_i$ est un sev non nul stable par Π_i, mettons $w_0 \in W$ non nul, alors pour tout $x \in V_i$ on peut définir un $a \in \mathcal{L}(V_i)$ qui envoie w_0 sur x, d'où $x = a \cdot w_0 \in W$ par stabilité de W, et ce $\forall x \in V_i$. Ainsi $X \subset W$ et $W = X$, d'où l'irréductibilité des (Π_i, V_i).

Montrons ensuite que $\mathrm{Hom}_A(V_i, V_j)$ est réduit à 0 pour $i \neq j$, ce qui prouvera (à l'aide du lemme de Schur) que les V_i sont deux à deux non équivalentes.

Soient $i \neq j$ et $T : V_i \longrightarrow V_j$ un opérateur d'entrelacement entre (Π_i, V_i) et (Π_j, V_j). On a donc

$$\forall a \in A,\ T \circ \Pi_i(a) = \Pi_j(a) \circ T,$$

en particulier pour $a = \mathrm{Id}_{V_i}$, d'où

$$T = T \circ \Pi_i \left(\underset{V_i}{\mathrm{Id}} \right) = \Pi_j \left(\underset{V_i}{\mathrm{Id}} \right) \circ T = 0 \circ T = 0$$

comme voulu.

Soit maintenant $\rho : A \longrightarrow \mathcal{L}(W)$ une représentation irréductible. Puisque

$$\underset{W}{\mathrm{Id}} = \rho(1_A) = \rho\left(\sum P_i\right) = \sum \rho(P_i),$$

il y a un i_0 tel que $\rho(P_{i_0}) \neq 0$, donc $\rho(P_{i_0})(W)$ (qui est stable par ρ) est non nul, d'où par irréductibilité $\rho(P_{i_0})(W) = W$. Il en résulte que les $\rho(P_i)$ pour $i \neq i_0$ sont tous nul :

$$\begin{aligned} [\rho(P_i)](W) &= [\rho(P_j)\rho(P_{i_0})](W) \\ &= [\rho(P_j P_{i_0})](W) \\ &= [\rho(0)](W) \\ &= \{0\}. \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $a \in A$, on a

$$\begin{aligned} \rho(a) &= \rho(a1_A) = \rho\left(a \sum P_i\right) \\ &= \rho\left(\sum aP_i\right) = \sum \rho(a)\rho(P_i) \\ &= \rho(a)\rho(P_{i_0}) = \rho(aP_{i_0}) \\ &= \rho(\Pi_{i_0}(a)). \end{aligned}$$

Ainsi, tout sev de W stable par ρ_{i_0} (restriction de ρ à $\mathcal{L}(V_{i_0})$) est stable par ρ tout entier, donc (ρ_{i_0}, W) est irréductible, donc équivalente à la représentation standard $\left(\mathrm{Id}_{\mathcal{L}(V_{i_0})}, V_{i_0}\right)$ (théorème sur les représentations finies des algèbres de matrices). En termes d'opérateurs d'entrelacements, cela s'écrit

$$\forall a \in \mathcal{L}(V_{i_0}),\ T\rho_{i_0}(a) = aT$$

où $T \in \mathcal{GL}(W, V_{i_0})$. On déduit que, pour tout a dans A,

$$\begin{aligned} T\rho(a) &= T\rho(\Pi_{i_0}(a)) = T\rho_{i_0}(\Pi_{i_0}(a)) \\ &= \Pi_{i_0}(a)T, \end{aligned}$$

ce qui est précisément la définition de l'équivalence de (ρ, W) et (Π_{i_0}, V_{i_0}).

7.2 Description d'une représentation quelconque par le produit tensoriel

Plus généralement, soit W une représentation finie de A. On dispose d'une représentation $\bigoplus_{i=1}^{p} [\mathrm{Hom}_A (V_i, W)] \otimes V_i$ donnée par

$$a \cdot \left(\sum \theta_i \otimes v_i\right) = \sum \theta_i \otimes \Pi_i (a) (v_i) .$$

La proposition suivante montre que W est équivalente à $\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Hom}_A (V_i, W) \otimes V_i$.

Proposition.
Soit $A = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{L} (V_i)$ une algèbre finie semi-simple. Toute représentation finie W de A est équivalente à $\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Hom}_A (V_i, W) \otimes V_i$ *par l'opérateur d'entrelacement*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^{p} \Theta_i \otimes V_i & \longrightarrow & W \\ \sum_{i=1}^{p} \theta_i \otimes v_i & \longmapsto & \sum_{i=1}^{p} \theta_i (v_i) \end{array} \right. .$$

Démonstration.
Soit $\varphi : A \longrightarrow \mathcal{L} (W)$ une représentation de dimension finie quelconque. On a $\mathrm{Id}_W = \sum \varphi (P_i)$, où les $\varphi (P_i)$ sont des projecteurs deux à deux orthogonaux dans $\mathcal{L} (W)$, d'où $W = \bigoplus \underbrace{\mathrm{Im}\, \varphi (P_i)}_{:=W_i}$.

Soit $x \in A : x = \sum x P_i \in \bigoplus L (V_i)$,

$$\varphi (x) = \sum \varphi (x) \varphi (P_i) = \sum \varphi (P_i) \varphi (x)$$

. $\varphi (x)$ envoit $W_i \longrightarrow W_i$ $\forall i$. $\varphi (x P_i)$ agit dans W_i comme $\varphi (x)$, et agit par 0 sur $W_{j \neq i}$. Ainsi W_i est une représentation de $L (W_i)$: $W_i \simeq \mathrm{Hom}_A (V_i, W) \otimes V_i$ comme représentation de $L (V_i)$.

Ensuite, on reconstruit tout en recollant les bouts :

$$S : \left\{ \begin{array}{ccc} \bigoplus \mathrm{Hom}_A (V_i, W) \otimes V_i & \longrightarrow & \bigoplus W_i \\ \sum \theta_i \otimes v_i & \longmapsto & \sum \theta_i (v_i) \end{array} \right.$$

est une opérateur d'entrelacement lorsque A agit sur $\bigoplus \mathrm{Hom}_A (V_i, W) \otimes V_i$ par

$$a \left(\sum \theta_i \otimes v_i\right) = \sum \theta_i \otimes \Pi_i (a) (v_i)$$

alors

$$\begin{aligned} S \left(a \left(\sum \theta_i \otimes v_i\right)\right) &= S \left(\sum \theta_i \otimes \Pi_i (a) v_i\right) = \sum \theta_i (\Pi_i (a) v_i) \\ &= \sum \varphi (a) \theta_i (v_i) = \varphi (a) \left(\sum \theta_i (v_i)\right) . \end{aligned}$$

Théorème.
Soit A une algèbre, $\rho : A \longrightarrow \mathcal{L} (V)$ une représentation de A de dimension finie complètement réductible. Alors $\rho (A) \subset L (V)$ est semi-simple.

Proposition.
Soit A une algèbre associative, $\rho : A \longrightarrow \mathcal{L} (V)$ une représentation de A de dimension finie complètement réductible. Soit W un sous-espace vectoriel de V stable par ρ. Soit $\varphi = \rho_{/W} : A \longrightarrow L (W)$ la représentation restreinte. Alors φ est complétement irréuctible.

Démonstration.
Soit $U_1 \subset W$ stable. On veut $U_2 \subset W$ stable avec $W = U_1 \oplus U_2$.

V est complètement réductible, donc pour $U \subset V$ stable, on a un supplémentaire $V = W \oplus U$. Soit P le projecteur d'image W et noyau U : $P \rho (a) = \rho (a) P$ $\forall a \in A$.

$U_1 \oplus U$ est stable, donc on a un $U_3 \subset V$ stable tel que $U_3 \oplus U_1 \oplus U = V$.

On pose $U_2 = P (U_3) \subset W$.

Montrons que $W = U_2 \oplus U_1$. On a déjà

$$U_3 \oplus U_1 \oplus U = V = W \oplus U,$$

d'où $\dim U_3 + \dim U_1 = \dim W$. On veut donc $\dim U_3 = \dim U_2$, ied $P_{/U_3}$ injective ; or

$$U_3 \cap \operatorname{Ker} P \subset U_3 \cap U = \{0\},$$

cqfd.

Montrons ensuite que $U_2 + U_1 = W$. On décompose $w \in W \subset V$ en

$$w = w_1 + w_3 + u,$$

d'où

$$w = P(w) = \underbrace{P(u_3)}_{\in U_2} + u_1.$$

Corollaire.
On a équivalence entre
- ρ *complètement réductible ;*
- $V = V_1 \oplus ... \oplus V_n$ est *somme directe de sous-représentations irréductibles.*

Démonstration.
$\Longrightarrow$ récurrence, à l'aide de la proposition précédente.
$\Longleftarrow$ récurrence sur le nombre de morceaux. Soit $W \subset V$ stable. Si $W \cap V_i \neq \{0\}$, alors $W = V_i$ (car V_i irréductible). Soit P_1 le projecteur sur V_1 parallèment à $\bigoplus_{i\geq 2} V_i$. On a $P_1(W) \subset W_1$. Ou bien $P_1(W) = \{0\}$, alors $W \subset V_2 \oplus ... \oplus V_n$ et on récurre ; ou bien $P_1(W) = V_1$, on pose $W' = \operatorname{Ker}(P_1)_{/W} \subset V_2 \oplus ... \oplus V_d$ complètement réductible par récurrence. On a donc $V_2 \oplus ... \oplus V_d = W' \oplus W''$ où W'' stable. Alors

$$W'' \cap W \subset W'' \cap W' \subset (\operatorname{Ker} P_1) \cap W' = \{0\}$$

donc la somme est directe :

$$\begin{aligned} \dim W + \dim W'' &= \dim V_1 + \dim W' + \dim W'' \\ &= \dim V_1 + \sum_{i\geq 2} V_i \\ &= \dim V. \end{aligned}$$

Démonstration du théorème.
On veut $\rho(A) \subset L(V)$ semi-simple. On sait que ρ est complétement réductible, donc $V = V_1 \oplus ... \oplus V_d$ où chaque V_i stable irréductible. La restriction de $\rho(A)$ à chaque V_i étant irréductible, on obtient tout $\mathcal{L}(V_i)$.

8 Commutant et bicommutant

Soit V un C-espace vectoriel, S une partie de $L(V)$.
On appelle commutant de S

$$\operatorname{Comm} S = \{u \in L(V) \text{ tel que } su = us \ \forall s \in s\}.$$

Le bicommutant est le commutant du commutant.

Soit A une sous-algèbre de $L(V)$. On a toujours $A \subset \operatorname{Comm}\operatorname{Comm} A$. Egalité ?

Théorème.
Soit A sous-algèbre semi-simple de $L(V)$. On la casse en $\bigoplus_{i=1}^{r} U_i \otimes V_i$ où V_i représentation irréductible de A, $U_i = \operatorname{Hom}_A(V_i, V)$, $a \in A$ agit dans $\bigoplus_{i=1}^{r} U_i \otimes V_i$ par $\sum \operatorname{Id}_{U_i} \otimes \rho_i(a)$, et $A \simeq \bigoplus \operatorname{Id}_{U_i} \otimes L(V_i)$. Posons $B = \operatorname{Comm} A$.

Alors B est semi simple, $B \simeq \bigoplus L(U_i) \otimes \mathrm{Id}_{V_i}$, et donc $\mathrm{Comm}\,\mathrm{Comm}\, A = A$.

Lemme. $(\mathbf{r} = \mathbf{1})$
Soit $V = U \otimes W$. Alors $\mathrm{Id}_U \otimes L(V)$ et $L(U) \otimes \mathrm{Id}_V$ sont des sous-algèbres de $L(V)$. Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Comm}\left(\underset{U}{\mathrm{Id}} \otimes L(V)\right) &= L(U) \otimes \underset{V}{\mathrm{Id}} \\ \mathrm{Comm}\left(L(U) \otimes \underset{V}{\mathrm{Id}}\right) &= \underset{U}{\mathrm{Id}} \otimes L(V) \end{aligned}$$

Démonstration.
Soit $T \in \mathcal{L}(U \otimes W)$ qui commute avec $\mathrm{Id}_U \otimes L(V)$. On écrit T intelligemment :

$$T = \sum E_{i,j} \otimes u_{i,j}$$

où $E_{i,j}$ base de $L(U)$. Alors

$$\begin{aligned} T \circ \left(\underset{U}{\mathrm{Id}} \otimes u\right) &= \left(\underset{U}{\mathrm{Id}} \otimes u\right) \circ T \\ \left(\sum E_{i,j} \otimes u_{i,j}\right) \circ \left(\underset{U}{\mathrm{Id}} \otimes u\right) &= \left(\underset{U}{\mathrm{Id}} \otimes u\right) \circ \left(\sum E_{i,j} \otimes u_{i,j}\right) \\ \sum E_{i,j} \otimes u u_{i,j} &= \sum E_{i,j} \otimes u_{i,j} u \\ u u_{i,j} &= u_{i,j} u \\ u_{i,j} &= \lambda_{i,j} \underset{W}{\mathrm{Id}} \end{aligned}$$

d'où

$$T = \sum \lambda_{i,j} E_{i,j} \otimes \underset{W}{\mathrm{Id}}$$

Démonstration du théorème.
On décompose $A = \bigoplus \mathrm{Id}_{U_i} \otimes L(V_i)$ Soit $P_i : V \longrightarrow V$ le projecteur sur $U_i \otimes V_i$. $P_i \in A$ car $P_i = \mathrm{Id}_{U_i} \otimes \mathrm{Id}_{V_i}$. Si $T \in L(V)$ commute à A, il commute aux P_i, donc laisse stable leurs images $U_i \otimes V_i$. Par conséquent $T_{/U_i \otimes V_i} : U_i \otimes V_i \longrightarrow U_i \otimes V_i$ commute à $\mathrm{Id}_{U_i} \otimes L(V_i)$, cette restriction est donc dans $L(U_i) \otimes \mathrm{Id}_{V_i}$ par le lemme, puis on $\oplus$. Enfin, la situation est symétrique en A et B.

Théorème des invariants (H. Weyl).
Soit V un C-espace vectoriel de dimension finie, et $k \in \mathbb{N}^*$. On considère la représentation du groupe symétrique $\mathfrak{S}_k$ dans $V^{\otimes k}$: $\begin{cases} \mathfrak{S}_k & \longrightarrow \quad GL\left(V^{\otimes k}\right) \\ \sigma & \longmapsto \quad v_1 \otimes ... \otimes v_k \longmapsto v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes ... \otimes v_{\sigma^{-1}(k)} \end{cases}$ d'où une représentation ρ_k de $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]$ dans $L\left(V^{\otimes k}\right)$; soit $A = \rho_k(\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]) \subset L\left(V^{\otimes k}\right)$.

Par ailleurs, $GL(V)$ agit dans $V^{\otimes k}$ d'où une représentation φ de $\mathbb{C}[GL(V)]$ dans $L\left(V^{\otimes k}\right)$; soit $B = \varphi(\mathbb{C}[GL(V)]) \subset L\left(V^{\otimes k}\right)$.

Alors A et B sont semi-simples et $\begin{array}{l} \mathrm{Comm}\, A = B \\ \mathrm{Comm}\, B = A \end{array}$.

Démonstration.
Premier point : A est semi simple car la représentation ρ_k de $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]$ est complètement réductible.

Deuxième point : $B \subset \mathrm{Comm}\, A$ et $A \subset \mathrm{Comm}\, B$ (GL agit sur chque coordonnée sans changer leur ordre, S_k agit sur l'ordre sans chager les coordonnée)

Troisième point : théorème bicommutant $\Longrightarrow$ $\mathrm{Comm}\, A$ est semi-simple et $\mathrm{Comm}\,\mathrm{Comm}\, A = A$.

Il suffit de montrer que $B = \mathrm{Comm}\, A$.

Fixonx une base $(e_1, ..., e_n)$ de V, d'où une base $e_J = e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_k}$ de $V^{\otimes k}$ où $J = (j_1, ..., j_k)$. Si de plus $\sigma(J) = \left(j_{\sigma^{-1}(1)}, ..., j_{\sigma^{-1}(k)}\right)$, on a $\sigma(J) = e_{\sigma(J)}$.

Soit $T \in \mathrm{Comm}\, A$. Alors $T(e_I) = \sum_J a_{J,I} e_J$ où $a_{J,I} \in \mathbb{C}$. Alors

$$\begin{aligned}
T\rho_k(\sigma)(e_I) &= \rho_k(\sigma) T(e_I) \\
T\left(e_{\sigma(I)}\right) &= \rho_k(\sigma)\left(\sum_J a_{J,I} e_J\right) \\
\sum_J a_{J,\sigma(I)} e_J &= \sum_J a_{J,I} e_{\sigma(J)} \\
&= \sum_J a_{\sigma^{-1}(J),I} e_I.
\end{aligned}$$

Ainsi $T \in \mathrm{Comm}\, A$ ssi $a_{J,\sigma(I)} = a_{\sigma^{-1}(J),I}$, ied ssi $a_{\sigma(J),\sigma(I)} = a_{J,I}$.

Soit $g \in GL(V)$. On décompose

$$\begin{aligned}
\varphi(g)(e_I) &= g(e_{i_1}) \otimes \ldots \otimes g(e_{i_k}) \\
&= \sum g_{j_1,i_1} g_{j_2,i_2} \ldots g_{j_k,i_k} (e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_k}) \\
&= \sum g_{j_1,i_1} g_{j_2,i_2} \ldots g_{j_k,i_k} e_J \\
&= \sum g_{J,I} e_J
\end{aligned}$$

où $(g_{i,j})$ est la matrice de g et $g_{J,I} = g_{j_1,i_1} g_{j_2,i_2} \ldots g_{j_k,i_k}$.

On a $B \subset \mathrm{Comm}\, A$. Dans $L\left(V^{\otimes k}\right)$, on dispose du produit scalaire hermitien $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^* B)$. La restriction de ceci à $\mathrm{Comm}\, A$ est définie positive. Pour voir $B = \mathrm{Comm}\, A$, il suffit de voir que l'orthogonal de B dans $\mathrm{Comm}\, A$ est réduit à $\{0\}$.

Soit T de matrice $(a_{I,J})$. Alors

$$\begin{aligned}
\langle \varphi(g) . T\rangle &= \mathrm{tr}\left(\varphi(g)^* T\right) \\
&= \sum \overline{g_{i_1,j_1}} \ldots \overline{g_{i_k,j_k}} a_{J,I}
\end{aligned}$$

. L'orthogonal de B est formé des $a_{J,I}$ tel que $\forall (g_{i,j}) \in GL(V)$, $\sum \overline{g_{i_1,j_1}} \ldots \overline{g_{i_k,j_k}} a_{J,I} = 0$. C'est une fonction polynomiale homogène de degré k en les $g_{i,j}$. Si elle est nulle sur $GL(V)$, elle est nulle dans $L(V)$ par densité de $GL(V)$, donc le polynôme est nul : $\forall (x_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\sum x_{i_1,j_1} \ldots x_{i_k,j_k} a_{J,I} = 0$, ie $\sum x_{I,J} a_{J,I}$.

Lemme.
$x_{I,J} = x_{I',J'} \iff \exists s \in \mathfrak{S}_k$ tel que $I' = \sigma(I)$ et $J' = \sigma(J)$.
(suffit d'écrire...)

On considère les orbites de $\mathfrak{S}_k$ sur $\{(I,J)$ de multi-indices$\}$. On choisit une tranversale $\{\gamma \in \Gamma\}$ des orbites : $\forall (I,J)$, $\exists! \gamma$ tel que $x_{I,J} \sim x_\gamma$. $\sum n_\gamma x_\gamma a_\gamma = 0$, $a_{I,J} = a_\gamma$ si $T \in \mathrm{Comm}\, A$, ici les x_j sont idempotents $\Longrightarrow$ $a_\gamma = 0$ $\forall \gamma$, donc l'orthogonal est nul, cqfd