Algèbre multilinéaire

Marc SAGE

Table des matières

Sur les notations des classes d'équivalences.

Sans contexte, une classe d'équivalence sera noté avec un symbole chapeautant, par exemple $\overline{x}$, $\widetilde{a}$ ou $\widehat{\xi}$. L'isomorphisme chinois sera par exemple noté $\left(\widehat{a}, \overline{b}\right) \mapsto \widetilde{ab}$ ou plus simplement $\left(\overline{a}, \overline{b}\right) \mapsto \overline{ab}$ s'il n'est pas besoin de distinguer toutes les classes.

Sur les notations des isomorphismes.

Nous utiliserons systématiquement les notations $\simeq$ et $\cong$ pour désigner des isomorphismes. La première ne signifie rien de particulier, juste qu'il existe un isomorphisme, elle est donc très lâche. La seconde, plus rigide, précise qu'un tel isomorphisme a été *fixé*, ce qui permet de voir comment est transformé un élément à travers cet isomorphisme. Par exemple, tout K-espace vectoriel de dimension n est $\simeq K^n$, mais ne sera $\cong K^n$ qu'après le choix d'une base. De même, en termes ensemblistes, on écrira $\mathbb{R} \simeq P(\mathbb{N})$ mais $X \times \{0\} \cong X$.

Par ailleurs, les isomorphismes seront à l'occasion données explictement avec leur réciproque sous la forme

$$\left\{\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & f(x) \\ g(y) & \longleftarrow & y \end{array}\right. .$$

La flèche $\longleftarrow$ du bas doit être comprise comme une flèche $\longmapsto$ renversée.

1 Produit tensoriel de A-modules

On se place dans le cadre d'un A-module où A est un anneau commutatif unitaire. Pour les principales applications, on ne considérera que des espaces vectoriels.

1.1 Introduction

1.1.1 Problème de factorisation des applications bilinéaires

Soit M, N, R des A-modules. On regarde les applications A-bilinéaires φ de $M \times N$ vers R, *i. e.* qui vérifient

$$\left\{\begin{array}{c} \varphi(am, n) = \varphi(m, an) = a\varphi(m, n) \\ \varphi(m + m', n) = \varphi(m, n) + \varphi(m', n) \\ \varphi(n, n + n') = \varphi(m, n) + \varphi(m, n') \end{array}\right. .$$

On note $\mathrm{Bil}_A(M, N; R)$ ou $\mathrm{Bil}(M, N; R)$ l'ensemble des applications A-bilinéaires de $M \times N$ dans R, et $\mathcal{L}(M, N)$ les homomorphismes de A-modules de M dans N, *i. e.* les applications A-linéaires de M dans N.

Nous allons représenter linéairement les applications bilinéaires.

Pour ce faire, étant donnés deux modules M et N, nous allons construire un module[1] P (dépendant de M et N) de façon à pouvoir identifier $\mathrm{Bil}(M, N; \cdot)$ et $\mathcal{L}(P, \cdot)$ pour tout module $\cdot$ but.

Plus précisément, on s'intéresse au problème suivant : étant donnés M et N, trouver un A-module P et une application A-bilinéaire $\pi : M \times N \longrightarrow P$ telle que, pour tout A-module R et pour toute application A-bilinéaire $\varphi : M \times N \longrightarrow R$, il existe une *unique* application A-linéaire $\overline{\varphi} : P \longrightarrow R$ telle que $\varphi = \overline{\varphi} \circ \pi$.

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\varphi} & R \\ \downarrow \pi & \nearrow_{\overline{\varphi}} & \\ P & & \end{array}$$

Le procédé $\varphi \mapsto \overline{\varphi}$ donnera l'application linéaire $\mathrm{Bil}(M, N; R) \longrightarrow \mathcal{L}(P, R)$ cherchée.

Observons déjà que, si un tel couple (P, π) existe, alors P est unique isomorphisme près.

[1] P comme « **p**roduit tensoriel »

Soit (P',π') un autre tel couple. π' est une application bilinéaire de $M\times N$ dans P', donc d'après les propriétés de (P,π) il existe une application linéaire $\overline{\pi'}:P\longrightarrow P'$ telle que $\pi'=\overline{\pi'}\circ\pi$. De même, π est une application bilinéaire de $M\times N$ dans P, donc d'après les propriétés de (P',π') il existe une application linéaire $\overline{\pi}:P'\longrightarrow P$ telle que $\pi=\overline{\pi}\circ\pi'$. Nous représentons les quatre applications π, π', $\overline{\pi}$ et $\overline{\pi'}$ sur le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & M\times N & \\ \swarrow_{\pi} & & \searrow^{\pi'} \\ P & \begin{array}{c}\xrightarrow{\overline{\pi'}}\\ \xleftarrow[\overline{\pi}]{}\end{array} & P' \end{array}.$$

On y lit les égalités

$$\begin{cases} \pi=\overline{\pi}\circ\pi'=\overline{\pi}\circ\overline{\pi'}\circ\pi=\left(\overline{\pi}\circ\overline{\pi'}\right)\circ\pi \\ \pi'=\overline{\pi'}\circ\pi=\overline{\pi'}\circ\overline{\pi}\circ\pi'=\left(\overline{\pi'}\circ\overline{\pi}\right)\circ\pi' \end{cases}.$$

Or, π est une application bilinéaire de $M\times N$ dans P, donc d'après les propriétés de (P,π), il existe une unique application linéaire $\widetilde{\pi}:P\longrightarrow P$ telle que $\pi=\widetilde{\pi}\circ\pi$. Puisque l'identité convient et que $\pi=\left(\overline{\pi}\circ\overline{\pi'}\right)\circ\pi$, on en déduit $\overline{\pi}\circ\overline{\pi'}=\mathrm{Id}_P$; on a de même $\overline{\pi'}\circ\overline{\pi}=\mathrm{Id}_{P'}$. On en déduit que $\overline{\pi}$ est bijectif, d'où un isomorphisme de P' sur P.

L'isomorphisme ci-dessus est en fait unique si[2] l'on impose qu'il commute avec π et π'. En effet, si $f:P\longrightarrow P'$ est un morphisme vérifiant $\pi'=f\pi$, alors f est l'unique application $\overline{\pi'}$ définie ci-dessus.

Remarque. Pour les lecteurs connaisseurs des catégories, on présente en annexe une approche plus générale du problème ci-dessus.

Sachant à présent qu'une solution (P,π) à notre problème est unique à unique isomorphisme commutant aux morphismes π près, construisons une telle solution.

1.1.2 Construction

Soit E le A-module libre de base $M\times N$, *i. e.* l'ensemble des combinaisons formelles $\sum\lambda_{m,n}(m,n)$ à support fini.

Soit F le sous-A-module de E engendré par les

$$\begin{gathered}(m+m',n)-(m,n)-(m',n)\\(m,n+n')-(m,n)-(m,n')\\(am,n)-a(m,n)\\(m,an)-a(m,n)\end{gathered}$$

et considérons le A-module quotient ${}^{E}\!/_{F}$. En notant $\overline{\xi}$ la classe d'un élément ξ, on a alors

$$\begin{aligned}\overline{(am,n)}&=\overline{(am,n)-a(m,n)+a(m,n)}\\&=\overline{(am,n)-a(m,n)}+\overline{a(m,n)}\\&=\overline{0}+a\overline{(m,n)}\\&=a\overline{(m,n)},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\overline{(m+m',n)}&=\overline{(m+m',n)-(m,n)-(m',n)+(m,n)+(m',n)}\\&=\overline{(m+m',n)-(m,n)-(m',n)}+\overline{(m,n)+(m',n)}\\&=\overline{0}+\overline{(m,n)}+\overline{(m',n)}\\&=\overline{(m,n)}+\overline{(m',n)}\end{aligned}$$

avec des propriétés similaires à droite. La projection canonique

$$\pi:\begin{cases} M\times N & \twoheadrightarrow & {}^{E}\!/_{F}\\ (m,n) & \longmapsto & \overline{(m,n)}\end{cases}$$

[2] Sinon, c'est faux ! Sur un corps, notre module P devient un espace vectoriel, lequel admet autant d'automorphismes que de permutation des vecteurs d'une base donnée.

est donc une application bilinéaire

Soit ensuite $\varphi : M \times N \longrightarrow R$ bilinéaire. Elle détermine une application linéaire

$$\widetilde{\varphi} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & R \\ \sum_{\text{finie}} \lambda_{m,n} (m,n) & \longmapsto & \sum \lambda_{m,n} \varphi (m,n) \end{array} \right.$$

via les images de la base et, puisque φ est bilinéaire, $\widetilde{\varphi}$ s'annule sur F, *i. e.* $F \subset \operatorname{Ker} \widetilde{\varphi}$, donc $\widetilde{\varphi}$ passe au quotient, d'où une application linéaire

$$\overline{\varphi} : \left\{ \begin{array}{ccc} {}^{E}\!\diagup_{F} & \longrightarrow & R \\ \overline{(m,n)} & \longmapsto & \widetilde{\varphi} (m,n) \end{array} \right. .$$

Par construction, on a bien $\overline{\varphi} \circ \pi (m,n) = \overline{\varphi} \left(\overline{(m,n)} \right) = \widetilde{\varphi} ((m,n)) = \varphi (m,n)$, d'où $\varphi = \overline{\varphi} \circ \pi$ comme voulu. De plus, $\overline{\varphi}$ est unique car on connaît les images des $\pi (m,n)$ qui engendrent ${}^{E}\!\diagup_{F}$.

On notera

$${}^{E}\!\diagup_{F} = M \underset{A}{\otimes} N \text{ ou } M \otimes_A N,$$

ce que l'on prononce « M *tensoriel* N » ou « M *tenseur* N ». Le A en indice est juste là pour rappeler l'anneau de base[3], mais on l'omettra si le contexte est assez explicite. Le module $M \otimes_A N$ est ainsi une solution à notre problème universel, et on l'appellera **le** *produit tensoriel* de M par N (au-dessus de A).

Noter que, en tant que A-module, le produit tensoriel $M \otimes_A N = \pi (E) = \pi (\langle M \times N \rangle) = \langle \pi (M \times N) \rangle$ est engendré par les $\pi (m,n) = \overline{(m,n)}$. On notera désormais

$$\overline{(m,n)} =: m \otimes_A n \text{ ou } m \otimes n$$

pour ces générateurs, que l'on appellera également *tenseurs purs*.

Compléments.

Il n'est pas bien difficile d'adapter la construction ci-dessus pour construire le produit tensoriel d'un nombre quelconque (fini) de modules. On définira $M_1 \otimes \cdots \otimes M_n$ comme le quotient du module libre $\langle M_1 \times \cdots \times M_n \rangle$ par un idéal choisi pour être annulé par toute application n-linéaire. La propriété universelle subsiste, ce qui permet de représenter linéairement toutes les applications n-linéaires.

L'associativité du produit tensoriel démontrée plus bas assure que l'on retombe sur nos pieds, au sens où l'on pourra identifier $a \otimes b \otimes c$ avec $(a \otimes b) \otimes c$ ou bien $a \otimes (b \otimes c)$. Le lecteur notera à ce propos l'analogie avec les propriétés du produit cartésien.

Le lecteur est également invité à vérifier que le produit tensoriel d'un seul module est le module lui-même.

Remarque pour les tétratomistes. Montrons que le produit tensoriel vide vaut l'anneau de base (et non le module nul).

Il s'agit de trouver une application π partant d'une produit direct (vide) de modules (*i. e.* le module nul), qui soit 0-linéaire (donc sans condition aucune), vers l'anneau A et qui satisfasse aux conditions de la propriété universelle.

$$\begin{array}{ccc} \{0\} & \xrightarrow{\varphi} & M \\ \downarrow \pi & \nearrow_{\overline{\varphi}} & \\ A & & \end{array}$$

On se donne donc une application 0-linéaire (*i. e.* sans condition) $\varphi : \{0\} \longrightarrow M$ vers un module M quelconque que l'on cherche à factoriser par l'application π. En prenant $\pi = 1$, $\overline{\varphi}$ est linéaire sur une droite, donc est entièrement déterminée par l'image de $1 = \pi (0)$. Ceci montre existence et unicité du $\overline{\varphi}$ cherché – lequel sera défini par $a \mapsto a\varphi (0)$.

[3] on pourra parler du produit tensoriel de M et N *au-desssus de* A

1.1.3 Propriétés basiques

Puisque $\pi : \left\{ \begin{array}{ccc} M \times N & \longrightarrow & M \otimes N \\ (m,n) & \longmapsto & m \otimes n \end{array} \right.$ est bilinéaire, on a immédiatement les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{c} (m+m') \otimes n = (m \otimes n) + (m' \otimes n) \\ m \otimes (n+n') = (m \otimes n) + (m \otimes n') \\ (am) \otimes n = m \otimes (an) = a\,(m \otimes n) \end{array} \right. .$$

On en déduit $0_M \otimes n = (0_A m) \otimes n = 0_A\,(m \otimes n) = 0$, *i. e.*

$$0 \otimes n = m \otimes 0 = 0.$$

Si l'on reprend le problème que l'on s'était posé en début de chapitre, étant donnée une application bilinéaire

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} M \times N & \longrightarrow & R \\ (m,n) & \longmapsto & \varphi\,(m,n) \end{array} \right. ,$$

on a bien une unique application linéaire

$$\overline{\varphi} : \left\{ \begin{array}{ccc} M \otimes N & \longrightarrow & R \\ m \otimes n & \longmapsto & \varphi\,(m,n) \end{array} \right. ,$$

i. e. telle que $\overline{\varphi} \circ \pi\,(m,n) = \varphi\,(m,n)$ pout tout (m,n) de $M \times N$.

L'unicité de $\overline{\varphi}$ vient de sa linéarité et de ce que les $m \otimes n$ engendrent $M \otimes N$, le point important est surtout son *existence*. En effet, si l'on voulait définir $\overline{\varphi}$ « à la main », il faudrait vérifier que $\varphi\,(m,n)$ ne dépend pas du représentant $m \otimes n$ choisi, et donc redire à chaque fois que φ passe au quotient par l'idéal F, ce qui passe au mieux pour une tâche rébarbative.

C'est ce que l'on appelle la **propriété universelle du produit tensoriel**. On dit aussi que φ *se factorise* en $\overline{\varphi} \circ \pi$:

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\varphi} & R \\ \downarrow \pi & \nearrow_{\overline{\varphi}} & \\ M \otimes N & & \end{array} .$$

On remarquera de plus que le produit tensoriel ne dépend que de la structure des modules considérés, en cela que :

$$\left\{ \begin{array}{c} M \simeq M' \\ N \simeq N' \end{array} \right. \Longrightarrow M \otimes N \cong M' \otimes N'.$$

En effet, si $\left\{ \begin{array}{c} \mu : M \longrightarrow M' \\ \nu : N \longrightarrow N' \end{array} \right.$ sont des isomorphismes, l'application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} M \times N & \longrightarrow & M' \otimes N' \\ (m,n) & \longmapsto & \mu\,(m) \otimes \nu\,(n) \end{array} \right.$$

est bilinéaire, donc la propriété universelle nous donne une application linéaire

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} M \otimes N & \longrightarrow & M' \otimes N' \\ m \otimes n & \longmapsto & \mu\,(m) \otimes \nu\,(n) \end{array} \right. .$$

De même, l'application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} M' \times N' & \longrightarrow & M \otimes N \\ (m',n') & \longmapsto & \mu^{-1}\,(m') \otimes \nu^{-1}\,(n') \end{array} \right.$$

est bilinéaire, donc la propriété universelle nous donne une application linéaire

$$\Psi : \left\{ \begin{array}{ccc} M' \otimes N' & \longrightarrow & M \otimes N \\ m' \otimes n' & \longmapsto & \mu^{-1}\,(m') \otimes \nu^{-1}\,(n') \end{array} \right. .$$

Il est alors clair que Φ et Ψ sont réciproques l'une de l'autre, donc sont des isomorphismes.

D'autre part, l'application

$$\left\{\begin{array}{ccc}\mathcal{L}(M\otimes N,R) & \longrightarrow & \mathrm{Bil}(M,N;R)\\ \Phi & \longmapsto & (m,n)\mapsto\Phi(m\otimes n)\end{array}\right.$$

est bien définie, linéaire, injective (la connaissance des images par Φ des éléments de la base $m\otimes n$ de $M\otimes N$ détermine uniquement Φ), et surjective (tout φ de $\mathrm{Bil}(M,N;R)$ a un antécédent $\overline{\varphi}$), donc est un isomorphisme.

Enfin, l'application

$$\left\{\begin{array}{ccc}\mathcal{L}(M,\mathcal{L}(N,R)) & \longrightarrow & \mathrm{Bil}(M,N;R)\\ \Phi & \longmapsto & (m,n)\mapsto[\Phi(m)](n)\end{array}\right.$$

est bien définie, linéaire, injective, surjective (tout φ de $\mathrm{Bil}(M,N;R)$ a un antécédent $m\mapsto\varphi(m,\cdot)$), donc est un isomorphisme.

On en conclut que[4]

$$\mathcal{L}(M\otimes N,R)\cong\mathrm{Bil}(M,N;R)\cong\mathcal{L}(M,\mathcal{L}(N,R)).$$

Remarque. Les tenseurs purs $m\otimes n$ engendrent le module $M\otimes N$, mais tous les éléments de $M\otimes N$ ne sont pas des tenseurs purs : ce sont une *somme* de tenseurs purs.

D'autre part, en général les tenseurs purs non nuls ne sont pas libres et donc ne forment pas une base. Prendre par exemple $M=N=A$, auquel cas tous les tenseurs purs sont colinéaires : $cd(a\otimes b)=abcd(1\otimes 1)=ab(c\otimes d)$. On montre plus tard que $A\otimes A\simeq A$, donc si A est un anneau non nul, mettons $A=\mathbb{Z}$, alors il y a au moins deux tenseurs purs non nuls colinéaires, ce qui empêche la liberté de ces derniers.

Exemple. On considère les $\mathbb{Z}$-modules $\left\{\begin{array}{l}M:=\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}\\ N:=\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}\end{array}\right.$ où a et b sont des entiers.

Puisque $x\otimes y=xy(1_M\otimes 1_N)$, le produit tensoriel $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ est monogène. Il est de plus fini car image de l'ensemble fini $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ par la projection canonique. Il est par conséquent cyclique, donc isomorphe à un groupe additif $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.

De plus, Bézout donne

$$\begin{aligned}(a\wedge b)(1_M\otimes 1_N) &= (ua+vb)(1\otimes 1)\\ &= ua(1\otimes 1)+vb(1\otimes 1)\\ &= u(a1_M\otimes 1)+v(1\otimes b1_N)\\ &= u(0\otimes 1)+v(1\otimes 0)\\ &= 0+0=0,\end{aligned}$$

donc k divise $a\wedge b$.

Dans le cas particulier où a et b sont premiers entre eux, on en déduit

$$\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}\simeq\{0\}.$$

On peut montrer plus généralement[5] que

$$\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}/(a\wedge b)\mathbb{Z}.$$

Propriétés (commutativité, associtativité, et élément neutre[6] pour le produit tensoriel). *Soient M,N,R des A-modules.*

[4] Bien sûr, on montrerait de même que

$$\mathcal{L}(M_1\otimes\ldots\otimes M_n,R)\cong\mathcal{L}_n(M_1,\ldots,M_n;R).$$

[5] Ce sera immédiat lorsqu'on saura calculer des produits tensoriels de quotients.

[6] On comprend ici d'une autre manière pourquoi le produit tensoriel vide doit valoir l'anneau de base.

1. *Les A-modules $M \otimes N$ et $N \otimes M$ sont canoniquement identifiables*[7] *via l'isomorphisme*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} M \otimes N & \xrightarrow{\sim} & N \otimes M \\ m \otimes n & \longmapsto & n \otimes m \end{array} \right. .$$

2. *Les A-modules $(M \otimes N) \otimes R$ et $M \otimes (N \otimes R)$ sont canoniquement identifiés via l'isomorphisme*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} (M \otimes N) \otimes R & \xrightarrow{\sim} & M \otimes (N \otimes R) \\ (m \otimes n) \otimes p & \longmapsto & m \otimes (n \otimes p) \end{array} \right. .$$

3. *Les A-modules M, $M \otimes A$ et $A \otimes M$ sont canoniquement identifiés via les isomorphismes*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\sim} & M \otimes A \\ m & \longmapsto & m \otimes 1 \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\sim} & A \otimes M \\ m & \longmapsto & 1 \otimes m \end{array} \right. .$$

Démonstration.

1. On considère l'application bilinéaire

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} M \times N & \longrightarrow & N \otimes M \\ (m, n) & \longmapsto & n \otimes m \end{array} \right. .$$

Par la propriété universelle, il existe une application linéaire

$$\overline{\varphi} : \left\{ \begin{array}{ccc} M \otimes N & \longrightarrow & N \otimes M \\ m \otimes n & \longmapsto & \varphi(m, n) = n \otimes m \end{array} \right. .$$

Un tel $\overline{\varphi}$ est bijectif car involutif et est unique car les images des $m \otimes n$ déterminent entièrement une application linéaire sur $M \otimes N$.

2. À r fixé on considère l'application bilinéaire

$$\varphi_r : \left\{ \begin{array}{ccc} M \times N & \longrightarrow & M \otimes (N \otimes R) \\ (m, n) & \longmapsto & m \otimes (n \otimes r) \end{array} \right. .$$

Par la propriété universelle, il existe une application linéaire

$$\overline{\varphi_r} : \left\{ \begin{array}{ccc} M \otimes N & \longrightarrow & M \otimes (N \otimes R) \\ m \otimes n & \longmapsto & m \otimes (n \otimes r) \end{array} \right. .$$

On remarque alors que $r \mapsto \overline{\varphi_r}$ est linéaire, donc l'application

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} (M \otimes N) \otimes R & \longrightarrow & M \otimes (N \otimes R) \\ \xi \otimes r & \longmapsto & \overline{\varphi_r}(\xi) \end{array} \right.$$

est également linéaire, avec $\Phi((m \otimes n) \otimes r) = m \otimes (n \otimes r)$. De façon analogue, en se fixant m, l'application bilinéaire

$$\psi_m : \left\{ \begin{array}{ccc} N \times R & \longrightarrow & (M \otimes N) \otimes R \\ (n, r) & \longmapsto & (m \otimes n) \otimes r \end{array} \right.$$

se factorise en

$$\overline{\psi_m} : \left\{ \begin{array}{ccc} N \otimes R & \longrightarrow & (M \otimes N) \otimes R \\ n \otimes r & \longmapsto & (m \otimes n) \otimes r \end{array} \right. ,$$

puis $m \mapsto \overline{\psi_m}$ est linéaire, donc

$$\Psi : \left\{ \begin{array}{ccc} M \otimes (N \otimes R) & \longrightarrow & (M \otimes N) \otimes R \\ m \otimes \xi & \longmapsto & \overline{\psi_m}(\xi) \end{array} \right.$$

est également linéaire, avec $\Psi(m \otimes (n \otimes r)) = (m \otimes n) \otimes r$. On voit alors facilement que Ψ et Φ sont réciproques l'une de l'autre, donc sont des isomorphismes. Concernant l'unicité, il suffit de dire que les images des tenseurs purs déterminent entièrement une application linéaire.

[7] mais l'on s'abstiendra de faire cette identification sans raison

3. On considère d'une part l'application $\left\{\begin{array}{ccc} A\times M & \longrightarrow & M \\ (a,m) & \longmapsto & am \end{array}\right.$ bilinéaire qui se factorise en

$$\left\{\begin{array}{ccc} A\otimes M & \longrightarrow & M \\ a\otimes m & \longmapsto & am \end{array}\right. ,$$

d'autre part l'application linéaire

$$\left\{\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & A\otimes M \\ m & \longmapsto & 1\otimes m \end{array}\right. ,$$

lesquelles sont clairement linéaires et réciproques l'une de l'autre. Pour montrer l'unicité, quitte à se répéter, on n'oublie pas que les images des tenseurs purs déterminent entièrement une application linéaire...

Une façon de voir le produit tensoriel $M\otimes N$ est de l'identifier à N en tant que M-module : dans le A-module N, on remplace les scalaires de A par des éléments de M. Puisque le produit tensoriel est commutatif, on peut aussi voir $M\otimes N\simeq N\otimes M$ comme le A-module M où l'on a remplacé les scalaires par des éléments de N.

Par exemple, si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on peut le voir comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel en considérant le produit[8] $\mathbb{C}\otimes E$. Ce point sera plus largement étudié au paragraphe *Restriction et extension des scalaires*.

Définition.
Soient M,N,M',N' des modules, et $\left\{\begin{array}{c} f:M\longrightarrow M' \\ g:N\longrightarrow N' \end{array}\right.$ *des applications linéaires.*
On appelle produit tensoriel *de f et g l'unique application linéaire*

$$f\widetilde{\otimes}g:\left\{\begin{array}{ccc} M\otimes N & \longrightarrow & M'\otimes N' \\ m\otimes n & \longmapsto & f(m)\otimes g(n) \end{array}\right. .$$

Démonstration de l'existence et de l'unicité de $f\widetilde{\otimes}g$.
L'application $\left\{\begin{array}{ccc} M\times N & \longrightarrow & M'\otimes N' \\ (m,n) & \longmapsto & f(m)\otimes g(n) \end{array}\right.$ se factorise en

$$\left\{\begin{array}{ccc} M\otimes N & \longrightarrow & M'\otimes N' \\ m\otimes n & \longmapsto & f(m)\otimes g(n) \end{array}\right. ,$$

d'où l'existence de $f\widetilde{\otimes}g$. L'unicité vient (comme toujours) de ce que les $m\otimes n$ engendrent $M\otimes N$.

La notation $f\widetilde{\otimes}g$ n'est pas anodine. En effet, l'application

$$\left\{\begin{array}{ccc} \begin{array}{c}\mathcal{L}(M,M')\\ \times \\ \mathcal{L}(N,N')\end{array} & \longrightarrow & \mathcal{L}\left(\begin{array}{ccc} M & & M' \\ \otimes & , & \otimes \\ N & & N'\end{array}\right) \\ \\ (f,g) & \longmapsto & f\widetilde{\otimes}g \end{array}\right.$$

est bilinéaire (il suffit d'utiliser les propriétés de bilinéarité de $m\otimes n$ sur $M\otimes N$ en évaluant $f\otimes g$ en un $m\otimes n$), donc se factorise en un morphisme

$$\left\{\begin{array}{ccc} \begin{array}{c}\mathcal{L}(M,M')\\ \otimes \\ \mathcal{L}(N,N')\end{array} & \longrightarrow & \mathcal{L}\left(\begin{array}{ccc} M & & M' \\ \otimes & , & \otimes \\ N & & N'\end{array}\right) \\ \\ f\otimes g & \longmapsto & f\widetilde{\otimes}g \end{array}\right. ,$$

appelé *morphisme de Kronecker*. On notera alors par commodité $f\otimes g$ au lieu de $f\widetilde{\otimes}g$; on prendra garde à ne pas confondre les deux notions, mais le contexte nous guidera dans la plupart des cas.

[8] $\mathbb{C}$ étant bien sûr vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Remarque. Le morphisme de Kronecker n'est ni injectif, ni surjectif dans le cas général[9]. Cependant, on a l'injectivité si les modules considérés sont libres sur un anneau nœthérien[10], ce qui est le cas des espaces vectoriels.

Propriétés.

$$\begin{pmatrix} f \\ \otimes \\ \mathrm{Id}_{N'} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_M \\ \otimes \\ g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ \otimes \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{M'} \\ \otimes \\ g \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} f \\ \otimes \\ \mathrm{Id}_N \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f \circ f' \\ \otimes \\ g \circ g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ \otimes \\ g \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} f' \\ \otimes \\ g' \end{pmatrix}.$$

Démonstration.
On vérifie les égalités sur les tenseurs purs.

Remarque. Nous avons utilisé les deux dimensions de la feuille pour distinguer deux opérations : le produit tensoriel (vertical) et la composition (horizontale). Le lecteur notera l'avantage commun avec l'écriture des lois d'un produit cartésien sous la forme

$$\begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}.$$

1.2 Produit direct et somme directe de modules

1.2.1 Distributivité du produit tensoriel sur les sommes directes

Soient $(M_i)_{i \in I}$ et $(N_j)_{j \in J}$ deux familles de A-modules. On pose $\left\{ \begin{array}{l} M := \prod_{i \in I} M_i \\ N := \prod_{j \in J} N_j \end{array} \right.$. On peut former le produit cartésien $\prod_{i,j} (M_i \otimes N_j)$. On dispose via la propriété universelle d'une application A-linéaire

$$\Pi : \left\{ \begin{array}{ccc} M \otimes N & \longrightarrow & \prod_{i,j} M_i \otimes N_j \\ (x_i) \otimes (y_j) & \longmapsto & (x_i \otimes y_j) \end{array} \right. .$$

Remarque. Π n'est en général ni injectif, ni surjectif. La non-surjectivité est montrée via un argument de dualité et la non-injectivité à l'aide de calculs de produits tensoriels de quotients. Pour les détails, voir l'annexe.

Π n'est donc sûrement pas bijectif, ce qui s'écrit aussi

$$\left(\prod M_i \right) \otimes \left(\prod N_j \right) \ncong \prod (M_i \otimes N_j).$$

Par conséquent, le produit tensoriel ne se distribue pas sur le produit cartésien.

En revanche, si l'on ne regarde dans les produits cartésiens que les familles à support fini, *i. e.* si l'on remplace les $\prod$ par des $\bigoplus$, on va obtenir un isomorphisme

$$\left(\bigoplus M_i \right) \otimes \left(\bigoplus N_j \right) \cong \bigoplus (M_i \otimes N_j).$$

C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition (distributivité de $\otimes$ sur $\oplus$).

[9] voir l'annexe pour des contre-exemples
[10] *cf.* **Algèbre et théories galoisiennes** de R. & A. Douady, pages 174-175

Il y a un isomorphisme canonique de A-modules

$$\begin{array}{ccc} \left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \otimes \left(\bigoplus_{j\in J} N_j\right) & \xrightarrow{\sim} & \bigoplus_{i,j} \left(M_i \otimes N_j\right) \\ \left(\sum x_i\right) \otimes \left(\sum y_j\right) & \longmapsto & \sum_{i,j} \left(x_i \otimes y_j\right) \end{array}$$

Démonstration.
Notons $\left\{ \begin{array}{l} M' := \bigoplus_{i\in I} M_i \\ N' := \bigoplus_{j\in J} N_j \end{array} \right.$ les sous-modules de M et N des familles à support fini.
On dispose d'une injection canonique (linéaire)

$$\left\{ \begin{array}{ccc} M' \otimes N' & \hookrightarrow & M \otimes N \\ (x_i) \otimes (y_j) & \longmapsto & (x_i) \otimes (y_j) \end{array} \right. ,$$

qui, composée avec

$$\Pi : \left\{ \begin{array}{ccc} M \otimes N & \longrightarrow & \prod_{i,j} M_i \otimes N_j \\ (x_i) \otimes (y_j) & \longmapsto & (x_i \otimes y_j) \end{array} \right. ,$$

donne une application linéaire

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} M' \otimes N' & \longrightarrow & \bigoplus_{i,j} \left(M_i \otimes N_j\right) \\ (x_i)_i \otimes (y_j)_j & \longmapsto & (x_i \otimes y_j)_{i,j} \end{array} \right.$$

bien définie puisque l'image d'un élément $(x_i) \otimes (y_j)$ de $M' \otimes N'$ par Φ est une famille à support fini dans $I \times J$.

On construit une réciproque à Φ sur chacune des composantes de $\bigoplus_{i,j} \left(M_i \otimes N_j\right)$. À (i,j) fixé, on a (par la propriété universelle) une application linéaire

$$\psi_{i,j} : \left\{ \begin{array}{ccc} M_i \otimes N_j & \longrightarrow & M' \otimes N' \\ x \otimes y & \longmapsto & x \otimes y \end{array} \right. .$$

En recollant les $\psi_{i,j}$, on obtient une application linéaire

$$\Psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \bigoplus_{i,j} \left(M_i \otimes N_j\right) & \longrightarrow & M' \otimes N' \\ \sum_{i,j} \left(x_i \otimes y_j\right) & \longmapsto & \sum_{i,j} \psi_{i,j} \left(x_i \otimes y_j\right) \end{array} \right. .$$

Le terme $\sum_{i,j} \psi_{i,j} \left(x_i \otimes y_j\right)$ ci-dessus se simplifie en utilisant la bilinéarité de $\otimes$ dans $M' \otimes N'$:

$$\sum_{i,j} \psi_{i,j} \left(x_i \otimes y_j\right) = \sum_{i,j} x_i \otimes y_j = \sum_j \sum_i x_i \otimes y_j = \sum_j \left(\sum_i x_i\right) \otimes y_j = \left(\sum_i x_i\right) \otimes \left(\sum_i y_j\right).$$

En se rappelant $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} M' \otimes N' & \longrightarrow & \bigoplus_{i,j} \left(M_i \otimes N_j\right) \\ \left(\sum x_i\right) \otimes \left(\sum y_j\right) & \longmapsto & \sum_{i,j} \left(x_i \otimes y_j\right) \end{array} \right.$, on voit clairement que Ψ est la réciproque de Φ, ce qui conclut.

Remarque. Une récurrence immédiate couplée à l'associativité du produit tensoriel permet de généraliser la distributivité à un nombre quelconque (fini) de sommes directes. On pourra donc calculer comme dans les anneaux, en regroupant les termes comme souhaité.

1.2.2 Produit tensoriel de modules libres

Corollaire.
Soient M et N deux A-modules.

1. *Si N* est *libre de base $(f_j)_{j\in J}$, alors tout élément de $M \otimes N$ s'écrit de façon unique*

$$\sum_{j\in J}^{\text{finie}} m_j \otimes f_j.$$

$M \otimes N$ se comporte ainsi comme un M-espace vectoriel.

2. *Si de plus M est libre de base (e_i), alors $M \otimes N$ est libre de base $(e_i \otimes f_j)$, et*

$$\operatorname{rg}(M \otimes N) = \operatorname{rg}(M) \operatorname{rg}(N).$$

Démonstration.

1. Puisque $N = \bigoplus Af_j$, on peut calculer $M \otimes N$ grâce à la proposition précédente :

$$M \otimes N = M \otimes \bigoplus Af_j \cong \bigoplus (M \otimes Af_j).$$

Par ailleurs, un tenseur pur dans $M \otimes Af_j$ s'écrit $m \otimes af_j = am \otimes f_j$, donc les éléments de $M \otimes Af_j$ sont tous (par sommation de tenseurs purs) de la forme $m_j \otimes f_j$. *A fortiori*, les éléments de $\bigoplus (M \otimes Af_j)$ s'écrivent tous sous la forme d'une somme finie $\sum_j m_j \otimes f_j$, image de la somme finie $\sum_j m_j \otimes f_j$ de $M \otimes N$ par l'isomorphisme ci-dessus. Ainsi, tout élément $\xi \in M \otimes N$ est envoyé sur un $\sum_j m_j \otimes f_j$ de $\bigoplus (M \otimes Af_j)$, donc s'écrit (dans $M \otimes N$) sous la forme $\xi = \sum_j m_j \otimes f_j$.

Concernant l'unicité, si $\sum m_j \otimes f_j = 0$ dans $M \otimes N$, on observe que l'isomorphisme ci-dessus transforme le $\sum$ en une somme directe, d'où la nullité de toutes les composantes $m_j \otimes f_j$.

2. On applique la proposition précédente à $\begin{cases} M = \bigoplus_i Ae_i \\ N = \bigoplus_j Af_j \end{cases}$, ce qui donne

$$\left(\bigoplus_i Ae_i\right) \otimes \left(\bigoplus_j Af_j\right) \cong \bigoplus_{i,j} (Ae_i \otimes Af_j) = \bigoplus_{i,j} A(e_i \otimes f_j),$$

d'où une base $(e_i \otimes f_j)_{i,j}$ pour $M \otimes N$, et son rang

$$\operatorname{rg}(M \otimes N) = \#\left\{(e_i \otimes f_j)_{i,j}\right\} = \#(I \times J) = \#I \times \#J = \operatorname{rg} M \times \operatorname{rg} N$$

(valable même si I ou J infini, d'après les propriétés sur les cardinaux).

Application[11].
Le morphisme de Kronecker n'est en général pas injectif.

1.2.3 Produit tensoriel de matrices

Intéressons-nous maintenant à l'effet du produit tensoriel sur les matrices. Cela suppose de considérer des modules libres de type fini.

Proposition.
Soient $\begin{cases} M := Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_m \\ N := Af_1 \oplus \cdots \oplus Af_n \end{cases}$ *deux modules libres de type fini,* $\begin{cases} f \in \mathcal{L}(M) \\ g \in \mathcal{L}(N) \end{cases}$ *deux endomorphismes et* $\begin{cases} X := \operatorname{Mat}_{(e_i)} f =: (a_{i,j}) \\ Y := \operatorname{Mat}_{(f_j)} g =: (b_{i,j}) \end{cases}$.

1. *Si on ordonne lexicographiquement la base canonique de $M \otimes N$ en*

$$\begin{aligned} &e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, ..., e_1 \otimes f_n, \\ &e_2 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2, ..., e_2 \otimes f_n, \\ &\cdots \\ &e_m \otimes f_1, e_m \otimes f_2, ..., e_m \otimes f_n, \end{aligned}$$

on a alors, dans cette base :

$$\operatorname{Mat}(f \otimes g) = \begin{pmatrix} a_{1,1}Y & \cdots & a_{1,m}Y \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}Y & \cdots & a_{m,m}Y \end{pmatrix}$$

(on part de la matrice X, et on multiplie chacun de ses coefficients par Y).

[11] *cf.* annexe

2. *Si on ordonne anti-lexicographiquement*[12] *la base canonique de* $M \otimes N$ *en*

$$\begin{array}{l} e_1 \otimes f_1, e_2 \otimes f_1, ..., e_m \otimes f_1, \\ e_1 \otimes f_2, e_2 \otimes f_2, ..., e_m \otimes f_2, \\ \cdots \\ e_1 \otimes f_n, e_2 \otimes f_n, ..., e_m \otimes f_n, \end{array}$$

on a alors, dans cette base :

$$\operatorname{Mat}(f \otimes g) = \begin{pmatrix} b_{1,1}X & \cdots & b_{1,n}X \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1}X & \cdots & b_{n,n}X \end{pmatrix}$$

(on part de la matrice Y*, et on multiplie chacun de ses coefficients par* X*).*

Démonstration.

1. Notons Z la matrice de $f \otimes g$ dans la base considérée (ordre lexicographique) et fixons un couple d'indices (i_0, j_0). Si l'on regarde la matrice $n \times n$ extraite de Z correspondant aux lignes $(e_{i_0} \otimes f_k)_{k=1,\ldots,n}$ et aux colonnes $(e_{j_0} \otimes f_l)_{l=1,\ldots,n}$, que nous noterons Z^{i_0,j_0}, on a

$$\begin{aligned} \left[Z^{i_0,j_0}\right]_{k,l} &= \text{coef en } (e_{i_0} \otimes f_k) \text{ dans } [f \otimes g](e_{j_0} \otimes f_l) \\ &= \text{coef en } (e_{i_0} \otimes f_k) \text{ dans } f(e_{j_0}) \otimes g(f_l) \\ &= \text{coef en } (e_{i_0} \otimes f_k) \text{ dans } \sum_{p=1}^m a_{p,j_0} e_p \otimes \sum_{q=1}^n b_{q,l} f_q \\ &= \text{coef en } (e_{i_0} \otimes f_k) \text{ dans } \sum_{p,q} a_{p,j_0} b_{q,l} (e_p \otimes f_q) \\ &= a_{i_0,j_0} b_{k,l}, \end{aligned}$$

d'où $Z^{i_0,j_0} = a_{i_0,j_0} Y$.

2. Notons Z la matrice de $f \otimes g$ dans la base considérée (ordre anti-lexicographique) et fixons un couple d'indices (k_0, l_0). Si l'on regarde la matrice $n \times n$ extraite de Z correspondant aux lignes $(e_i \otimes f_{k_0})_{i=1,\ldots,m}$ et aux colonnes $(e_j \otimes f_{l_0})_{j=1,\ldots,m}$, que nous noterons Z^{k_0,l_0}, on a

$$\begin{aligned} \left[Z^{k_0,l_0}\right]_{i,j} &= \text{coef en } (e_i \otimes f_{k_0}) \text{ dans } [f \otimes g](e_j \otimes f_{l_0}) \\ &= \text{coef en } (e_i \otimes f_{k_0}) \text{ dans } f(e_j) \otimes g(f_{l_0}) \\ &= \text{coef en } (e_i \otimes f_{k_0}) \text{ dans } \sum_{p=1}^m a_{p,j} e_p \otimes \sum_{q=1}^n b_{q,l_0} f_q \\ &= \text{coef en } (e_i \otimes f_{k_0}) \text{ dans } \sum_{p,q} a_{p,j} b_{q,l_0} (e_p \otimes f_q) \\ &= a_{i,j} b_{k_0,l_0}, \end{aligned}$$

d'où $Z^{i_0,j_0} = b_{k_0,l_0} X$.

Corollaire[13]**.**

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(f \otimes g) &= \operatorname{tr}(f)\operatorname{tr}(g), \\ \det(f \otimes g) &= \det(f)^{\operatorname{rg} N} \det(g)^{\operatorname{rg} M}. \end{aligned}$$

[12] Il ne s'agit pas de l'ordre opposé à l'ordre lexicographique !

[13] Pour le déterminant, on prendra garre à ce que les modules en exposant ne sont pas ceux associés à l'application linéaire en-dessous ; la correspondance s'effectue en croix :

$$\begin{matrix} N & & M \\ f & \times & g \end{matrix}.$$

Démonstration.
On évalue la trace dans une des deux bases précédemment considérées :

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(f\otimes g) &= \operatorname{tr}(A\otimes B)=\operatorname{tr}\begin{pmatrix} a_{1,1}B & \cdots & a_{1,m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}B & \cdots & a_{m,m}B \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\operatorname{tr}(a_{i,i}B)=\sum_{i=1}^{m}a_{i,i}\operatorname{tr}(B)=\operatorname{tr}A\operatorname{tr}B,
\end{aligned}$$

et on procède de même pour le déterminant en utilisant les deux bases :

$$\begin{aligned}
\det(f\otimes g) &= \det(f\otimes \mathrm{Id}\circ \mathrm{Id}\otimes g)=\det(f\otimes \mathrm{Id})\det(\mathrm{Id}\otimes g) \\
&= \det\begin{pmatrix} [I_n]_{1,1}A & \cdots & [I_n]_{1,n}A \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [I_n]_{n,1}A & \cdots & [I_n]_{n,n}A \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} [I_m]_{1,1}B & \cdots & [I_m]_{1,m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [I_m]_{m,1}B & \cdots & [I_m]_{m,m}B \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}=(\det A)^n(\det B)^m.
\end{aligned}$$

Compléments.
Des calculs précédents ressort un produit matriciel défini[14] par

$$X\otimes Y:=\begin{pmatrix} a_{1,1}Y & \cdots & a_{1,m}Y \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}Y & \cdots & a_{m,m}Y \end{pmatrix}\text{ où }(a_{i,j}):=X.$$

Il s'agit du *produit de Kronecker*, dont les premières propriétés découlent de celles du produit tensoriel. Par ailleurs, on montre aisément ${}^t(X\otimes Y)={}^tX\otimes {}^tY$, puis que pour deux matrices X et Y de même taille les matrices $X\otimes Y$ et $Y\otimes X$ sont conjuguées par une matrice de permutation (on a vu que ces dernières représentent un même endomorphisme dans une même base dont on a réordonné les vecteurs).

1.3 Dual : le morphisme de Kronecker $M^*\otimes N\longrightarrow \mathcal{L}(M,N)$

Soit M un A-module ; on regarde son dual $M^*:=\mathcal{L}(M,A)$. On rappelle que si M est libre de type fini, mettons de base (e_i), alors M^* est aussi libre de type fini, de base (e_i^*) définie par $e_i^*(e_j)=\delta_i^j$; (e_i^*) est appelée *base duale* de (e_i).

Soit M et N deux modules. On a (toujours et encore par la propriété universelle) une application linéaire[15]

$$\theta_N^M:\left\{\begin{array}{ccc} M^*\otimes N & \longrightarrow & \mathcal{L}(M,N) \\ l\otimes n & \longmapsto & l(\cdot)\,n \end{array}\right..$$

Montrons que θ permet sous certaines conditions d'identifier $M^*\otimes N$ et $\mathcal{L}(M,N)$.

Proposition (bijectivité de θ).

[14] Afin de laisser X et Y dans le même ordre que celui des coefficients de $X\otimes Y$, on ne considérera pas le produit associé à l'ordre anti-lexicographique.

[15] Il s'agit en fait d'un cas particulier du morphisme de Kronecker où un module source et l'autre module but sont égaux à A. On obtient un morphisme de $\begin{array}{c}\mathcal{L}(M,A)\\ \otimes \\ \mathcal{L}(A,N)\end{array}\cong M^*\otimes N$ vers $\mathcal{L}\begin{pmatrix} M & & A \\ \otimes & , & \otimes \\ A & & N\end{pmatrix}\cong\mathcal{L}(M,N)$. Le lecteur est encouragé à tout expliciter pour retrouver le morphisme θ.

Si M ou N est libre de type fini, alors θ est un isomorphisme.

Démonstration.
L'idée est d'exprimer toute application linéaire $u : M \longrightarrow N$ de façon unique sous la forme $u = \sum l_i(\cdot)\, n_i$. Si l'on y parvient, il suffira de considérer l'application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(M,N) & \longrightarrow & M^* \otimes N \\ \sum l_i(\cdot)\, n_i & \longmapsto & \sum l_i \otimes n_i \end{array} \right.$$

qui est clairement une réciproque de θ, d'où l'isomorphisme recherché.

• Si M est libre de type fini, disons $M = Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_m$, on considère la base duale $(e_1^*, ..., e_m^*)$. Soit $u : M \longrightarrow N$ linéaire. u est entièrement déterminée par les $u(e_i)$, et on a plus précisément $u = \sum_{i=1}^m e_i^*(\cdot)\, u(e_i)$ avec unicité par liberté des e_i^*.

• Si N est libre de rang fini, on peut écrire $N = \bigoplus_{j=1}^n Af_j$. Soit $u : M \longrightarrow N$ linéaire : alors $u(x)$ se décompose (de façon unique) en $\sum_{j=1}^n l_j(x)\, f_j$, et la linéarité de u entraine celle des l_j, d'où une écriture $u = \sum_{j=1}^n l_j(\cdot)\, f_j$ avec $l_j \in M^*$. Pour avoir l'unicité des l_j, on remarque que si $0 = \sum_{j=1}^n l_j(\cdot)\, f_j$, alors tous les l_j sont nuls par liberté des f_j.

Cas particuliers.

1. Pour des espaces vectoriels de dimension finie :

$$E^* \otimes F \cong \mathcal{L}(E,F).$$

Cela se comprend bien : une application linéaire est une combinaison linéaire d'applications linéaires $l(\cdot)\, x$ de rang 1 (on peut le voir de façon matricielle) auxquelles correspondent dans $E^* \otimes F$ les $l \otimes x$. Si de plus $F = E$ de base (e_i), alors $e_i^* \otimes e_j$ vu dans $\mathcal{L}(E)$ est $e_i^*(\cdot)\, e_j$ et donc a pour matrice $E_{j,i}$.

Le lecteur montrera aisément que le nombre minimal de tenseurs purs nécessairement pour écrire un $\xi \in E^* \otimes F$ est le rang de $\theta(\xi)$. Cet argument permet d'exhiber un contre-exemple[16] à la surjectivité de la flèche naturelle $(\prod M_i) \otimes (\prod N_j) \longrightarrow \prod (M_i \otimes N_j)$.

2. Si on prend $M = N$ dont on fixe une base $(e_1, ..., e_n)$, on a une correspondance[17]

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(M) & \longleftrightarrow & M^* \otimes M, \\ \mathrm{Id} & \longleftrightarrow & \sum_{i=1}^n e_i^* \otimes e_i, \\ f & \longleftrightarrow & \sum_{i=1}^n e_i^* \otimes f(e_i). \end{array}$$

3. Sur $M^* \otimes M$, on a une forme linéaire bien privilégiée, appelée *contraction* :

$$\kappa_M : \left\{ \begin{array}{ccc} M^* \otimes M & \longrightarrow & A \\ l \otimes x & \longmapsto & l(x) \end{array} \right. .$$

Vue en tant que forme linéaire $\widetilde{\kappa}$ de $\mathcal{L}(M)$, on a

$$\widetilde{\kappa}(f) = \kappa(\theta(f)) = \kappa\left(\sum_{i=1}^n e_i^* \otimes f(e_i)\right) = \sum_{i=1}^n \kappa(e_i^* \otimes f(e_i)) = \sum_{i=1}^n e_i^*(f(e_i)) = \mathrm{tr}\, f,$$

et donc la contraction vue dans $\mathcal{L}(M)^*$ est tout simplement la trace.

Compléments sur la trace.
Soit M un module. Comment définir la trace d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(M)$? On dispose d'un morphisme de Kronecker $\theta := \theta_M^M$ et d'une contraction κ. On définit la trace d'un $f \in \mathrm{Im}\,\theta$ par $\mathrm{tr}\, f := \kappa(\xi)$ où ξ est un tenseur antécédent de f par θ ; sous l'hypothèse[18] $\mathrm{Ker}\,\theta \subset \mathrm{Ker}\,\kappa$, cette définition bien indépendant de l'antécédent ξ.

[16] *cf.* annexe
[17] l'élément $\sum e_i^* \otimes e_i$ est indépendant de la base (e_i) choisie, il est appelé *élément de Casimir*
[18] toujours vérifiée pour les espaces vectoriels car le morphisme de Kronecker θ est alors injectif

Lorsque M est libre de type fini, le calcul ci-dessus montre que la trace de f est la somme des coefficients diagonaux de n'importe quelle matrice représentant f.

Dans le cas général, on retrouve la formule classique $\mathrm{tr}\,(f\circ g)=\mathrm{tr}\,(g\circ f)$. Pour que l'égalité précédente fasse sens, il faut déjà que les traces sur $\left\{\begin{array}{l}\mathrm{Im}\,\theta_M^M\subset L(M)\\ \mathrm{Im}\,\theta_N^N\subset L(N)\end{array}\right.$ soient bien définies, ce qui impose $\left\{\begin{array}{l}\mathrm{Ker}\,\theta_M^M\subset\mathrm{Ker}\,\kappa_M\\ \mathrm{Ker}\,\theta_N^N\subset\mathrm{Ker}\,\kappa_N\end{array}\right.$. Ensuite, il faut que $\left\{\begin{array}{l}g\circ f\in\mathrm{Im}\,\theta_M^M\\ f\circ g\in\mathrm{Im}\,\theta_N^N\end{array}\right.$, ce qui sera le cas dès que l'un des morphismes f ou g est dans l'image du θ correspondant. En effet, si par exemple f s'écrit $\sum\mu_i(\cdot)\,n_i$ avec $(\mu_i,n_i)\in M^*\times N$, les composées $f\circ g$ et $g\circ f$ vaudront respectivement

$$\begin{array}{rcl}f\circ g&=&\sum\mu_i\,(g(\cdot))\,n_i=\theta\left(\sum(\mu_i\circ g)\otimes n_i\right)\\ \text{et } g\circ g&=&\sum\mu_i(\cdot)\,g(n_i)=\theta\left(\sum\mu_i\otimes g(n_i)\right),\end{array}$$

et l'on voit alors que leur trace commune vaut $\sum\mu_i\,(g(n_i))$.

On montrera l'invariance de la trace par extension des scalaires au paragraphe correspond.

1.4 Passage des caractères injectif et surjectif au produit tensoriel

1.4.1 Produit tensoriel de suites exactes

Que se passe-t-il lorsqu'on tensorise une application A-linéaire $u:M\longrightarrow N$ par un troisième A-module R ? Il s'agit d'étudier

$$u\otimes\underset{R}{\mathrm{Id}}:\left\{\begin{array}{ccc}M\otimes R&\longrightarrow&N\otimes R\\ m\otimes r&\longmapsto&u(m)\otimes r\end{array}\right..$$

Remarque. u peut très bien être injective sans que $u\otimes\mathrm{Id}_R$ le soit. En effet, le fait de tensoriser ne consiste pas seulement à raisonner composante par composante (il y a un produit direct pour ça) puisque les scalaires de l'anneau considéré peuvent se balader par linéarité d'une composante à l'autre et ainsi tuer des gens qui étaient non nuls aux départ.

Par exemple, considérons les $\mathbb{Z}$-modules $\left\{\begin{array}{l}M:=\mathbb{Z}\\ N:=n\mathbb{Z}\end{array}\right.$, $R:=\ {}^{\mathbb{Z}}\!/_{n\mathbb{Z}}$, et prenons pour $u:M\longrightarrow N$ la multiplication par n. Alors

$$\left[u\otimes\underset{R}{\mathrm{Id}}\right](k,\overline{m})=nk\otimes\overline{m}=k\otimes n\overline{m}=k\otimes m\overline{n}=k\otimes\overline{0}=0,$$

donc $u\otimes\mathrm{Id}_R$ est l'application nulle. Comme de plus

$$\mathbb{Z}\otimes\ {}^{\mathbb{Z}}\!/_{n\mathbb{Z}}=\mathbb{Z}\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}\ {}^{\mathbb{Z}}\!/_{n\mathbb{Z}}\cong\ {}^{\mathbb{Z}}\!/_{n\mathbb{Z}}$$

qui est non réduit à $\{0\}$ pour $n\geq 2$, $u\otimes\mathrm{Id}_R$ est bien non injective.

Remarque. Les A-modules M tels que $u\otimes\mathrm{Id}_R$ est injective pour tout A-module R dès que u est injective sont appelés modules *plats*[19].

Cependant, la surjectivité passe bien au produit tensoriel, au sens de la proposition suivante.

Proposition (produit tensoriel d'une suite exacte par un module fixé).
Soit une suite exacte

$$M'\overset{u}{\longrightarrow}M\overset{v}{\twoheadrightarrow}M''\longrightarrow 0$$

*(*i. e. $\mathrm{Ker}\,v=\mathrm{Im}\,u$ *et* v *surjective). Alors la suite*

$$M'\otimes R\overset{u\otimes\mathrm{Id}}{\longrightarrow}M\otimes R\overset{v\otimes\mathrm{Id}}{\twoheadrightarrow}M''\otimes R\longrightarrow 0$$

[19] Comme vu dans l'exemple ci-dessus, la platitude est empêchée par des phénomènes de torsion. Plus généralement, si A est un anneau principal, alors un module de type fini sur A est plat ssi il est sans torsion. Ceci justifie la terminologie de *platitude* introduite par Serre.

est encore exacte, i. e. $\operatorname{Ker}(v \otimes \operatorname{Id}) = \operatorname{Im}(u \otimes \operatorname{Id})$ *et* $v \otimes \operatorname{Id}$ *surjective.*

Remarque. Une autre façon de dire que la suite

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0$$

est exacte, est de dire que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v$, puis que l'application linéaire

$$\overline{v} : \left\{ \begin{array}{ccc} {}^{M}\!\big/_{\operatorname{Im} u} & \longrightarrow & M'' \\ \overline{m} & \longmapsto & v(m) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.

En effet, on a alors $M'' = \operatorname{Im} \overline{v} = \operatorname{Im} v$, *i. e.* v surjective, et

$$m \in \operatorname{Ker} v \implies v(m) = 0 \implies \overline{v}(\overline{m}) = 0 \implies \overline{m} \in \operatorname{Ker} \overline{v} = \left\{\overline{0}\right\} \implies \overline{m} = \overline{0} = \operatorname{Im} u \implies m \in \operatorname{Im} u,$$

i. e. $\operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Im} u$ (on a déjà l'autre sens).

Démonstration.

La composée $(v \otimes \operatorname{Id}) \circ (u \otimes \operatorname{Id}) = (v \circ u) \otimes \operatorname{Id} = 0 \otimes \operatorname{Id} = 0$, donc on a déjà l'inclusion $\operatorname{Im}(u \otimes \operatorname{Id}) \subset \operatorname{Ker}(v \otimes \operatorname{Id})$.

Considérons ensuite l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} {}^{M\otimes R}\!\big/_{\operatorname{Im}(u\otimes \operatorname{Id})} & \longrightarrow & M'' \otimes R \\ \overline{m \otimes r} & \longmapsto & [v \otimes \operatorname{Id}](m \otimes r) \end{array} \right.$$

qui vérifie $f(\overline{m \otimes r}) = v(m) \otimes r$. On veut un inverse pour f.

Remarquons tout d'abord que, étant fixé $r \in R$, si m_1 et m_2 ont même image par v, alors $m_1 \otimes r$ et $m_2 \otimes r$ ont même classe dans ${}^{M\otimes R}\!\big/_{\operatorname{Im}(u\otimes \operatorname{Id})}$; en effet, $v(m_1 - m_2) = 0$, *i. e.* $(m_1 - m_2) \in \operatorname{Ker} v = \operatorname{Im} u$, donc $\exists m' \in M'$ tq $m_1 - m_2 = u(m')$, d'où

$$m_1 \otimes r - m_2 \otimes r = (m_1 - m_2) \otimes r = u(m') \otimes \operatorname{Id}(r) = [u \otimes \operatorname{Id}](m' \otimes r) \in \operatorname{Im}(u \otimes \operatorname{Id}).$$

L'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \operatorname{Im} v \times R & \longrightarrow & {}^{M\otimes R}\!\big/_{\operatorname{Im}(u\otimes \operatorname{Id})} \\ (v(m), r) & \longmapsto & \overline{m \otimes r} \end{array} \right.$$

est donc bien définie, bilinéaire, d'où (propriété universelle, et car $\operatorname{Im} v = M''$) une application linéaire

$$\overline{\varphi} : \left\{ \begin{array}{ccc} M'' \otimes R & \longrightarrow & {}^{M\otimes R}\!\big/_{\operatorname{Im}(u\otimes \operatorname{Id})} \\ m'' \otimes r & \longmapsto & \varphi(m'', r) \end{array} \right. .$$

On a bien

$$f \circ \overline{\varphi}(m'' \otimes r) = f \circ \varphi(m'', r) = f \circ \varphi(v(m), r) = f\left(\overline{(m \otimes r)}\right) = v(m) \otimes r = m'' \otimes r,$$

et

$$\overline{\varphi} \circ f\left(\overline{(m \otimes r)}\right) = \overline{\varphi}(v(m) \otimes r) = \varphi(v(m), r) = \overline{m \otimes r},$$

d'où l'inverse recherché.

Corollaire (produit tensoriel de deux suites exactes).

Soient deux suites exactes

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} M' & \xrightarrow{u} & M & \overset{v}{\twoheadrightarrow} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ N' & \xrightarrow{s} & N & \overset{t}{\twoheadrightarrow} & N'' & \longrightarrow & 0 \end{array} \right. .$$

Alors $v \otimes t : M \otimes N \twoheadrightarrow M'' \otimes N''$ *est surjective de noyau*

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(v \otimes t) &= \operatorname{Ker}(v \otimes \operatorname{Id}_N) + \operatorname{Ker}(\operatorname{Id}_M \otimes t) \\ &= \operatorname{Im}(u \otimes \operatorname{Id}_N) + \operatorname{Im}(\operatorname{Id}_M \otimes s). \end{aligned}$$

Démonstration.

• D'après la proposition précédente, $v\otimes \mathrm{Id}_{N'}$ et $\mathrm{Id}_M \otimes t$ sont surjectives, donc leur composée $v\otimes t$ l'est aussi.

• On peut toujours écrire $v\otimes t = \begin{cases} [v\otimes \mathrm{Id}_{N'}]\circ[\mathrm{Id}_M \otimes t] \\ [\mathrm{Id}_{M''}\otimes t]\circ[v\otimes \mathrm{Id}_N] \end{cases}$, d'où les inclusions $\begin{cases} \mathrm{Ker}\,(v\otimes \mathrm{Id}_N)\subset \mathrm{Ker}\,(v\otimes t) \\ \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id}_M\otimes t)\subset \mathrm{Ker}\,(v\otimes t) \end{cases}$, donc la somme $\mathrm{Ker}\,(v\otimes \mathrm{Id}_N)+\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id}_M\otimes t)$ est bien incluse dans $\mathrm{Ker}\,(v\otimes t)$.

Réciproquement, soit $z\in \mathrm{Ker}\,(v\otimes t)$ dans $M\otimes N$. On a

$$0=[v\otimes t]\,(z)=\left[v\otimes \underset{N''}{\mathrm{Id}}\right]\circ\left[\underset{M}{\mathrm{Id}}\otimes t\right](z)\,,$$

d'où

$$\left[\underset{M}{\mathrm{Id}}\otimes t\right](z)\in \mathrm{Ker}\left(v\otimes \underset{N''}{\mathrm{Id}}\right)=\mathrm{Im}\left(u\otimes \underset{N''}{\mathrm{Id}}\right)$$

d'après la proposition précédente, donc s'écrit

$$\left[\underset{M}{\mathrm{Id}}\otimes t\right](z)=\left[u\otimes \underset{N''}{\mathrm{Id}}\right](y)$$

pour un y dans $M'\otimes N''$. Or, toujours d'après la proposition précédente, $\mathrm{Id}_{M'}\otimes t$ est surjective de $M'\otimes N$ sur $M'\otimes N''$, donc y est atteint par un $x\in M'\otimes N$, mettons

$$y=\left[\underset{M'}{\mathrm{Id}}\otimes t\right](x)\,.$$

On a donc

$$\left[\underset{M}{\mathrm{Id}}\otimes t\right](z)=\left[u\otimes \underset{N''}{\mathrm{Id}}\right](y)=\left[u\otimes \underset{N''}{\mathrm{Id}}\right]\circ\left[\underset{M'}{\mathrm{Id}}\otimes t\right](x)=[u\otimes t]\,(x)=\left[\underset{M}{\mathrm{Id}}\otimes t\right]\circ\left[u\otimes \underset{N}{\mathrm{Id}}\right](x)\,,$$

d'où

$$\begin{gathered}\left[\underset{M}{\mathrm{Id}}\otimes t\right]\left(z-\left[u\otimes \underset{N}{\mathrm{Id}}\right](x)\right)=0,\\ z-\left[u\otimes \underset{N}{\mathrm{Id}}\right](x)\in \mathrm{Ker}\left(\underset{M}{\mathrm{Id}}\otimes t\right)=\mathrm{Im}\left(\underset{M}{\mathrm{Id}}\otimes s\right),\\ z\in\left[u\otimes \underset{N}{\mathrm{Id}}\right](x)+\mathrm{Im}\left(\underset{M}{\mathrm{Id}}\otimes s\right)\subset \mathrm{Im}\left(u\otimes \underset{N}{\mathrm{Id}}\right)+\mathrm{Im}\left(\underset{M}{\mathrm{Id}}\otimes s\right),\end{gathered}$$

ce qui achève de montrer la seconde inclusion

$$\mathrm{Ker}\,(v\otimes t)\subset \mathrm{Im}\left(u\otimes \underset{N}{\mathrm{Id}}\right)+\mathrm{Im}\left(\underset{M}{\mathrm{Id}}\otimes s\right).$$

Pour conclure, on utilise les égalités entre images et noyaux fournies par la proposition précédente :

$$\begin{cases} \mathrm{Ker}\,(v\otimes \mathrm{Id}_N)=\mathrm{Im}\,(u\otimes \mathrm{Id}_N) \\ \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id}_M\otimes t)=\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_M\otimes s) \end{cases}.$$

1.4.2 Produit tensoriel de quotients

Corollaire (calcul de produits tensoriels de quotients).

Si $\begin{cases} M' \text{ est un sous-module de } M \\ N' \text{ est un sous-module de } N \end{cases}$*, alors on a un isomorphisme canonique*

$$\begin{cases} {}^{M}\!/_{M'}\otimes {}^{N}\!/_{N'} & \xrightarrow{\sim} & {}^{M\otimes N}\!/_{M'\otimes N+M\otimes N'} \\ \overline{m}\otimes\overline{n} & \longmapsto & \overline{m\otimes n} \end{cases}.$$

Démonstration.

Les suites

$$\begin{cases} M' & \overset{i}{\hookrightarrow} & M & \overset{\mu}{\twoheadrightarrow} & {}^{M}\!/_{M'} & \longrightarrow & 0 \\ N' & \overset{j}{\hookrightarrow} & N & \overset{\nu}{\twoheadrightarrow} & {}^{N}\!/_{N'} & \longrightarrow & 0 \end{cases}$$

sont exactes, où i et j sont les injections canoniques et μ et ν les projections canoniques, donc peut appliquer la proposition qui précède :

$$M/_{M'} \otimes N/_{N'} = \operatorname{Im}(\mu \otimes \nu) \cong {}^{M\otimes N}/_{\operatorname{Ker}(\mu\otimes\nu)} = {}^{M\otimes N}/_{\operatorname{Im}(i\otimes \operatorname{Id}_N)+\operatorname{Im}(\operatorname{Id}_M \otimes j)} = {}^{M\otimes N}/_{M'\otimes N+M\otimes N'}.$$

L'action de l'isomorphisme vient de la factorisation $\operatorname{Im}\varphi \cong M/_{\operatorname{Ker}\varphi}$ où $\varphi : P \longrightarrow R$ est un morphisme linéaire, laquelle envoie $\varphi(x)$ sur la classe de x modulo $\operatorname{Ker}\varphi$.

Corollaire 1.
Soient I, J des idéaux de A. Alors il y a un isomorphisme canonique

$$\begin{cases} A/_I \otimes A/_J & \xrightarrow{\sim} & A/_{I+J} \\ \overline{x}\otimes\overline{y} & \longmapsto & \overline{xy} \end{cases}.$$

Démonstration.
On applique la formule précédente à $\begin{cases} M' := I & \hookrightarrow & A =: M \\ N' := J & \hookrightarrow & A =: N \end{cases}$, en utilisant l'isomorphisme $\varphi : \begin{cases} A\otimes A & \longrightarrow & A \\ a\otimes a' & \longmapsto & aa' \end{cases}$:

$$A/_I \otimes A/_J \cong {}^{A\otimes A}/_{I\otimes A+A\otimes J} \cong {}^{\varphi(A\otimes A)}/_{\varphi(I\otimes A+A\otimes J)} = A/_{IA+AJ} = A/_{I+J}.$$

Un tenseur $\overline{x}\otimes\overline{y}$ est envoyé sur $\overline{x\otimes y}$ par le premier isomorphisme, puis $\overline{x\otimes y}$ est envoyé par φ sur $\overline{\varphi(x\otimes y)} = \overline{xy}$.

Il en résulte immédiatement le calcul du produit tensoriel de modules cycliques :

$$\mathbb{Z}/_{(a)} \otimes \mathbb{Z}/_{(b)} \cong \mathbb{Z}/_{(a)+(b)} = \mathbb{Z}/_{(a\wedge b)}.$$

Corollaire 2 (changement d'anneau de base).
Si M est un A-module quelconque et I un idéal de A, alors il y a un isomorphisme canonique

$$\begin{cases} M\otimes A/_I & \xrightarrow{\sim} & M/_{IM} \\ m\otimes\overline{a} & \longmapsto & \overline{am} \end{cases}.$$

Ainsi, pour passer d'un A-module à un $\left(A/_I\right)$-module, on tensorise par $A/_I$.

Démonstration.
On applique la formule précédente à $\begin{cases} M' = \{0\} & \hookrightarrow & M \\ N' = I & \hookrightarrow & A = N \end{cases}$ à l'aide de l'isomorphisme $\varphi : \begin{cases} M\otimes A & \longrightarrow & M \\ m\otimes a & \longmapsto & am \end{cases}$:

$$M\otimes A/_I \cong M/_{\{0\}} \otimes A/_I \cong {}^{M\otimes A}/_{\{0\}\otimes A+M\otimes I} = {}^{M\otimes A}/_{M\otimes I} \cong {}^{\varphi(M\otimes A)}/_{\varphi(M\otimes I)} = M/_{IM}.$$

Un tenseur pur $m\otimes\overline{a}$ est successivement envoyé sur $\overline{m}\otimes\overline{a}$, $\overline{m\otimes a}$, $\overline{\varphi(m\otimes a)} = \overline{am}$.

On remarque ensuite que le groupe additif $M/_{IM}$ est naturellement muni d'une structure de $\left(A/_I\right)$-module via la loi scalaire

$$\overline{a}\cdot\widetilde{m} = \widetilde{am}$$

puisque pour deux scalaires a et b de même classe $\overline{a} = \overline{b}$, *i. e.* différant d'un élément i de I, on a

$$\widetilde{bm} = \widetilde{(a+i)\,m} = \widetilde{am+im} = \widetilde{am}.$$

Les lois usuelles d'un module se vérifient aisément en passant tout sous le signe ~ ; par exemple :

$$\overline{a}\left(\widetilde{m}+\widetilde{m'}\right) = \overline{a}\left(\widetilde{m+m'}\right) = \widetilde{a\,(m+m')} = \widetilde{am+am'} = \widetilde{am}+\widetilde{am'} = \overline{a}\widetilde{m}+\overline{a}\widetilde{m'}.$$

Ainsi, tensoriser par $A/_I$ permet de passer du A-module M à un $\left(A/_I\right)$-module $M/_{IM}$, ce qui revient à faire un changement d'anneau de base.

Application[20]**.**
La flèche Π *n'est en général pas injective.*

Remarque. Lorque l'idéal I est inclus dans l'*annulateur* du A-module, défini par

$$\operatorname{Ann} M := \{a \in A \;;\; aM = \{0\}\},$$

M devient naturellement un $\left({}^{A}\!\diagup_{I}\right)$-module pour la loi scalaire

$$\overline{a} \cdot m = am$$

puisque pour deux scalaires a et b de même classe $\overline{a} = \overline{b}$, *i. e.* différant d'un élément i de I, on a

$$bm = (a+i)\, m = am + \underbrace{im}_{=0} = am.$$

Si N est un autre A-module, le produit tensoriel $M \otimes N$ peut alors être vu comme un $\left({}^{A}\!\diagup_{I}\right)$-module.

Proposition.
Soient M, N *deux* A*-modules et* I *un idéal de* A *inclus dans* $\operatorname{Ann} M$*. Il y a un isomorphisme canonique de* $\left({}^{A}\!\diagup_{I}\right)$*-modules :*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} M \underset{A}{\otimes} N & \widetilde{\longrightarrow} & M \underset{{}^{A}\!\diagup_{I}}{\otimes} {}^{N}\!\diagup_{IN} \\ m \otimes n & \longmapsto & m \otimes \overline{n} \end{array} \right. .$$

Démonstration.
Puisque I annule A, les modules M et $M \otimes_A N$ peuvent être vus comme un $\left({}^{A}\!\diagup_{I}\right)$-modules. On considère ensuite l'application $\left({}^{A}\!\diagup_{I}\right)$-linéaire

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} M \underset{{}^{A}\!\diagup_{I}}{\otimes} {}^{N}\!\diagup_{IN} & \longrightarrow & M \underset{A}{\otimes} N \\ m \otimes \overline{n} & \longmapsto & m \otimes n \end{array} \right. .$$

Φ est bien définie, car pour deux éléments n et n' de même classe $\overline{n} = \overline{n'}$, *i. e.* différant d'un élément $i\nu$ de IN, on a

$$m \otimes_A n' = m \otimes (n + i\nu) = m \otimes n + m \otimes i\nu = m \otimes n + \underbrace{im}_{=0} \otimes \nu = m \otimes_A n.$$

On considère ensuite l'application $\left({}^{A}\!\diagup_{I}\right)$-linéaire

$$\Psi : \left\{ \begin{array}{ccc} M \underset{A}{\otimes} N & \longrightarrow & M \underset{{}^{A}\!\diagup_{I}}{\otimes} {}^{N}\!\diagup_{IN} \\ m \otimes n & \longmapsto & m \otimes \overline{n} \end{array} \right. ,$$

et il est alors trivial que Φ et Ψ sont réciproques l'une de l'autre.
L'unicité est immédiate.

1.5 Restriction et extension des scalaires

Soient A et B deux anneaux (commutatifs) unitaires, et $\rho : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux (par exemple, B une extension de corps sur A, B un quotient de A par un idéal...).

[20] *cf.* annexe

1.5.1 Restriction des scalaires

Si M est un B-module, alors il peut être considéré comme un A-module via

$$a \cdot m = \rho(a) \cdot m$$

(les vérifications sont immédiates en passant tout dans le ρ, par exemple $a\cdot(a' \cdot m) = \rho(a)\,\rho(a')\cdot m = \rho(aa')\cdot m = aa' \cdot m$).

Dans l'exemple où $\rho : A \hookrightarrow B$ est injectif, par exemple une extension de corps, le A-module ainsi obtenu est « moins riche » que celui de départ, c'est pourquoi on parle plus généralement de *restriction*. Par exemple, on peut considérer $M_n(\mathbb{C})$ comme un $\mathbb{Z}$-module (on « perd » la structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel).

En particulier, B peut être considéré comme A-module, autrement dit comme algèbre sur A.

1.5.2 Extension des scalaires

Si M est un A-module, $M \cong A \otimes_A M$ se comporte comme un A-espace vectoriel, et de même $B \otimes_A M$ peut être vu comme le même espace vectoriel où l'on a remplacé les scalaires de A par ceux de B.

On peut ainsi transformer M en un B-module en le tensorisant par (le A-module) B puis en munissant $B \otimes_A M$ de la loi

$$b_0 \cdot (b \otimes m) = (b_0 b) \otimes m.$$

Pour montrer l'existence de la loi ci-dessus, on considère à b_0 fixé dans B l'application A-linéaire[21]

$$\mu_{b_0} : \left\{ \begin{array}{ccc} B \otimes M & \longrightarrow & B \otimes M \\ b \otimes m & \longmapsto & bb_0 \otimes m \end{array} \right.$$

et on pose

$$b_0 \cdot \xi = \mu_{b_0}(\xi) \quad ;$$

les vérifications d'usage sont immédiates.

Par exemple, si V est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on peut « étendre » ses scalaires dans $\mathbb{C}$ en considérant $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Une autre possibilité est de prendre $\rho : A \twoheadrightarrow {}^{A}\!/_{I}$ la projection canonique modulo un idéal I. On retrouve le fait bien connu que ${}^{A}\!/_{I}$ est un A-module pour la loi scalaire

$$a \cdot \overline{a'} = \rho(a)\,\overline{a'} = \overline{a}\overline{a'} = \overline{aa'},$$

et que ${}^{A}\!/_{I} \otimes N \cong {}^{N}\!/_{IN}$ est un $\left({}^{A}\!/_{I}\right)$-module (*cf.* calculs de quotients).

1.5.3 Propriétés de l'extension

Pour alléger les notations, le B-module $B \otimes_A M$ sera noté ${}^{B}M$.

Si u est un endomorphisme de M, on notera de même ${}^{B}u$ l'endomorphisme $\mathrm{Id}_B \otimes u$ de ${}^{B}M$.

Proposition.

1. *Si M est A-libre de base (e_i), alors ${}^{B}M$ est B-libre de base $(1 \otimes e_i)$.*
2. *Si M est en outre de type fini, étant donné un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(M)$, on peut écrire*

$$\operatorname*{Mat}_{(1\otimes e_i)}\left({}^{B}u\right) = \rho\left(\operatorname*{Mat}_{(e_i)} u\right).$$

Démonstration.

[21] μ comme « **m**ultiplication »

1. L'hypothèse permet d'écrire $M = \bigoplus Ae_i$. Puisque $B \otimes_A Ae_i = B(1 \otimes e_i)$, on a un isomorphisme canonique
$$^B M = B \otimes \bigoplus Ae_i \cong \bigoplus (B \otimes_A Ae_i) = \bigoplus B(1 \otimes e_i)$$
mettant en correspondance $b \otimes \sum a_i e_i$ et $\sum_{\text{directe}} (a_i \cdot b)(1 \otimes e_i)$. La proposition découle de cette correspondance.
2. Notons $(a_{i,j}) := \operatorname{Mat}_{(e_i)} u$. Alors le coefficient (p,q) de $\operatorname{Mat}_{(1 \otimes e_i)} \left({}^B u\right)$ se lit en récupérant la coordonnée en $(1 \otimes e_p)$ de
$$^B u(1 \otimes e_q) = 1 \otimes u(e_q) = 1 \otimes \sum_i a_{i,q} e_i = \sum_i (1 \otimes a_{i,q} e_i) = \sum_i (a_{i,q} \otimes e_i).$$

Ainsi, lorsque ρ est injectif, on pourra identifier
$$\operatorname*{Mat}_{(1 \otimes e_i)} \left({}^B u\right) = \operatorname*{Mat}_{(e_i)} u.$$
Par exemple, un endomorphisme d'un espace vectoriel réel ne verra pas sa matrice changer si l'on étend les scalaires aux complexes. En particulier, sa trace sera inchangée. On montre à la fin de cette section que cela tient encore dans le cas général.

Il est légitime de se demander si, en étendant puis en restreignant les scalaires, on retombe sur nos pieds. En termes formels, la loi scalaire induite sur ${}^B M$ par restriction des scalaires est-elle la loi scalaire usuelle sur le A-module $B \otimes_A M$?

La réponse est oui. Pour montrer cela, notons systématiquement $\cdot$ les lois usuelles et $*$ les lois induites par restriction des scalaires. En souvenant que B est un A-module pour la loi $a \cdot b = a * b$, on a alors
$$a * (b \otimes m) = \rho(a) \cdot (b \otimes m) = (\rho(a)\, b) \otimes m = (a * b) \otimes m = (a \cdot b) \otimes m = a \cdot (b \otimes m).$$
Il n'y aura donc aucune ambiguïté à parler de l'application A-linéaire
$$\rho_M : \left\{ \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & {}^B M \\ m & \longmapsto & 1_B \otimes m \end{array} \right. .$$
Observer que, pour parler de ${}^B M = B \otimes_A M$, il faut parler du A-module B, ce qui se fait par le biais de ρ, d'où une dépendance de ρ_M en ρ. Plus précisément, ρ_M est ρ-linéaire, au sens où
$$\rho_M(am) = \rho(a)\, \rho_M(m)$$
(faire $b = 1$ dans le calcul précédent).

Proposition (surjectivité et injectivité de ρ_M).
1. *Si ρ est surjective, alors ρ_M est aussi surjective.*
2. *Si ρ est injective, alors ρ_M devient injective sous l'hypothèse[22] « M libre ».*

Démonstration.
1. Soit $b \in B$ que l'on écrit $b = \rho(a)$ par surjectivité de ρ. Pour un $m \in M$, on a
$$b \otimes m = \rho(a) \otimes m = (a \cdot 1_B) \otimes m = a \cdot (1_B \otimes m) = 1 \otimes am = \rho_M(am).$$
2. Soit (e_i) une A-base de M et m dans M. Par implications :
$$\begin{aligned} \rho_M(m) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad 1 \otimes m = 0 \Longrightarrow 1 \otimes \sum_i a_i e_i = 0 \Longrightarrow \sum_i \rho(a_i)(1 \otimes e_i) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \forall i,\ \rho(a_i) = 0 \text{ par liberté de la } B\text{-base } (1 \otimes e_i) \\ &\Longrightarrow \quad \forall i,\ a_i = 0 \text{ par injectivité de } \rho \\ &\Longrightarrow \quad m = 0. \end{aligned}$$

[22] toujours vérifiée pour un espace vectoriel

Remarque. Si ρ est injective, sans l'hypothèse « M libre », ρ_M n'est pas injective en général. Considérer par exemple le $\mathbb{Z}$-module $M := {}^{\mathbb{Z}}\!\big/_{n\mathbb{Z}}$ où l'on étend les scalaires par $\mathbb{Z} \overset{\rho}{\hookrightarrow} \mathbb{Q}$:

$$^{\mathbb{Q}}M = \mathbb{Q} \otimes {}^{\mathbb{Z}}\!\big/_{n\mathbb{Z}} = \{0\}.$$

En d'autres termes : même si l'on étend l'anneau des scalaires, il se peut très bien que ^BM n'étende pas M à proprement parler.

Remarque au passage. Noter dans le contre-exemple ci-dessus que

tensoriser par $\mathbb{Q}$ tue les phénomènes de torsion.

Par exemple, pour les modules libres de type fini sur un anneau principal, tensoriser par $\mathbb{Q}$ tue les composantes en ${}^{\mathbb{Z}}\!\big/_{a\mathbb{Z}}$ et récupère la partie $\mathbb{Z}^n$.

Bien qu'étendre les scalaires puisse modifier de manière notoire la structure d'un A-module M, lorsque l'on regarde les applications A-linéaires de M dans un B-module N quelconque, *i. e.* les $f : M \longrightarrow N$ telles que

$$f(ax+y) = \rho(a) f(x) + f(y),$$

il n'y aucune différence à remplacer M par ^BM, au sens suivant.

Proposition (comportement des applications linéaires par extension des scalaires à la source).

1. *Soit N un B-module quelconque. Il y a un isomorphisme canoniques de B-modules*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}_A(M,N) & \widetilde{\longrightarrow} & \mathcal{L}_B\left(^BM, N\right) \\ f & \longmapsto & b \otimes m \mapsto bf(m) \\ g(1 \otimes \cdot) & \longleftarrow & g \end{array} \right. .$$

2. *On suppose que* $\left\{ \begin{array}{l} M = \bigoplus Ae_i \\ N = \bigoplus Bf_j \end{array} \right.$ *sont libres et de type fini. Pour tout $u \leftrightarrow v$ élément de $L_A(M,N) \cong L_B\left(^BM, N\right)$, on a l'égalité matricielle*

$$\operatorname*{Mat}_{(1\otimes e_i),(f_j)} v = \rho\left(\operatorname*{Mat}_{(e_i),(f_j)} u \right).$$

Démonstration.

1. On vérifie que les applications B-linéaires données

$$\begin{array}{ccc} \Phi & : & \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}_A(M,N) & \longrightarrow & \mathcal{L}_B\left(^BM,N\right) \\ f & \longmapsto & [b \otimes m \mapsto bf(m)] \end{array} \right. \\ \Psi & : & \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}_B\left(^BM,N\right) & \longrightarrow & \mathcal{L}_A(M,N) \\ g & \longmapsto & g(1 \otimes \cdot) \end{array} \right. \end{array}$$

sont réciproques l'une de d'autre. D'une part, on a

$$\begin{gathered} [(\Psi \circ \Phi)(f)](m) = \Psi(\Phi(f))(m) = \Phi(f)(1 \otimes m) = 1f(m) = f(m) \\ \text{d'où } (\Psi \circ \Phi)(f) = f \text{ en faisant varier } m, \\ \text{donc } \Psi \circ \Phi = \operatorname*{Id}_{\mathcal{L}_A(M,N)} \text{ en faisant varier } f, \end{gathered}$$

d'autre part, on a

$$\begin{gathered} [(\Phi \circ \Psi)(g)](b \otimes m) = \Phi(\Psi(g))(b \otimes m) = b\Psi(g)(m) = bg(1 \otimes m) = g(b \otimes m), \\ \text{d'où } (\Phi \circ \Psi)(g) = g \text{ en faisant varier } b \otimes m, \\ \Phi \circ \Psi = \operatorname*{Id}_{\mathcal{L}_B(^BM,N)} \text{ en faisant varier } g. \end{gathered}$$

2. Le coefficient d'indice (p,q) dans $\mathrm{Mat}_{(1\otimes e_i),(f_j)}\, v$ est la coordonnée en f_p de $v\,(1\otimes e_q) = \rho\,(u\,(e_q))$, *i. e.* le coefficient d'indice (p,q) dans $\rho\left(\mathrm{Mat}_{(e_i),(f_j)}\, u\right)$, *CQFD.*

Complément.

Montrons que la trace est invariante par extension des scalaires. Pour alléger les notations, les Kronecker et contractions seront notés

$$\left\{\begin{array}{c}(\theta,\kappa) := \left(\theta_M^M, \kappa_M\right) \\ \left({}^B\theta, {}^B\kappa\right) := \left(\theta_{{}^BM}^{{}^BM}, \kappa_{{}^BM}\right)\end{array}\right. .$$

Proposition (invariance de la trace par extension des scalaires).

Soit $f \in \mathcal{L}(M)$ dans l'image du Kronecker θ. Sous les conditions d'existence $\left\{\begin{array}{c}\mathrm{Ker}\,\theta \subset \mathrm{Ker}\,\kappa \\ \mathrm{Ker}\left({}^B\theta\right) \subset \mathrm{Ker}\left({}^B\kappa\right)\end{array}\right.$*, les traces de f et ${}^Bf$ sont alors bien définies et égales :*

$$\mathrm{tr}\left({}^Bf\right) = \rho\,(\mathrm{tr}\, f)\,.$$

Démonstration.

Pour montrer que ${}^Bf$ est bien dans l'image de ${}^B\theta$, il suffit de montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M^*\otimes M & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{L}(M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}^BM^* \otimes {}^BM & \xrightarrow{{}^B\theta} & \mathcal{L}\left(M^B\right)\end{array}$$

où les flèches verticales sont induites par $\rho_M = \cdot\otimes 1$. On regarde ce qui se passe sur un tenseur pur $\mu(\cdot)\otimes m$, en représentant les éléments de $\mathcal{L}\left(M^B\right)$ et ${}^BM^*$ par les images des $\cdot\otimes 1$ (ils sont B-linéaires donc entièrement déterminés par ces derniers) :

$$\begin{array}{ccc} \mu(\cdot)\otimes m & \longmapsto & \mu(\cdot)\, m \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\mu(\cdot)]\otimes[m\otimes 1] & \longmapsto & [\mu(\cdot)]\,(m\otimes 1)\end{array}, \textit{ CQFD.}$$

Calculons ensuite les traces. Si f est l'image par θ de $\sum \mu_i(\cdot)\otimes m_i$, l'endomorphisme ${}^Bf$ est image par ${}^B\theta$ de $\sum[\mu_i(\cdot)]\otimes[m_i\otimes 1]$. On en déduit

$$\mathrm{tr}\left({}^Bf\right) = \sum \mu_i\,(m_i)\otimes 1 = \left[\sum \mu_i\,(m_i)\right]\otimes 1 = (\mathrm{tr}\, f)\otimes 1 = \rho\,(\mathrm{tr}\, f)\,, \textit{ CQFD.}$$

2 Algèbre tensorielle, symétrique et extérieure d'un A-module

Soit A un anneau commutatif unitaire. Tous les modules, algèbres et applications multilinéaires considérés seront pris sur l'anneau A.

Notre but est de prolonger la structure d'un module en une algèbre. La loi de multiplication sera naturellement donnée par le produit tensoriel.

Selon les propriétés que l'on souhaite imposer à l'algèbre d'arrivée, on sera amené à construire l'algèbre *tensorielle* d'un module – pas de propriétés spécifiques –, son algèbre *symétrique* – si l'on souhaite la commutativité – et son algèbre *extérieure* – en vue de l'alternance et de ses nombreux aspects (dont le déterminant).

Nous aurons besoin avant tout d'introduire deux structures d'algèbres que l'on peut mettre sur le module formé d'un produit tensoriel d'algèbres. La seconde vient tordre la première très naturelle (qui raisonne coordonnée par coordonnée) à l'aide de considérations de signes en étroit lien avec l'alternance.

2.1 Produit tensoriel d'algèbres

Soient B et C des algèbres (pas forcément commutatives). On dispose donc de morphismes d'algèbres

$$\rho_B : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ a & \longmapsto & a \cdot 1_B \end{array} \right. \text{ et } \rho_C : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C \\ a & \longmapsto & a \cdot 1_C \end{array} \right. .$$

Attention, contrairement aux algèbres sur des corps, il n'y a pas forcément injectivité en général (considérer la $\mathbb{Z}$-algèbre ${}^{\mathbb{Z}}\!/_{2\mathbb{Z}}$).

2.1.1 Produit tensoriel d'algèbres

Proposition.
Il existe une unique structure d'algèbre sur $B \otimes C$ prolongeant les lois du module $B \otimes C$ et telle que

$$\begin{pmatrix} b \\ \otimes \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b' \\ \otimes \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \times b' \\ \otimes \\ c \times c' \end{pmatrix}.$$

Munie de ces lois, $B \otimes C$ est appelée algèbre produit tensoriel *de B par C.*
On a deux morphismes d'algèbres

$$\left\{ \begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & B \otimes C \\ b & \longmapsto & b \otimes 1_C \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & B \otimes C \\ c & \longmapsto & 1_B \otimes c \end{array} \right. ,$$

faisant que B et C commutent dans $B \otimes C$, au sens où

$$(b \otimes 1)(1 \otimes c) = b \otimes c = (1 \otimes c)(b \otimes 1).$$

Démonstration.
On considère l'application bilinéaire

$$\varphi_{(b_0,c_0)} : \left\{ \begin{array}{ccc} B \times C & \longrightarrow & B \otimes C \\ (b,c) & \longmapsto & \begin{pmatrix} b_0 b \\ \otimes \\ c_0 c \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

qui se factorise en une unique application linéaire

$$\overline{\varphi_{(b_0,c_0)}} : \left\{ \begin{array}{ccc} B \otimes C & \longrightarrow & B \otimes C \\ b \otimes c & \longmapsto & \begin{pmatrix} b_0 b \\ \otimes \\ c_0 c \end{pmatrix} \end{array} \right. .$$

On considère ensuite l'application bilinéaire

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} B \times C & \longrightarrow & \mathcal{L}(B \otimes C) \\ (b,c) & \longmapsto & \overline{\varphi_{(b,c)}} \end{array} \right.$$

qui se factorise en une unique application linéaire

$$\overline{\Phi} : \left\{ \begin{array}{ccc} B \otimes C & \longrightarrow & \mathcal{L}(B \otimes C) \\ b \otimes c & \longmapsto & \overline{\varphi_{(b,c)}} \end{array} \right. .$$

On définit alors une loi multiplicative sur $B \otimes C$ par

$$\xi \times \eta := \left[\overline{\Phi}(\xi)\right](\eta)$$

(en particulier,
$$\begin{pmatrix} b \\ \otimes \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b' \\ \otimes \\ c' \end{pmatrix} = \left[\overline{\Phi}\left(b \otimes c\right)\right]\left(b' \otimes c'\right) = \overline{\varphi}_{(b,c)}\left(b' \otimes c'\right) = bb' \otimes cc'$$
comme voulu).

La distributivité à gauche de $\times$ vient de la linéarité de Φ, la distributivité à droite de la linéarité de $\overline{\varphi_\xi}$.

Quand à l'associativité, puisque
$$\begin{aligned} \xi \times (\eta \times \theta) &= \left[\overline{\Phi}(\xi)\right](\eta \times \theta) = \left[\overline{\Phi}(\xi)\right]\left(\left[\overline{\Phi}(\eta)\right](\theta)\right) = \left[\overline{\Phi}(\xi) \circ \overline{\Phi}(\eta)\right](\theta) \\ \text{et } (\xi \times \eta) \times \theta &= \left[\overline{\Phi}(\xi \times \eta)\right](\theta) = \left[\overline{\Phi}\left(\left[\overline{\Phi}(\xi)\right](\eta)\right)\right](\theta), \end{aligned}$$
il revient à montrer l'identité
$$\overline{\Phi}(\xi) \circ \overline{\Phi}(\eta) = \overline{\Phi}\left(\left[\overline{\Phi}(\xi)\right](\eta)\right).$$
Or, $\times$ est clairement associative sur les tenseurs purs, d'où (par linéarité des $\overline{\Phi}(\xi)$)
$$\overline{\Phi}(b \otimes c) \circ \overline{\Phi}(b' \otimes c') = \overline{\Phi}\left(\left[\overline{\Phi}(b \otimes c)\right](b' \otimes c')\right),$$
puis (par linéarité de $\overline{\Phi}$ et de $\overline{\Phi}(b \otimes c)$)
$$\overline{\Phi}(b \otimes c) \circ \overline{\Phi}(\eta) = \overline{\Phi}\left(\left[\overline{\Phi}(b \otimes c)\right](\eta)\right),$$
donc (par linéarité de $\overline{\Phi}$)
$$\overline{\Phi}(\xi) \circ \overline{\Phi}(\eta) = \overline{\Phi}\left(\left[\overline{\Phi}(\xi)\right](\eta)\right),$$
comme souhaité.

Enfin, la linéarité de $\overline{\Phi}$ et de $\overline{\Phi}(\xi)$ donne la dernière propriété :
$$a \cdot (\xi \times \eta) = a \cdot \left[\overline{\Phi}(\xi)\right](\eta) = \left\{ \begin{array}{c} \left[\overline{\Phi}(a\xi)\right](\eta) = (a \cdot \xi) \times \eta \\ \left[\overline{\Phi}(\xi)\right](a\eta) = \xi \times (a \cdot \eta) \end{array} \right.,$$

Ainsi $B \otimes C$ est bien une algèbre pour les lois $+, \cdot, \times$. Son unicité vis-à-vis de la propriété
$$\begin{pmatrix} b \\ \otimes \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b' \\ \otimes \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \times b' \\ \otimes \\ c \times c' \end{pmatrix}$$
vient de ce que la loi $\times$ est (par distributivité) entièrement déterminée par ses valeurs sur les tenseurs purs.

Les autres propriétés de la proposition sont alors immédiates.

Remarque. En d'autres termes, il y a une unique structure d'algèbre sur $B \otimes C$ telle que la projection canonique $(b, c) \mapsto b \otimes c$ soit *multiplicative.*

On observera à ce propos que la donnée d'une application bilinéaire multiplicative sur l'algèbre produit $B \times C$ est la même chose que la donnée de deux morphismes d'algèbres, l'un sur B l'autre sur C, qui commutent à l'arrivée. Le lecteur vérifiera en effet que l'application suivante est bijective :
$$\left\{ \begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} f \in \operatorname{Bil}(B \times C, D) \\ \text{multiplicative} \end{array} \right\} & \widetilde{\longrightarrow} & \left\{ \begin{array}{c} (\beta, \gamma) \in \operatorname{Hom}(B, D) \times \operatorname{Hom}(C, D) \ ; \\ \forall (b, c) \in B \times C,\ \beta(b)\gamma(c) = \gamma(c)\beta(b) \end{array} \right\} \\ f & \longmapsto & (f(\cdot, 1), f(1, \cdot)) \\ (b, c) \mapsto \beta(b)\gamma(c) & \longleftarrow & (\beta, \gamma) \end{array} \right..$$

Lorsque l'on cherche à factoriser les applications bilinéaires multiplicatives sur $B \times C$ vues à travers la bijection ci-dessus, on tombe sur la propriété universelle suivante.

Propriété universelle du produit tensoriel d'algèbres.
Soient $\left\{ \begin{array}{l} \varphi_B : B \longrightarrow D \\ \varphi_C : C \longrightarrow D \end{array} \right.$ *deux morphismes d'algèbres qui commutent à l'arrivée,* i. e. *vérifiant pour tout* $b \in B$ et $c \in C$
$$\varphi_B(b) \times \varphi_C(c) = \varphi_C(c) \times \varphi_B(b).$$

Alors il existe un unique morphisme d'algèbres $\varphi : B \otimes C \longrightarrow D$ prolongeant φ_B et φ_C, au sens où

$$\begin{cases} \varphi(b) = \varphi(b \otimes 1) = \varphi_B(b) \\ \varphi(c) = \varphi(1 \otimes c) = \varphi_C(c) \end{cases},$$

et ce morphisme agit sur les tenseurs purs par multiplication des composantes tensorielles après action de φ_B et φ_C :

$$\varphi(b \otimes c) = \varphi_B(b)\,\varphi_C(c).$$

Démonstration.

Concernant l'unicité, si φ est un morphisme prolongeant φ_B et φ_C, on doit avoir

$$\varphi(b \otimes c) = \varphi((b \otimes 1)(1 \otimes c)) = \varphi(b \otimes 1)\,\varphi(1 \otimes c) = \varphi_B(b)\,\varphi_C(c),$$

d'où l'action nécessaire de φ sur les tenseurs purs – action qui est clairement suffisante pour prolonger φ_B et φ_C.

On considère l'application bilinéaire $\begin{cases} B \times C & \longrightarrow & D \\ (b, c) & \longmapsto & \varphi_B(b)\,\varphi_C(c) \end{cases}$ que l'on factorise en une application linéaire

$$\varphi : \begin{cases} B \otimes C & \longrightarrow & D \\ b \otimes c & \longmapsto & \varphi_B(b)\,\varphi_C(c) \end{cases}.$$

On déjà trivialement que $\varphi(b \otimes c) = \varphi_B(b)\,\varphi_C(c)$. De plus, on a[23]

$$\begin{aligned} \varphi((b \otimes c) \times (b' \otimes c')) &= \varphi(bb' \otimes cc') = \varphi_B(bb')\,\varphi_C(cc') = \varphi_B(b)\,\underline{\varphi_B(b')\,\varphi_C(c)}\varphi_C(c') \\ &= \varphi_B(b)\,\underline{\varphi_C(c)\,\varphi_B(b')}\varphi_C(c') = \varphi((b \otimes c))\,\varphi((b' \otimes c')), \end{aligned}$$

et, comme φ est déjà linéaire, φ est un morphisme d'algèbres.

L'unicité découle de celle dans la propriété universelle du produit tensoriel de modules.

Remarques. En d'autres termes, toute application bilinéaire multiplicative $f : B \times C \longrightarrow D$ se factorise d'une unique manière sous la forme $f = \overline{f} \circ \pi$ où $\overline{f} : B \otimes C \longrightarrow D$ est un morphisme d'algèbres. On retrouve la formulation plus « classique » de la propriété universelle.

On aurait pu reformuler le fait que φ prolonge φ_B et φ_C en disant que φ fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} B & \overset{\mathrm{Id} \otimes 1}{\longrightarrow} & B \otimes C & \overset{1 \otimes \mathrm{Id}}{\longleftarrow} & C \\ & \searrow^{\varphi_B} & \downarrow \varphi & \swarrow_{\varphi_C} & \\ & & D & & \end{array}.$$

On se souvient que tensoriser un module par une algèbre B permet d'étendre les scalaires du module. Ce principe reste valable pour étendre les scalaires d'une algèbre, en particulier des algèbres polynomiales.

Extension des scalaires d'une algèbre de polynômes.

Pour toute A-algèbre B, on a un isomorphisme canonique d'algèbres

$$\begin{cases} B \otimes_A A[X] & \widetilde{\longrightarrow} & B[X] \\ b \otimes X^i & \longmapsto & bX^i \\ 1 \otimes X^i & \longleftarrow & X^i \end{cases}.$$

Démonstration.

On dispose d'une injection canonique $B \hookrightarrow B[X]$. Par ailleurs, la flèche $A \longrightarrow B$ définissant l'algèbre B donne lieu à une flèche naturelle $A[X] \longrightarrow B[X]$. Les deux flèches qui précèdent sont des morphismes d'algèbres qui commutent à l'arrivée, donc la propriété universelle du produit tensoriel d'algèbres s'applique. Il est immédiat de vérifier que la réciproque proposée en est bien une.

[23] les quantités soulignées sont égales d'après l'hypothèse de commutativité sur B et C

Corollaire (produit tensoriel d'algèbres de polynômes).
On a un isomorphisme canonique d'algèbres

$$\left\{ \begin{array}{ccc} A[X] \otimes A[Y] & \xrightarrow{\sim} & A[X,Y] \\ X^p \otimes Y^q & \longmapsto & X^p Y^q \end{array} \right. .$$

Démonstration.
On applique ce qui précède à $B := A[Y]$. Le tenseur $Y^p \otimes X^q$ sera alors transformé en $Y^p X^q$, ce qui conclut en échangeant les lettres X et Y.

Compléments.
On peut sans aucune difficulté étendre ce qui précède au cas d'un nombre quelconque (fini) d'algèbres $B_1, ..., B_n$. Le produit sur $B_1 \otimes \cdots \otimes B_n$ agira sur les tenseurs purs composante par composante et les B_i commuteront deux à deux dans $\bigotimes B_i$.

L'associativité de $\otimes$ et la distributivité de $\otimes$ sur $\oplus$ s'écriront exactement de la même manière que pour les modules[24], sauf que l'on aura des isomorphismes (canonique) d'**algèbres** et non juste de modules[25]. Par exemple, la dernière propriété se généralise aisément par récurrence en invoquant l'associativité :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \underbrace{A[X] \otimes A[X] \otimes \cdots \otimes A[X]}_{n \text{ fois}} & \xrightarrow{\sim} & A[X_1, ..., X_n] \\ X_1^{i_1} \otimes \cdots \otimes X_n^{i_n} & \longmapsto & X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} \end{array} \right. .$$

Concernant la propriété universelle, des morphismes d'algèbres – un sur chaque B_i – commutant deux à deux à l'arrivée[26] se prolongeront de façon unique sur $\bigotimes B_i$ en agissant sur un tenseur pur par multiplication des composantes tensorielles après action de chacun des morphismes.

2.1.2 Produit tensoriel d'algèbres graduées

Définition.
Une algèbre graduée B est une algèbre B munie d'une suite de sous-modules $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$B = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} B_n \text{ et } B_n B_m \subset B_{n+m}$$

(B_0 est donc un sous-anneau de B que prendrons toujours égal à A).

Les B_n sont appelées composantes homogènes *de degré n.*

On dit qu'un élément b de B est homogène *(de degré n) s'il appartient à une composante homogène B_n de B.*

Le degré *d'un $b \in B_n$ est noté par*

$$\deg b := \partial(b) := \partial b := n$$

et vérifie la propriété

$$\partial(bb') = \partial(b) + \partial(b').$$

Par exemple, pour $B = A[X_i]$, la n-ième composante homogène B_n est formée des polynômes homogènes de degré exactement n.

[24] *cf.* première section

[25] Par exemple, pour vérifier que l'isomorphismes de modules

$$\left(\bigoplus B_i\right) \otimes \left(\bigoplus C_j\right) \cong \bigoplus (B_i \otimes C_j)$$

respecte les produits des algèbres mises en jeu, il suffit (par linéairité) de le faire sur les éléments de la forme $b_i \otimes c_j$, mais c'est alors immédiat.

[26] donc de même algèbre but

Proposition.

Soient $B = \bigoplus B_n$ *et* $C = \bigoplus C_n$ *des algèbres graduées. Alors* $B \otimes C$ *est graduée de composante homogènes de degré* n

$$[B \otimes C]_n = \bigoplus_{p+q=n} B_p \otimes C_q,$$

et pour tous éléments homogènes b, c, *on a*

$$\partial\,(b \otimes c) = \partial b + \partial c.$$

Démonstration.

On a

$$B \otimes C = \left(\bigoplus B_n\right) \otimes \left(\bigoplus C_m\right) \cong \bigoplus_{n,m} B_n \otimes C_m = \bigoplus_{n \geq 0} \bigoplus_{p+q=n} B_p \otimes C_q,$$

et l'isomorphisme devient une égalité en considérant des sommes directes internes.

De plus, pour $\begin{cases} x \in \bigoplus_{p+q=n} B_p \otimes C_q \\ y \in \bigoplus_{p+q=m} B_p \otimes C_q \end{cases}$, *i. e.* $\begin{cases} x = \sum_{i+j=n} b_i \otimes c_j \\ y = \sum_{i'+j'=m} b'_{i'} \otimes c'_{j'} \end{cases}$, on a

$$\begin{aligned} xy &= \left(\sum_{i+j=n} b_i \otimes c_j\right)\left(\sum_{i'+j'=m} b'_{i'} \otimes c'_{j'}\right) = \sum_{\substack{i+j=n \\ i'+j'=m}} \underbrace{b_i b'_{i'}}_{\in B_{i+i'}} \otimes \underbrace{c_j c'_{j'}}_{\in C_{j+j'}} \\ &\in \sum_{\substack{i+j=n \\ i'+j'=m}} B_{i+i'} \otimes C_{j+j'} \subset \sum_{p+q=m+n} B_p \otimes C_q = \bigoplus_{p+q=m+n} B_p \otimes C_q. \end{aligned}$$

Remarque. Nous laissons au lecteur le soin de montrer qu'un produit tensoriel de plusieurs algèbres graduées $B^i = \bigoplus B_n^i$ est gradué par

$$\left[B^1 \otimes \cdots \otimes B^p\right]_n = \bigoplus_{n_1+\cdots+n_p=n} B^1_{n_1} \otimes \cdots \otimes B^p_{n_p}$$

et que le degré d'un élément homogène s'exprime par

$$\partial\,(b_1 \otimes \cdots \otimes b_n) = \partial b_1 + \cdots + \partial b_n.$$

Nous allons maitenant tordre la loi $\times$ de l'algèbre produit tensoriel, qui est graduée par ce qui précède, à l'aide des degré des éléments multipliés, ce afin de la rendre anticommutative.

Proposition – Définition.

Il existe sur $B \otimes C$ *une unique structure d'algèbre prolongeant les lois du module* $B \otimes C$ *et telle que, pour des éléments homogènes* b, b', c, c', *on ait*

$$\begin{pmatrix} b \\ \otimes \\ c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b' \\ \otimes \\ c' \end{pmatrix} = (-1)^{\partial c \partial b'} \begin{pmatrix} bb' \\ \otimes \\ cc' \end{pmatrix}.$$

On l'appelle produit tensoriel gradué[27] *des algèbres* B *et* C, *et on le note*

$$B \overset{g}{\otimes} C \text{ ou } B \otimes^g C.$$

Démonstration.

[27] Les anglicistes parleront de *super-produit*.

On définit la loi (presque) comme la loi multiplicative d'une algèbre tensorielle. Le seul point non trivial à vérifier sera son associativité.

A b_0, c_0 homogènes fixés, on considère l'application bilinéaire

$$\varphi_{(b_0,c_0)} : \left\{ \begin{array}{ccc} B \times C & \longrightarrow & B \otimes C \\ \left(\left(\sum_i^{\text{finie}} b_i\right), c\right) & \longmapsto & \sum_i^{\text{finie}} (-1)^{\partial b_i \partial c_0} (b_i b_0 \otimes c c_0) \end{array} \right.$$

qui se factorise en une unique application linéaire

$$\overline{\varphi_{(b_0,c_0)}} : \left\{ \begin{array}{ccc} B \otimes C & \longrightarrow & B \otimes C \\ \left(\sum_i^{\text{finie}} b_i\right) \otimes c_j & \longmapsto & \sum_i^{\text{finie}} (-1)^{\partial b_i \partial c_0} (b_i b_0 \otimes c c_0) \end{array} \right. .$$

On considère ensuite l'application bilinéaire

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} B \times C & \longrightarrow & \mathcal{L}(B \otimes C) \\ (b, c) & \longmapsto & \overline{\varphi_{(b,c)}} \end{array} \right.$$

qui donne une unique application linéaire

$$\overline{\Phi} : \left\{ \begin{array}{ccc} B \otimes C & \longrightarrow & \mathcal{L}(B \otimes C) \\ b \otimes c & \longmapsto & \overline{\varphi_{(b,c)}} \end{array} \right. .$$

Puis on définit alors une multiplication sur $B \otimes C$ par

$$\xi \times \eta := \left[\overline{\Phi}(\xi)\right](\eta)$$

(en particulier,

$$\left(\begin{array}{c} b \\ \otimes \\ c \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} b' \\ \otimes \\ c' \end{array} \right) = \left[\overline{\Phi}(b \otimes c)\right](b' \otimes c') = \overline{\varphi}_{(b,c)}(b' \otimes c') = (-1)^{\partial c \partial b'} (bb' \otimes cc')$$

comme voulu).

La distributivité à gauche de $\times$ vient de la linéarité de Φ, la distributivité à droite de la linéarité de $\overline{\varphi_\xi}$.

Quand à l'associativité, comme pour la loi multiplicative d'une algèbre tensorielle, il revient à montrer l'identité

$$\overline{\Phi}(\xi) \circ \overline{\Phi}(\eta) = \overline{\Phi}\left(\left[\overline{\Phi}(\xi)\right](\eta)\right).$$

Or, $\times$ est associative sur les éléments homogènes de base : en effet, on a

$$\begin{array}{rcl} ((b \otimes c) \times (b' \otimes c')) \times (b'' \otimes c'') & = & (-1)^{\partial c \partial b'} (bb' \otimes cc') \times (b'' \otimes c'') \\ & = & (-1)^{\partial c \partial b'} (-1)^{\partial (cc') \partial b''} (bb'b'' \otimes cc'c'') \\ & = & (-1)^{\partial c \partial b' + \partial c \partial b'' + \partial c' \partial b''} (bb'b'' \otimes cc'c'') \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} (b \otimes c) \times ((b' \otimes c') \times (b'' \otimes c'')) & = & (b \otimes c) \times (-1)^{\partial c' \partial b''} (b'b'' \otimes c'c'') \\ & = & (-1)^{\partial c' \partial b''} (-1)^{\partial c \partial (b'b'')} (bb'b'' \otimes cc'c'') \\ & = & (-1)^{\partial c' \partial b'' + \partial c \partial b' + \partial c \partial b''} (bb'b'' \otimes cc'c''), \end{array}$$

qui sont bien des quantités égales en regardant les puissances du -1 :

$$\partial c \partial b' + \underline{\partial c \partial b''} + \underbrace{\partial c' \partial b''} = \underbrace{\partial c' \partial b''} + \partial c \partial b' + \underline{\partial c \partial b''}.$$

On en déduit alors

$$\overline{\Phi}(\xi) \circ \overline{\Phi}(\eta) = \overline{\Phi}\left(\left[\overline{\Phi}(\xi)\right](\eta)\right)$$

comme pour la loi multiplicative d'une algèbre tensorielle, d'où l'associativité de $\times$.

Enfin, la linéarité de $\overline{\Phi}$ et de $\overline{\Phi}(\xi)$ donne la dernière propriété :

$$a \cdot (\xi \times \eta) = a \cdot \left[\overline{\Phi}(\xi)\right](\eta) = \left\{ \begin{array}{c} \left[\overline{\Phi}(a\xi)\right](\eta) = (a \cdot \xi) \times \eta \\ \left[\overline{\Phi}(\xi)\right](a\eta) = \xi \times (a \cdot \eta) \end{array} \right. .$$

Ainsi $B\otimes C$ est bien une algèbre pour les lois $+, \cdot, \times$. Son unicité vis-à-vis de la propriété

$$\begin{pmatrix} b \\ \otimes \\ c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b' \\ \otimes \\ c' \end{pmatrix} = (-1)^{\partial c \partial b'}\begin{pmatrix} bb' \\ \otimes \\ cc' \end{pmatrix}.$$

vient de ce que la loi $\times$ est (par distributivité) entièrement déterminée par ses valeurs sur les tenseurs purs.

Propriété.
Si B et C sont des algèbres graduées, alors $B\otimes^g C$ est anticommutative sur les plongés de B et C, dans le sens où

$$c\times b = (-1)^{\partial b \partial c}\, b\times c.$$

Démonstration.

$$c\times b = (1\otimes c)(b\otimes 1) = (-1)^{\partial b\partial c}(b\otimes 1)(1\otimes c) = (-1)^{\partial b \partial c}\, b\times c.$$

Remarque. Une application f bilinéaire sur $B\times C$ vérifiant pour tous éléments homogènes b, b', c, c'

$$f\left(\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b' \\ c' \end{pmatrix}\right) = (-1)^{\partial c\partial b'} f\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} f\begin{pmatrix} b' \\ c' \end{pmatrix}$$

sera dite *antimultiplicative*. La structure de l'algèbre $B\otimes^g C$ est ainsi la seule qui rende la projection canonique $(b,c)\mapsto b\otimes c$ antimultiplicative.

Comme pour le produit tensoriel d'algèbres $B\otimes C$, on observera que les applications bilinéaires antimultiplicatives sur l'algèbre produit $B\times C$ sont en bijection avec les couples de morphismes d'algèbres, l'un sur B l'autre sur C, qui anticommutent à l'arrivée : considérer la bijection[28]

$$\left\{\begin{array}{ccc} \left\{\begin{array}{c} f\in \operatorname{Bil}(B\times C, D) \\ \text{antimultiplicative}\end{array}\right\} & \stackrel{\sim}{\longrightarrow} & \left\{\begin{array}{c} (\beta,\gamma)\in \operatorname{Hom}(B,D)\times \operatorname{Hom}(C,D)\ ; \\ \forall p,q,\ \forall (b,c)\in B_p\times C_q, \\ \beta(b)\gamma(c) = (-1)^{pq}\gamma(c)\beta(b)\end{array}\right\} \\ f & \longmapsto & (f(\cdot,1), f(1,\cdot)) \\ (b,c)\mapsto \beta(b)\gamma(c) & \longleftarrow & (\beta,\gamma)\end{array}\right. .$$

Chercher à factoriser les applications bilinéaires antimultiplicatives sur $B\times C$ mène à la propriété universelle suivante.

Propriété universelle du produit tensoriel gradué.
Soient B et C deux algèbres graduées et $\left\{\begin{array}{l}\varphi_B : B\longrightarrow D \\ \varphi_C : C\longrightarrow D\end{array}\right.$ deux morphismes d'algèbres qui anticommutent à l'arrivée, i. e. *vérifiant pour tous b, c homogènes*

$$\varphi_B(b)\varphi_C(c) = (-1)^{\partial b\partial c}\varphi_C(c)\varphi_B(b).$$

Alors il existe un unique morphisme d'algèbres φ prolongeant φ_B et φ_C à $B\otimes^g C$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\mathrm{Id}\otimes 1"] \arrow[dr, "\varphi_B"'] & B\otimes^g C \arrow[d, "\varphi"] & C \arrow[l, "1\otimes \mathrm{Id}"'] \arrow[dl, "\varphi_C"] \\ & D & \end{tikzcd} .$$

et ce morphisme agit sur les tenseurs purs par multiplication des composantes tensorielles après action de φ_B et φ_C :

$$\varphi(b\otimes c) = \varphi_B(b)\varphi_C(c).$$

[28] Toutes les vérifications sont bien sûr laisées au soin du lecteur.

Si de plus φ_B et φ_C sont gradués[29]*, alors φ est gradué.*

Démonstration.
L'application A-bilinéaire $\left\{\begin{array}{ccc} B\times C & \longrightarrow & D \\ (b,c) & \longmapsto & \varphi_B(b)\,\varphi_C(c)\end{array}\right.$ fournit une unique application linéaire

$$\varphi:\left\{\begin{array}{ccc} B\otimes C & \longrightarrow & D \\ b\otimes c & \longmapsto & \varphi_B(b)\,\varphi_C(c)\end{array}\right. .$$

On considère ensuite $B\otimes C$ muni de sa structure d'algèbre graduée $B\otimes^g C$.

On a déjà trivialement que $\varphi(b\otimes c)=\varphi_B(b)\,\varphi_C(c)$. De plus, on a[30]

$$\begin{aligned}\varphi\left((b\otimes c)\times(b'\otimes c')\right) &= \varphi\left((-1)^{\partial c\partial b'}\,bb'\otimes cc'\right)=(-1)^{\partial c\partial b'}\,\varphi_B(bb')\,\varphi_C(cc') \\ &= (-1)^{\partial c\partial b'}\,\varphi_B(b)\,\underline{\varphi_B(b')\,\varphi_C(c)}\varphi_C(c') \\ &= (-1)^{\partial c\partial b'}\,(-1)^{\partial b'\partial c}\,\varphi_B(b)\,\underline{\varphi_C(c)\,\varphi_B(b')}\varphi_C(c') \\ &= \varphi((b\otimes c))\,\varphi((b'\otimes c')),\end{aligned}$$

donc la linéarité de φ entraine son caractère de morphisme d'algèbres. L'unicité est évidente d'après l'unicité dans la propriété universelle du produit tensoriel de modules.

Lorsque φ_B et φ_C sont gradués, il est aisé de montrer que φ préserve le degré : pour $b\in B$ et $c\in C$ homogènes, $\varphi(b\otimes c)=\varphi_B(b)\otimes\varphi_C(c)$ est homogène de degré

$$\partial\varphi_B(b)+\partial\varphi_C(c)=\partial b+\partial c=\partial(b\otimes c).$$

Remarque. Comme pour le produit tensoriel d'algèbres usuel, on observera que la donnée de deux morphismes d'algèbres $\left\{\begin{array}{c} B\longrightarrow D \\ C\longrightarrow D\end{array}\right.$ qui anticommutent à l'arrivée revient à se donner une application bilinéaire sur $B\times C$ qui est antimultiplicative : considérer la bijection

Compléments.
Encore une fois tout se prolonge aux cas de n algèbres graduées. Le produit « tordu » sur l'algèbre graduée $B_1\otimes^g\cdots\otimes^g B_n$ sera défini composante par composante avec un signe donné à l'aide du schéma ci-dessous :

$$\begin{array}{cc} & b_1\otimes b_2\otimes\cdots\otimes b_n \\ \times & b'_1\otimes b'_2\otimes\cdots\otimes b'_n \\ \times & b''_1\otimes b''_2\otimes\cdots\otimes b''_n\end{array}$$

on fait le produit des degrés des éléments reliables par un trait oblique $\diagup$ (verticales exclues) et on somme le tout, ce qui donne (pour le cas de trois algèbres) un signe $\sum_{i<j}\left(\partial b'_i\partial b_j+\partial b''_i\partial b_j+\partial b''_i\partial b'_j\right)$. Les algèbres B_i vont alors anticommuter deux à deux dans $\bigotimes^g B_i$.

Comme pour le produit tensoriel (usuel) d'algèbres, on dispose de l'associativité de $\otimes^g$ et de la distributivité de $\otimes^g$ sur $\oplus$, lesquelles donnent lieu à des isomorphismes (canoniques) d'algèbres graduées[31]. Une récurrence étendra la distributivité à un produit de plusieurs algèbres graduées.

Côté propriété universelle, si l'on se donne des morphismes d'algèbres – un pour chaque B_i – qui anticommutent deux à deux à l'arrivée, alors on pourra les prolonger d'une unique façon sur $\bigotimes^g B_i$ et le prolongement agira sur un tenseur pur par multiplication des composantes tensorielles après action de chacun des morphismes.

[29] Si B et C sont deux algèbres graduées, un morphisme d'algèbres $\varphi:B\longrightarrow C$ est dit *gradué* si $\varphi(B_n)\subset C_n$ pour tout $n\geq 0$. Cela revient à dire que l'image de tout élément homogène est homogène et de même degré.

[30] on permute les quantités soulignées en faisant apparaître un signe, ce qui est permi par hypothèse d'anti-commutativité sur B et C

[31] Il est trivial qu'une somme directe d'algèbres graduées est graduée.

2.1.3 Algèbres anticommutatives et alternées

On étudie ici plus précisément la notion d'anticommutativité telle qu'elle nous est apparue en étudiant une algèbre produit tensoriel gradué.

Définition.
Une algèbre graduée B est dite anticommutative *si*

$$bb' = (-1)^{\partial b \partial b'} b'b$$

pour tous éléments homogènes b et b'.
Une algèbre graduée B est dite alternée *si elle est anticommutative et si de plus*

$$b^2 = 0$$

*pour tout élément homogène b de degré **impair**.*

Remarque. Si b ou b' est de degré nul, c'est un scalaire, donc commute avec l'autre, d'où l'identité $bb' = (-1)^{\partial b \partial b'} b'b$ puisque l'une des puissances de -1 est paire. On ne vérifiera donc l'anticommutativité que sur les éléments de degré ≥ 1.
Remarque. Si B est anticommutative, pour tout b homogène de degré impair, on a $b^2 = (-1)^{\partial b \partial b} b^2 = -b^2$ car $(\partial b)^2$ reste impair. Ainsi, dès que 2 est simplifiable dans l'anneau de base, l'anticommutativité implique automatiquement l'alternance.

Proposition.

1. *Le produit tensoriel (usuel) d'algèbres commutatives est une algèbre commutative.*
2. *Le produit tensoriel (gradué) d'algèbres anticommutatives est une algèbre anticommutative.*
3. *Le produit tensoriel (gradué) d'algèbres alternées est une algèbre alternée.*

Démonstration.
Soit B et C les algèbres dont on forme le produit tensoriel $B \otimes C$.

1. Supposons B et C commutatives. Alors $\times$ est clairement commutative sur les tenseurs purs (donc partout par distributivité) :

$$(b \otimes c)(b' \otimes c') = (bb' \otimes cc') = (b'b \otimes c'c) = (b' \otimes c')(b \otimes c).$$

2. Supposons $B = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} B_n$ et $C = \bigoplus_{m\in\mathbb{N}} C_m$ anticommutatives. On se place dans l'algèbre graduée $B \otimes^g C$. Pour des éléments homogènes b, b', c, c', on a

$$\begin{aligned}
(b \otimes c)(b' \otimes c') &= (-1)^{\partial c \partial b'} (bb' \otimes cc') \\
&= (-1)^{\partial c \partial b'} \left(\left((-1)^{\partial b \partial b'} b'b\right) \otimes \left((-1)^{\partial c \partial c'} c'c\right)\right) \\
&= (-1)^{\partial c \partial b' + \partial b \partial b' + \partial c \partial c'} b'b \otimes cc' \\
&= (-1)^{\partial c \partial b' + \partial b \partial b' + \partial c \partial c'} (b' \otimes c')(b \otimes c)(-1)^{\partial c' \partial b} \\
&= (-1)^{\partial b \partial b' + \partial c \partial b' + \partial c' \partial b + \partial c \partial c'} (b' \otimes c')(b \otimes c) \\
&= (-1)^{(\partial b + \partial c)\left(\partial b' + \partial c'\right)} (b' \otimes c')(b \otimes c) \\
&= (-1)^{\partial(b \otimes c)\partial\left(b' \otimes c'\right)} (b' \otimes c')(b \otimes c).
\end{aligned}$$

Soient ensuite ξ et η des éléments homogènes de

$$B \otimes^g C = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \bigoplus_{p+q=n} B_p \otimes C_q.$$

ξ et η s'écrivent $\left\{ \begin{array}{l} \xi = \sum_i^{\text{finie}} \xi_i \\ \eta = \sum_j^{\text{finie}} \eta_j \end{array} \right.$ où les ξ_i, η_j sont des tenseurs purs d'éléments homogènes, donc qui vérifient (d'après le calcul ci-dessus)

$$\xi_i \eta_j = (-1)^{\partial \xi_i \partial \eta_j} \eta_j \xi_i.$$

On notera également que les ξ_i sont dans $\bigoplus_{p+q=\partial\xi} B_p \otimes C_q$ comme ξ, donc ont même degré $\partial\xi_i = \partial\xi$; bien sûr, on a de même $\partial\eta_j = \partial\eta$. On a alors

$$\begin{aligned}
\xi\eta &= \left(\sum_i^{\text{finie}} \xi_i\right)\left(\sum_j^{\text{finie}} \eta_j\right) = \sum_{i,j}^{\text{finie}} \xi_i\eta_j = \sum_{i,j}^{\text{finie}} (-1)^{\partial\xi_i\partial\eta_j}\, \eta_j\xi_i = \sum_{i,j}^{\text{finie}} (-1)^{\partial\xi\partial\eta}\, \eta_j\xi_i \\
&= (-1)^{\partial\xi\partial\eta} \sum_{i,j}^{\text{finie}} \eta_j\xi_i = (-1)^{\partial\xi\partial\eta} \left(\sum_j^{\text{finie}} \eta_j\right)\left(\sum_i^{\text{finie}} \xi_i\right) = (-1)^{\partial\xi\partial\eta}\, \eta\xi,\ \mathit{CQFD}.
\end{aligned}$$

3. Supposons $B = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} B_n$ et $C = \bigoplus_{m\in\mathbb{N}} C_m$ alternées. On se place dans l'algèbre graduée $B \otimes^g C$. On a déjà vu qu'elle était anticommutative. De plus, tout élément ξ homogène de $B \otimes^g C$ de degré impair s'écrit $\sum_i^{\text{finie}} b_i \otimes c_i$ où b_i et c_i sont homogènes et où l'un au moins est de carré nul car de degré impair (puisque $\partial b_i + \partial c_i = \partial (b_i \otimes c_i) = \partial\xi$ est impair) . On a alors

$$\begin{aligned}
\xi^2 &= \left(\sum_i^{\text{finie}} b_i \otimes c_i\right)^2 = \sum_{i,j}^{\text{finie}} (b_i \otimes c_i)(b_j \otimes c_j) = \sum_{i,j}^{\text{finie}} (-1)^{\partial c_i \partial b_j} (b_i b_j) \otimes (c_i c_j) \\
&= \sum_i^{\text{finie}} (-1)^{\partial c_i \partial b_i} \underbrace{(b_i b_i) \otimes (c_i c_i)}_{=0} + \sum_{i\neq j}^{\text{finie}} (-1)^{\partial c_i \partial b_j} (b_i b_j) \otimes (c_i c_j) \\
&= \sum_{i<j}^{\text{finie}} (-1)^{\partial c_i \partial b_j} (b_i b_j) \otimes (c_i c_j) + \sum_{i>j}^{\text{finie}} (-1)^{\partial c_i \partial b_j} (b_i b_j) \otimes (c_i c_j) .
\end{aligned}$$

L'idée est maintenant de bidouiller le terme de droite pour intervertir les indices i et j tout en faisant sortir une puissance impaire de -1 (*i. e.* un signe moins), de sorte que la somme résultante ξ^2 vaille zéro comme voulu. Puisqu'on veut transformer $\partial c_i \partial b_j$ en $\partial c_j \partial b_i$, il est naturel de remplacer ∂c_i par $\partial\xi - \partial b_i$ et ∂b_j par $\partial\xi - \partial c_j$ dès que possible.

Après modification du tenseur

$$(b_i b_j) \otimes (c_i c_j) = \left((-1)^{\partial b_i \partial b_j}\, b_j b_i\right) \otimes \left((-1)^{\partial c_i \partial c_j}\, c_i c_j\right) = (-1)^{\partial b_i \partial b_j + \partial c_i \partial c_j} (b_j b_i) \otimes (c_j c_i) ,$$

la puissance de -1 dans le second terme $\sum_{i>j}^{\text{finie}} (-1)^{\partial c_i \partial b_j} (b_i b_j) \otimes (c_i c_j)$ vaut (modulo 2)

$$\begin{aligned}
\underline{\partial c_i \partial b_j} + \underline{\partial b_i \partial b_j + \partial c_i \partial c_j} &= (\partial\xi - \partial b_i)(\partial\xi - \partial c_j) + \partial b_i (\partial\xi - \partial c_j) + (\partial\xi - \partial b_i)\partial c_j \\
&= (1 + \partial b_i)(1 + \partial c_j) + \partial b_i (1 + \partial c_j) + (1 + \partial b_i)\partial c_j \\
&= 1 + 2\partial b_i + 2\partial c_j + 3\partial b_i \partial c_j \\
&= 1 + \partial b_i \partial c_j,\ \mathit{CQFD}.
\end{aligned}$$

2.2 Algèbre tensorielle d'un A-module

Comme annoncé, nous allons transformer un module en une algèbre en prenant pour multiplication interne le produit tensoriel.

Cette première construction ne confère pas de propriété particulière à l'algèbre ainsi obtenue.

2.2.1 Définitions

Soit M un module. On pose

$$T^n(M) := M^{\otimes_A n} = \underbrace{M \otimes_A M \otimes_A \cdots \otimes_A M}_{n \text{ fois}}$$

(on souviendra que $T^0(M) = A$ et $T^1(M) = M$) puis

$$T(M) := \bigoplus_{n\geq 0} T^n(M).$$

Proposition – Définition.
Il existe une unique structure d'algèbre unitaire sur $T(M)$ telle que

$$\begin{array}{c} (x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) \times (y_1 \otimes \cdots \otimes y_q) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_q \\ a \times (y_1 \otimes \cdots \otimes y_q) = a(y_1 \otimes \cdots \otimes y_q) \\ (x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) \times a = a(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) \end{array}.$$

*Munie de cette structure, $T(M)$ est appelée l'*algèbre tensorielle *du module M.*
$T(M)$ est graduée de composantes homogènes les $T^n(M)$ et engendrée en tant qu'algèbre par la partie $M = T^1(M)$.

Démonstration.
Concernant l'unicité, connaître le produit sur des générateurs linéaires revient à le connaître partout par distributivité. Il reste à le construire.
Fixons un p-uplet $\overrightarrow{m} \in M^p$ avec $p \geq 1$. Les applications q-linéaires (pour $q \geq 1$)

$$\left\{ \begin{array}{ccc} M^q & \longrightarrow & T(M) \\ (x_1, ..., x_q) & \longmapsto & m_1 \otimes \cdots \otimes m_p \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_q \end{array} \right.$$

se factorisent en des applications linéaires définies sur les $M^{\otimes q} = T^q(M)$. Pour les recoller, on n'oublie pas le cas $q = 0$, pour lequel on considère

$$\left\{ \begin{array}{ccc} T^0(M) = A & \longrightarrow & T(M) \\ a & \longmapsto & a(m_1 \otimes \cdots \otimes m_p) \end{array} \right. .$$

On obtient ainsi une application linéaire

$$\mu_m : \left\{ \begin{array}{ccc} T(M) & \longrightarrow & T(M) \\ x_1 \otimes \cdots \otimes x_q & \longmapsto & m_1 \otimes \cdots \otimes m_p \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_q \\ a & \longmapsto & a(m_1 \otimes \cdots \otimes m_p) \end{array} \right. .$$

Maintenant, à $p \geq 1$ fixé, l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} M^p & \longrightarrow & \mathcal{L}(T(M)) \\ m & \longmapsto & \mu_m \end{array} \right.$ est multilinéaire (comme on le vérifie sur les tenseurs de bases), donc se factorise en une application linéaire sur $M^{\otimes p}$, lesquels se recollent en une application linéaire

$$\mu : \left\{ \begin{array}{ccc} T(M) & \longrightarrow & \mathcal{L}(T(M)) \\ m_1 \otimes \cdots \otimes m_p & \longmapsto & \mu_m \\ a & \longmapsto & a\,\mathrm{Id} \end{array} \right. .$$

Nous pouvons à présent définir la multiplication dans $T(M)$ par

$$\xi \times \eta := [\mu(\xi)](\eta)$$

qui satisfait par construction les trois propriétés recherchées. La distributivité provient de la linéarité de μ, et tout le reste est évident en regardant ce qui se passe sur les tenseurs purs : l'associativité, le neutre 1_A, la propriété

$$a \cdot (x \times y) = (a \cdot x) \times y = x \times (a \cdot y),$$

et la graduation

$$(x, y) \in T^n(M) \times T^m(M) \implies x \times y \in T^{n+m}(M).$$

Pour le caractère générateur, il suffit de noter que les éléments de $T^1(M) = M$ engendrent (pour le produit) les tenseurs purs, lesquels engendrent (linéairement) tous les $T^n(M)$, donc $T(M)$.

2.2.2 Prolongement des applications linéaires en des morphismes d'algèbres

Propriété universelle de l'algèbre tensorielle.
Toute application f linéaire sur un module M à valeurs dans une algèbre B se prolonge d'une unique façon sur $T(M)$ en un morphisme d'algèbres $\overline{f}$. Ce prolongement vérifie

$$\overline{f}:\left\{\begin{array}{ccc} T(M) & \longrightarrow & B \\ m_1\otimes\cdots\otimes m_i & \longmapsto & f(m_1)\cdots f(m_i)\end{array}\right. .$$

Démonstration.
Si $\overline{f}$ est un tel prolongement, on doit pouvoir écrire

$$f(m_1\otimes\cdots\otimes m_i)=f(m_1\times\cdots\times m_i)=f(m_1)\times\cdots\times f(m_i),$$

ce qui détermine entièrement $\overline{f}$ sur les $T^{k\geq 1}(M)$ par linéarité connaissant f. Pour avoir $\overline{f}_{|A}$, il suffit d'écrire

$$f(a)=f(a\cdot 1)=a\cdot f(1)=a\cdot 1,$$

ce qui montre que $\overline{f}_{|A}$ est la flèche canonique $A\longrightarrow B$.
On construit donc, pour tout $k\geq 1$, une application linéaire (grâce à la propriété universelle)

$$\overline{f}_k:\left\{\begin{array}{ccc} T^k(M) & \longrightarrow & B \\ m_1\otimes\cdots\otimes m_k & \longmapsto & f(m_1)\cdots f(m_k)\end{array}\right. ,$$

et on pose $\overline{f}:=\bigoplus_{k\geq 0}\overline{f}_k$ avec $\overline{f}_0:A\longrightarrow B$ la flèche canonique. Les vérifications sont immédiates.

Remarque. Si l'algèbre $B=\bigoplus B_n$ est graduée, alors le prolongement $\overline{f}$ n'est pas nécessairement gradué : il faut en effet que $f(M)=f\left(T^1(M)\right)\subset B_1$. Réciproquement, sous cette condition, on a bien pour tout $n\geq 0$

$$\overline{f}\left(\underbrace{M\cdots M}_{n\text{ fois}}\right)\subset\underbrace{\overline{f}(M)\cdots\overline{f}(M)}_{n\text{ fois}}=\underbrace{f(M)\cdots f(M)}_{n\text{ fois}}\subset B_1\cdots B_1\subset B_n,$$

d'où par linéarité $\overline{f}(M^{\otimes n})\subset B_n$, *CQFD.*

Le corollaire suivant montre que l'extension de la structure de module à celle d'algèbre passe au niveau des morphismes.

Corollaire.
Pour toute algèbre B, l'on dispose d'un isomorphisme canonique d'algèbres

$$\left\{\begin{array}{ccc} \operatorname*{Hom}_{\text{algèbres}}(T(M),B) & \longrightarrow & \operatorname*{Hom}_{\text{modules}}(M,B) \\ f & \longmapsto & f_{|M}\end{array}\right. .$$

Démonstration.
L'application ci-dessus est bien définie, surjective d'après l'existence de la proposition précédente (le prolongement $\overline{f}$ est envoyé sur f), injective d'après l'unicité, et est un morphisme d'algèbres.

On généralise la propriété universelle ci-dessus en transformant le module but en son algèbre tensorielle.

Proposition (fonctorialité de T).
Soient M,N des modules et $u:M\longrightarrow N$ linéaire. Alors il existe un unique morphisme d'algèbres

$$T(u):\left\{\begin{array}{ccc} T(M) & \longrightarrow & T(N) \\ m_1\otimes\cdots\otimes m_n & \longmapsto & u(m_1)\otimes\cdots\otimes u(m_n)\end{array}\right. ,$$

et le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{u} & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ T(M) & \xrightarrow{T(u)} & T(N) \end{array}.$$

De plus, si $M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} P$, *alors*[32]

$$T(v \circ u) = T(v) \circ T(u).$$

Démonstration.

On construit $T(u)$ sur les parties homogènes de $T(M)$ en posant (grâce à la propriété universelle)

$$T^k(u) : \left\{ \begin{array}{ccc} T^k(M) & \longrightarrow & T^k(N) \\ m_1 \otimes \cdots \otimes m_k & \longmapsto & u(m_1) \otimes \cdots \otimes u(m_k) \end{array} \right.,$$

l'unicité de $T(u)$ de découlant de celle des $T^k(u)$.

Pour avoir $T(v \circ u) = T(v) \circ T(u)$, il suffit d'invoquer l'unicité en remarquant que $T(v) \circ T(u)$ fonctionne.

Le corollaire suivant montre que l'extension des structures ne se voit pas au niveau des morphismes.

Corollaire.

On a un isomorphisme canonique de modules

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \operatorname*{Hom}_{\text{modules}}(M, N) & \longrightarrow & \operatorname*{Hom}_{\text{algèbres}}(T(M), T(N)) \\ u & \longmapsto & T(u) \end{array} \right..$$

Démonstration.

L'application ci-dessus est bien définie, linéaire, et a pour réciproque $f \mapsto f_{|M}$ puisque M engendre l'algèbre $T(M)$.

2.2.3 Tenseurs symétriques et antisymétriques

Soit M un module. Pour tout $n \geq 0$, on a une action du groupe $\mathfrak{S}_n$ sur $M^{\otimes n}$ définie par[33]

$$\sigma(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) = m_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes m_{\sigma(n)}.$$

Définition.

Soit $n \geq 0$. Un tenseur $\xi \in T^n(M)$ est dit :

• symétrique *si* $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\sigma(\xi) = \xi$ *; on note $\mathcal{S}_n(M)$ l'ensemble des tenseurs symétriques sur $M^{\otimes n}$;*

• antisymétrique *si* $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\sigma(\xi) = \varepsilon(\sigma)\xi$ *; on note $\mathcal{A}_n(M)$ l'ensemble des tenseurs antisymétriques sur $M^{\otimes n}$.*

Par exemple, $\left\{ \begin{array}{c} m \otimes n + n \otimes m \text{ est symétrique.} \\ m \otimes n - n \otimes m \text{ est antisymétrique} \end{array} \right.$.

Proposition (symétrisation d'un tenseur).

Pour $n \geq 1$, l'application linéaire

$$P_n : \left\{ \begin{array}{ccc} M^{\otimes n} & \longrightarrow & \mathcal{S}_n(M) \\ \xi & \longmapsto & \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma(\xi) \end{array} \right.$$

---

[32] on dit que T est un foncteur *covariant*

[33] On prolongera volontiers l'action sur $M^{\otimes 0} = A$ en définissant $\sigma(a) = a$ pour $\sigma \in \mathsf{S}_0$.

est bien définie et, si $n!$ est inversible dans A, alors $p_n := \frac{1}{n!} P_n$ est un projecteur d'image les tenseurs symétriques.

Démonstration.
La définition de P_n (avec $M^{\otimes n}$ comme ensemble but) découle de la propriété universelle.
Pour être sûr de tomber dans les tenseurs symétriques, on vérifie que pour $\xi \in M^{\otimes n}$ et $\tau \in \mathfrak{S}_n$ on a

$$\tau \left(P_n \left(\xi\right)\right) = \tau \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma \left(\xi\right)\right) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \tau\sigma \left(\xi\right) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma \left(\xi\right) = P_n \left(\xi\right),$$

d'où $\operatorname{Im} P_n \subset \mathcal{S}_n \left(M\right)$ comme voulu.
Si $n!$ est inversible, pour ξ tenseur symétrique, on a

$$P_n \left(\frac{1}{n!}\xi\right) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma \left(\frac{1}{n!}\xi\right) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma \left(\xi\right) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \xi = \frac{1}{n!} n!\xi = \xi,$$

d'où $\mathcal{S}_n \left(M\right) \subset \operatorname{Im} P_n$ et $\operatorname{Im} P_n = \mathcal{S}_n \left(M\right)$. On a montré au passage que, pour ξ symétrique, on a $P_n \left(\frac{1}{n!}\xi\right) = \xi$. Par conséquent,

$$p_n^2 \left(\xi\right) = \frac{1}{n!} P_n \left(\frac{1}{n!} \underbrace{P_n \left(\xi\right)}_{\in \mathcal{S}_n(M)}\right) = \frac{1}{n!} \left(P_n \left(\xi\right)\right) = p_n \left(\xi\right),$$

d'où p_n idempotent comme voulu.

Proposition (antisymétrisation d'un tenseur).
Pour $n \geq 1$, l'application linéaire

$$Q_n : \left\{ \begin{array}{ccc} M^{\otimes n} & \longrightarrow & \mathcal{A}_n \left(M\right) \\ \xi & \longmapsto & \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon \left(\sigma\right) \sigma \left(\xi\right) \end{array} \right.$$

est bien définie et, si $n!$ est inversible dans A, alors $q_n := \frac{1}{n!} Q_n$ est un projecteur d'image les tenseurs antisymétriques.

Démonstration.
La définition de Q_n (arrivant dans $M^{\otimes n}$) découle de la propriété universelle.
Pour tomber dans $\mathcal{A}_n \left(M\right)$, on vérifie que pour $\xi \in M^{\otimes n}$ et $\tau \in \mathfrak{S}_n$ on a

$$\begin{aligned} \tau \left(Q_n \left(\xi\right)\right) &= \tau \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon \left(\sigma\right) \sigma \left(\xi\right)\right) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon \left(\sigma\right) \tau\sigma \left(\xi\right) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon \left(\tau^{-1}\sigma\right) \sigma \left(\xi\right) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon \left(\tau\right) \varepsilon \left(\sigma\right) \sigma \left(\xi\right) = \varepsilon \left(\tau\right) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon \left(\sigma\right) \sigma \left(\xi\right) = \varepsilon \left(\tau\right) Q_n \left(\xi\right), \end{aligned}$$

d'où $\operatorname{Im} Q_n \subset \mathcal{A}_n \left(M\right)$.
Si $n!$ est inversible, pour ξ tenseur antisymétrique, on a

$$Q_n \left(\frac{1}{n!}\xi\right) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon \left(\sigma\right) \sigma \left(\frac{1}{n!}\xi\right) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon \left(\sigma\right) \varepsilon \left(\sigma\right) \xi = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \xi = \frac{1}{n!} n!\xi = \xi,$$

d'où $\mathcal{A}_n \left(M\right) \subset \operatorname{Im} Q_n$ et $\operatorname{Im} Q_n = \mathcal{A}_n \left(M\right)$. On a montré au passage que, pour ξ antisymétrique, on a $Q_n \left(\frac{1}{n!}\xi\right) = \xi$. Par conséquent,

$$q_n^2 \left(\xi\right) = \frac{1}{n!} Q_n \left(\frac{1}{n!} \underbrace{Q_n \left(\xi\right)}_{\in \mathcal{A}_n(M)}\right) = \frac{1}{n!} \left(Q_n \left(\xi\right)\right) = q_n \left(\xi\right),$$

d'où $\frac{1}{n!} Q_n$ idempotent comme voulu.

2.3 Algèbre symétrique d'un A-module

Le problème originel du produit tensoriel était de représenter linéairement les applications multilinéaires. Nous nous intéressons à présent à représenter linéairement les applications multilinéaires symétriques ou alternées.

2.3.1 Préliminaires sur les idéaux homogènes

Définition.
Soit B une algèbre graduée et I un idéal de B. On dit que I est un idéal homogène *s'il est somme directe de ses intersections avec les composantes homogènes de B,* i. e. *si*

$$I = \bigoplus_{n \geq 0} (I \cap B_n) .$$

Propriété.
Soit I un idéal homogène d'une algèbre graduée B. Alors, si un élément $\sum b_n$ tombe dans I, toutes ses composantes également.

Démonstration.
L'élément $\sum b_n$ se décompose dans $I = \bigoplus I \cap B_n$ en $\sum i_n$ où $i_n \in I \cap B_n$. Par unicité de la décomposition dans $\bigoplus B_n$, on en déduit $b_n = i_n \in I$ pour tout n.

Afin d'éclaicir la structure d'algèbre graduée de $S(M)$ que nous allons construire, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme.
Soit $B = \bigoplus B_n$ une algèbre graduée et $I = \bigoplus I_n$ un idéal homogène de B.
Alors l'algèbre ${}^{B}\!/_{I}$ est graduée selon les ${}^{B_n}\!/_{I}$, lesquels sont chacun canoniquement isomorphe à ${}^{B_n}\!/_{I_n}$ via $\overline{x} \longleftrightarrow \widetilde{x}$.

Démonstration.
Puisque $B = \sum B_n$ et que la somme passe modulo I, il est clair que ${}^{B}\!/_{I} = \sum {}^{B_n}\!/_{I}$. De plus, si une somme de $\sum {}^{B_n}\!/_{I}$ est nulle, mettons $\sum b_n \in I$, alors par la propriété précédente tous les b_n sont dans I, autrement dit sont nuls modulo I, ce qui montre que la somme $\sum {}^{B_n}\!/_{I}$ est directe.
Par ailleurs, la relation $\left({}^{B_p}\!/_{I}\right)\left({}^{B_q}\!/_{I}\right) \subset \left({}^{B_{p+q}}\!/_{I}\right)$ est immédiate vue la graduation de B et vu que le produit de B passe modulo I.
Enfin, vue l'inclusion des idéaux $I_n \subset I$, on une projection canonique ${}^{B_n}\!/_{I_n} \twoheadrightarrow {}^{B_n}\!/_{I}$. Si un élément b_n (pris modulo I_n) est annulé par cette projection, b_n est dans I, donc dans $I \cap B_n = I_n$, donc était déjà nul modulo I_n ; ceci montre que la projection précédente est injective, donc est un isomorphisme.

2.3.2 Définitions

Dans tous ce qui suit, M désigne un module. Par commodité, on pourra laisser tomber les dépendences en M.

Soit I_k le sous-module de $T^k(M)$ engendré par les $\mu - \sigma(\mu)$ où σ décrit $\mathfrak{S}_k$ et μ les tenseurs purs de T^k. Remarquer par exemple que $I_0 = I_1 = \{0\}$.
On pose

$$I := \bigoplus_{k \geq 0} I_k .$$

Proposition.
I est un idéal bilatère homogène de T. Plus précisément, on a

$$T^r \cdot I_s \subset I_{r+s} \text{ et } I \cap T^n = I_n.$$

Démonstration.
I est déjà stable par $+$ et contient 0. Il suffit pour conclure de montrer les identités $T^r \cdot I_s \subset I_{r+s}$ pour $r \geq 1$ et $s \geq 2$. En effet, pour $r = 0$, on veut $AI_s \subset I_s$, ce qui est clair, et les cas $s = 0, 1$ sont trivialisés en remarquant que $I_0 = I_1 = \{0\}$.

Soit donc $r \geq 1$ et $s \geq 2$. Puisque T^r est engendré par les

$$\tau := m_1 \otimes \cdots \otimes m_r$$

et I_s par les

$$\iota := m'_1 \otimes \cdots \otimes m'_s - m'_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes m'_{\sigma(s)} \text{ (où } \sigma \in \mathfrak{S}_s),$$

il suffit de montrer que, pour de tels τ et ι, les éléments $\tau\iota$ et $\iota\tau$ tombent dans I_{r+s}. Or, en posant

$$m_{r+i} := m'_i \text{ pour } i = 1, ..., s$$

et en définissant une permutation

$$\widehat{\sigma} := \left(\begin{array}{cccccc} 1 & \cdots & r & r+1 & \cdots & r+s \\ 1 & \cdots & r & r+\sigma(1) & \cdots & r+\sigma(s) \end{array} \right) \in \mathfrak{S}_{r+s},$$

on a

$$\tau\iota = m_1 \otimes \cdots \otimes m_r \otimes m_{r+1} \otimes \cdots \otimes m_{r+s} - m_{\widehat{\sigma}(1)} \otimes \cdots \otimes m_{\widehat{\sigma}(r+s)}$$

qui est envoyé dans I_{r+s}. Évidemment, cela marche aussi avec $\iota\tau$ en modifiant $\widehat{\sigma}$.

Le caractère homogène de I est évident.

Défintion.
On appelle algèbre symétrique *de M l'algèbre quotient*

$$S(M) := {}^{T(M)}\diagup_{I}.$$

Le produit dans $S(M)$ ne sera pas noté particulièrement, de sorte que l'on écrira volontiers

$$\overline{m_1 \otimes \cdots \otimes m_n} = m_1 \cdot \cdots \cdot m_n = m_1 \cdots m_n.$$

Cela revient à considérer, dans $T(M)$, les tenseurs purs indépendemment de l'ordre de leurs composantes. En d'autres termes, $S(M)$ est une algèbre commutative[34].

Propriétés.

1. *$S(M)$ est une algèbre commutative engendrée par M et graduée par les*

$$S^k(M) := {}^{T^k(M)}\diagup_{I} = \{m_1 \cdots m_k\}_{\overrightarrow{m} \in M^k} \cong {}^{T^k(M)}\diagup_{I_k}.$$

2. *La projection canonique*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} T(M) & \twoheadrightarrow & S(M) \\ m_1 \otimes \cdots \otimes m_k & \longmapsto & m_1 \cdots m_k \end{array} \right.$$

est un morphisme gradué qui injecte naturellement M dans $S(M)$:

$$M \hookrightarrow S(M).$$

[34] Et il n'y a rien d'autre à comprendre : pour obtenir un élément de $S(M)$, juxtaposer des vecteurs de M (l'ordre n'importe pas) et prendre une combinaison linéaire de telles juxtapositions.

Démonstration.

1. Il est clair que $S(M)$ est une algèbre commutative engendrée par les tenseurs simples $m \in M$. La graduation annoncé est donnée par le lemme de structure.
2. Par définition du produit sur $S(M)$, la projection canonique envoie clairement $T^n(M)$ dans $S^n(M)$, donc est un morphisme gradué.

On peut reformuler en ces termes :

$$S(M) \text{ est une algèbre sur } S^0 = A \text{ engendrée par } S^1 = M.$$

2.3.3 Prolongement des applications linéaires en des morphismes d'algèbres commutatives

Propriété universelle de l'algèbre symétrique.
Toute application f linéaire sur un module M à valeurs dans une algèbre B ***commutative*** *se prolonge d'une unique façon sur $S(M)$ en un morphisme d'algèbres $\overline{f}$. Ce prolongement vérifie*

$$\overline{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} S(M) & \longrightarrow & B \\ m_1 \cdots m_i & \longmapsto & f(m_1) \cdots f(m_i) \end{array} \right. .$$

Si B n'est pas commutative, la même conclusion tient si f commute à l'arrivée, i. e. *si*

$$\forall m, m' \in M, \ f(m) f(m') = f(m') f(m).$$

Démonstration.
Pour $k \geq 1$, on dispose de l'application k-linéaire

$$\left\{ \begin{array}{ccc} M^k & \longrightarrow & B \\ (m_1, ..., m_k) & \longmapsto & f(m_1) \cdots f(m_k) \end{array} \right.$$

qui se factorise en une application linéaire

$$f_k : \left\{ \begin{array}{ccc} T^k(M) & \longrightarrow & B \\ m_1 \otimes \cdots \otimes m_k & \longmapsto & f(m_1) \cdots f(m_k) \end{array} \right. .$$

En posant $f_0 : A \longrightarrow B$ la flèche canonique, on peut recoller les f_k pour définir une application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} T(M) & \longrightarrow & B \\ m_1 \otimes \cdots \otimes m_k & \longmapsto & f(m_1) \cdots f(m_k) \end{array} \right. .$$

Cette application s'annule sur I car f commute à l'arrivée, donc passe au quotient et définit une application

$$\overline{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} S(M) & \longrightarrow & B \\ m_1 \cdots m_k & \longmapsto & f(m_1) \cdots f(m_k) \end{array} \right.$$

qui vérifie ce qu'on veut. Son unicité vient de ce que $S(M)$ est engendrée par les $m_1 \cdots m_k$.

Proposition (fonctorialité de S).
Soient M, N des modules, $u : M \longrightarrow N$ linéaire. Alors il existe un unique morphisme d'algèbres

$$S(u) : \left\{ \begin{array}{ccc} S(M) & \longrightarrow & S(N) \\ m_1 \cdots m_k & \longmapsto & u(m_1) \cdots u(m_k) \end{array} \right. ,$$

et alors le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{u} & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ S(M) & \xrightarrow{S(u)} & S(N) \end{array} .$$

De plus, si $M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} P$*, alors*[35]

$$S(v \circ u) = S(v) \circ S(u).$$

Démonstration.
On construit $S(u)$ sur les composantes homogènes $S^k(M)$ de $S(M)$. On part de l'application linéaire

$$\begin{cases} T^k(M) & \longrightarrow & S(N) \\ m_1 \otimes \cdots \otimes m_k & \longmapsto & u(m_1) \cdots u(m_k) \end{cases}$$

qui s'annule sur I_n (car $S(N)$ commutative), donc passe au quotient en

$$S^k(u) : \begin{cases} S^k(M) & \longrightarrow & S(N) \\ m_1 \cdots m_k & \longmapsto & u(m_1) \cdots u(m_k) \end{cases}.$$

On définit alors $S(u)$ sur $S(M)$ par les $S^k(u)$. L'unicité vient toujours du caractère générateur des $m_1 \cdots m_k$.
Pour avoir $S(v \circ u)$, il suffit d'invoquer l'unicité en remarquant que $S(v) \circ S(u)$ fonctionne.

2.3.4 Algèbre symétrique d'une somme directe finie

Proposition.
Soient $M_1, ..., M_n$ *des modules. On a un isomorphisme canonique d'algèbres :*

$$\begin{cases} S(M_1 \oplus \cdots \oplus M_n) & \longrightarrow & S(M_1) \otimes \cdots \otimes S(M_n) \\ m_i & \longmapsto & 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes m_i \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \\ m_1 \cdots m_n & \longleftarrow & m_1 \otimes \cdots \otimes m_n \end{cases}.$$

Démonstration.
Fixons un i. Le module M_i s'injecte naturellement dans $M := M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ par un φ_i, d'où un morphisme d'algèbres $S(\varphi_i) : S(M_i) \hookrightarrow S(M)$. Comme $S(M)$ est commutative, on en déduit (par la propriété universelle du produit tensoriel d'algèbres) un morphisme d'algèbres

$$\Phi : \begin{cases} S(M_1) \otimes \cdots \otimes S(M_n) & \longrightarrow & S(M) \\ m_1 \otimes \cdots \otimes m_n & \longmapsto & m_1 \cdots m_n \end{cases}.$$

Inversement, pour construire un morphisme d'algèbres $S(M) \longrightarrow \bigotimes S(M_i)$, en remarquant que chaque $S(M_i)$ est commutatif, $\bigotimes S(M_i)$ l'est aussi, donc il suffit (par la propriété universelle de l'algèbre symétrique) de construire un morphisme $M \longrightarrow \bigotimes S(M_i)$. Comme $M = \bigoplus M_i$, il suffit de construire des morphismes $M_{i_0} \longrightarrow \bigotimes S(M_i)$. On considère

$$\begin{cases} M_{i_0} \hookrightarrow S(M_{i_0}) & \longrightarrow & \bigotimes S(M_i) \\ m & \longmapsto & 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes m \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \end{cases}.$$

Vérifions que le morphisme $\Psi : S(M) \longrightarrow \bigotimes S(M_i)$ ainsi construit est inverse de Φ. Il s'agit de montrer $\Psi\Phi = \mathrm{Id}_{\bigotimes S(M_i)}$ et $\Phi\Psi = \mathrm{Id}_{S(M)}$.
Montrons que $\Psi\Phi = \mathrm{Id}$ sur un système de générateurs de $\bigotimes S(M_i)$, par exemple ses tenseurs purs. Comme M_i engendre l'algèbre $S(M_i)$, il suffit de vérifier l'égalité $\Psi\Phi = \mathrm{Id}$ sur les tenseurs $m_1 \otimes \cdots \otimes m_n$ où $m_i \in M_i$ pour tout i :

$$\begin{aligned} \Psi\Phi(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) &= \Psi(m_1 \cdots m_n) = \prod \Psi(m_i) \\ &= \prod (\cdots \otimes 1 \otimes m_i \otimes 1 \otimes \cdots) \\ &= m_1 \otimes \cdots \otimes m_n, \ \textit{CQFD}. \end{aligned}$$

[35] Comme pour la correspondance $M \mapsto T(M)$, on dira que S est un foncteur covariant.

De même, on montre $\Phi\Psi = \mathrm{Id}$ sur des générateurs de $S(M)$. Les éléments de M sont candidats, mais sont déjà engendrés (linéairement) par les M_i. On regarde donc

$$\Phi\Psi(m_i) = \Phi(\cdots \otimes 1 \otimes m_i \otimes 1 \otimes \cdots) = 1 \cdots 1 m_i 1 \cdots 1 = m_i, \ \textit{CQFD.}$$

Proposition.
Si $M := Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_n$ est libre de type fini, alors $S(M)$ est libre de base

$$\left(e_1^{a_1} \cdots e_n^{a_n}\right)_{(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{N}^n}$$

et est donc isomorphe à une algèbre de polynômes

$$S(Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_n) \simeq A[X_1, ..., X_n].$$

Démonstration.
On dispose d'un morphisme de modules $\left\{\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & A[X_1,...,X_n] \\ e_i & \longmapsto & X_i \end{array}\right.$ qui, par commutativité de $A[X_1,...,X_n]$, se prolonge un morphisme d'algèbres $\left\{\begin{array}{ccc} S(M) & \longrightarrow & A[X_1,...,X_n] \\ e_i & \longmapsto & X_i \end{array}\right.$. Par ailleurs, on dispose également d'un morphisme d'algèbres[36] $\left\{\begin{array}{ccc} A[X_1,...,X_n] & \longrightarrow & S(M) \\ X_i & \longmapsto & e_i \end{array}\right.$. Il est trivial que ces deux morphismes sont réciproques l'un de l'autre.

Remarque. On aurait pu aussi traiter le cas $n = 1$ comme ci-dessus puis invoquer la proposition précédente, ce qui aurait donné

$$S(M) = S(Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_n) \simeq \bigotimes_{i=1}^n S(Ae_i) \simeq \bigotimes_{i=1}^n A[X] \simeq A[X_1,...,X_n].$$

Exemple important.
Lorsque M est un espace vectoriel V de dimension finie, on dispose d'une base (e_i) de V, d'où une base duale (e_i^*) de V^*, ce qui permet d'écrire les éléments de $S(V^*)$ comme des polynômes en les fonctions coordonnées, *i. e.* comme des fonctions polynomiales en les vecteurs de V (identifiés à leurs vecteurs coordonnées dans la base (e_i)). Une fois oubliée la base de départ, on obtient une description canonique des fonctions polynomiales sur l'espace V : l'algèbre $S(V^*)$. Nous utiliserons cette description dans des chapitres ultérieurs.

2.3.5 Lien avec les applications multinéaires symétriques

Définition.
Une application $\varphi : M^n \longrightarrow N$ multilinéaire est dite symétrique[37] *si*

$$\varphi\left(m_{\sigma(1)}, ...m_{\sigma(n)}\right) = \varphi(m_1, ...m_n)$$

pour toute permutation σ de $\mathfrak{S}_n$.
On notera $\mathcal{LS}_n(M, N)$ l'ensemble des applications n-linéaires symétriques de M^n dans N.

De même que les applications multilinéaires sont représentées par les applications linéaires depuis un produit tensoriel, les applications multilinéaires symétriques sont représentées par les applications linéaires depuis une algèbre symétrique.

[36] Et oui, il n'y pas que les produits tensoriels qui jouissent d'une propriété universelle, les algèbres de polynômes aussi !
[37] En particulier, une application n-linéaire pour $n = 0$ ou $n = 1$ est toujours symétrique.

Proposition.
On a un isomorphisme canonique de modules

$$\left\{\begin{array}{ccc}\mathcal{LS}_n(M,N) & \longrightarrow & \mathcal{L}(S^n(M),N) \\ \varphi & \longmapsto & x_1\cdots x_n \mapsto \varphi(x_1,...,x_n) \\ (x_1,...,x_n)\mapsto f(x_1\cdots x_n) & \longleftarrow & f\end{array}\right. .$$

Démonstration
Les applications linéaires sus-décrites sont clairement réciproques l'une de l'autre.

2.3.6 Lien avec les tenseurs symétriques

Soit $n \geq 1$, et supposons $n!$ inversible dans A. On dispose alors du projecteur « symétrisateur » $p_n = \frac{1}{n!}P_n$ défini par

$$p_n : \left\{\begin{array}{ccc} T^n(M) & \twoheadrightarrow & \mathcal{S}_n(M) \\ \xi & \longmapsto & \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sigma(\xi)\end{array}\right. .$$

Comme tout projecteur qui se respecte, p_n a son image et son noyau en somme directe. On sait déjà que

$$\operatorname{Im} p_n = \mathcal{S}_n(M)$$

Montrons alors que[38]

$$\operatorname{Ker} p_n = I_n$$

En effet, pour $n=1$, on a directement $I_1 = \{0\} = \operatorname{Ker}\operatorname{Id} = \operatorname{Ker} p_n$; pour $n \geq 2$, on a déjà clairement $I_n \subset \operatorname{Ker} p_n$, et pour $\xi \in \operatorname{Ker} p_n$, on a

$$\xi = \xi - \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sigma(\xi) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\left(\underbrace{\xi-\sigma(\xi)}_{\in I_n}\right).$$

On en déduit

$$M^{\otimes n} = \mathcal{S}_n(M) \oplus I_n$$

et donc

$$\mathcal{S}_n(M) \cong {}^{M^{\otimes n}}\!/_{I_n} \cong S^n(M).$$

Finalement, les tenseurs symétriques de « longueur » n consituent exactement la partie homogène de degré n de l'algèbre symétrique $S(M)$.

2.4 Algèbre extérieure d'un A-module

Voyons à présent comment représenter linéairement les applications multilinéaires alternées.

2.4.1 Définitions

Soit J_n le sous-module de $T^n(M)$ engendré par les tenseurs purs $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ ayant au moins deux composantes $x_i = x_j$ égales. Noter au passage que $J_0 = J_1 = \{0\}$ (pas possible d'avoir deux composantes, *a fortiori* deux composantes égales).

On pose

$$J := \bigoplus_{n\geq 0} J_n.$$

[38] Rappelons que I_n est l'idéal engendré par les $\mu - \sigma(\mu)$ pour μ tenseur pur de $M^{\otimes n}$ et σ permutation de S_n.

Proposition.
J est un idéal bilatère homogène de $T(M)$.

Démontration.
J est déjà stable par $+$ et contient 0. D'autre part, puisque $T(M)$ est engendré par A et les

$$\tau := m_1 \otimes \cdots \otimes m_k \ (k \geq 1)$$

et J par les

$$\iota = m'_1 \otimes \cdots \otimes m'_k \ (k \geq 2, \exists y_i = y_j),$$

il suffit de montrer que, pour de tels τ et ι, $\tau \times \iota$ et $\iota \times \tau$ restent dans J. Or, c'est évident puisque les coordonnées identiques de ι sont conservées par multiplication (on concatène).

Le caractère homogène de J est évident.

Défintion.
On appelle algèbre extérieure *de M l'algèbre quotient*

$$\Lambda(M) := {}^{T(M)}\!\diagup_{J}.$$

On notera $\wedge$ le produit dans $\Lambda(M)$, de sorte que

$$\overline{m_1 \otimes \cdots \otimes m_n} = m_1 \wedge \cdots \wedge m_n.$$

Remarque. Dans l'algèbre $\Lambda(M)$, un produit d'éléments de M s'annulera dès que l'un de ces éléments est répété. Mais attention : on peut également multipler dans $\Lambda(M)$ par des *scalaires*, lesquels échappent à cette règle ! Le produit suivant n'a ainsi aucune raison de s'annuler :

$$2 \wedge 3 \wedge 2 \wedge m = 12m.$$

Contrairement à l'algèbre symétrique, l'algèbre extérieure ne sera pas commutative. On montre plus bas que changer l'ordre dans un produit ne fait que changer le signe du produit.

Propriétés.

1. *$\Lambda(M)$ est une algèbre engendrée par M et graduée par les*

$$\Lambda^k(M) := {}^{T^k(M)}\!\diagup_{J} = \{m_1 \wedge \cdots \wedge m_k\}_{\overrightarrow{m} \in M^k} \cong {}^{T^k(M)}\!\diagup_{J_k}.$$

2. *La projection canonique*

$$\pi : \left\{ \begin{array}{ccc} T(M) & \twoheadrightarrow & \Lambda(M) \\ m_1 \otimes \cdots \otimes m_n & \longmapsto & m_1 \wedge \cdots \wedge m_n \end{array} \right.$$

est un morphisme gradué qui injecte naturellement M dans $\Lambda(M)$:

$$M \hookrightarrow \Lambda(M).$$

Démonstration.

1. Il est clair que $\Lambda(M)$ est une algèbre engendrée par les tenseurs simples $m \in M$. La graduation annoncé est donnée par le lemme de structure.
2. Par définition du produit sur $\Lambda(M)$, la projection canonique envoie clairement $T^n(M)$ dans $\Lambda^n(M)$, donc est un morphisme gradué.

On peut reformuler en ces termes :

$$\Lambda(M) \text{ est une algèbre sur } \Lambda^0 = A \text{ engendrée par } \Lambda^1 = M.$$

Proposition.
Pour tous x et y dans M, on a

$$y \wedge x = -x \wedge y.$$

Démonstration.
Il suffit d'écrire $0 = (x+y) \wedge (x+y) = x \wedge y + y \wedge x$.

Corollaire 1.
Soient $x_1, ..., x_n$ dans M, σ dans $\mathfrak{S}_n$. Alors

$$x_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge x_{\sigma(n)} = \varepsilon(\sigma)\, x_1 \wedge \cdots \wedge x_n.$$

Démonstration.
Évident car $\mathfrak{S}_n$ est engendrée par les transpositions.

Corollaire 2.
$\Lambda(M)$ est une algèbre alternée.

Démonstration.
Vérifions déjà que $\Lambda(M)$ est anticommutative. Soit $\begin{cases} \mu := m_1 \wedge \cdots \wedge m_r \\ \mu' := m'_1 \wedge \cdots \wedge m'_s \end{cases}$ deux tenseurs purs homogènes de $\Lambda(M)$. Pour transformer le produit $\mu\mu'$ en $\mu'\mu$, il faut décaler s fois d'un pas vers la droite le bloc μ formé de r termes. Chaque décalage correspond (au niveau des permutations) à un $(r+1)$-cycle. Le signe obtenu est donc le produit de s signatures d'un $(r+1)$-cycle, soit $(-1)^r \cdots (-1)^r = (-1)^{rs}$, *CQFD.*

L'identité $\xi^2 = 0$ est clairement vérifiée pour ξ tenseur pur de $\Lambda^n(M)$ pour $n \geq 1$ (deux composantes se répètent). De plus, pour tous ξ, η dans $\Lambda(M)$, on a $\xi \wedge \eta = -\eta \wedge \xi$. Ainsi, en écrivant un élément homogène $x \in \Lambda(M)$ de degré ≥ 1 comme une somme de tenseurs purs, disons $x = \sum_{i=1}^n \xi_i$, on aura

$$x^2 = \left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n \underbrace{\xi_i^2}_{=0} + \sum_{i<j} \underbrace{\xi_i \wedge \xi_j + \xi_j \wedge \xi_i}_{=0} = 0, \text{ } CQFD.$$

2.4.2 Prolongement des applications linéaires en des morphismes d'algèbres alternées

Propriété universelle de l'algèbre extérieure.
*Toute application f linéaire sur un module M à valeurs dans une algèbre B **alternée** se prolonge d'une unique façon sur $\Lambda(M)$ en un morphisme d'algèbres $\overline{f}$. Ce prolongement vérifie*

$$\overline{f} : \begin{cases} \Lambda(M) & \longrightarrow & B \\ m_1 \wedge \cdots \wedge m_n & \longmapsto & f(m_1) \times \cdots \times f(m_n) \end{cases}.$$

Si B n'est pas alternée, la même conclusion tient si f est de carré nul à l'arrivée, i. e. *si*

$$\forall m \in M,\ f(m)^2 = 0.$$

Démonstration.
Comme pour l'algèbre symétrique, on construit une application linéaire

$$\left\{\begin{array}{ccc} T(M) & \longrightarrow & B \\ m_1 \otimes \cdots \otimes m_k & \longmapsto & f(m_1) \times \cdots \times f(m_k) \end{array}\right.$$

Cette application s'annule sur l'idéal J grâce à la condition $f^2 = 0$, donc passe au quotient et définit une application

$$\overline{f} : \left\{\begin{array}{ccc} \Lambda(M) & \longrightarrow & B \\ m_1 \wedge \cdots \wedge m_k & \longmapsto & f(m_1) \times \cdots \times f(m_k) \end{array}\right.$$

qui vérifie ce qu'on veut. Son unicité vient de ce que $\Lambda(M)$ est engendrée par les $m_1 \wedge \cdots \wedge m_k$.

Proposition (fonctorialité de Λ).
Soient M, N des modules et $u : M \longrightarrow N$ linéaire. Alors il existe un unique morphisme d'algèbres

$$\Lambda(u) : \left\{\begin{array}{ccc} \Lambda(M) & \longrightarrow & \Lambda(N) \\ m_1 \wedge \cdots \wedge m_n & \longmapsto & u(m_1) \wedge \cdots \wedge u(m_n) \end{array}\right. ,$$

et le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} M & \stackrel{u}{\longrightarrow} & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda(M) & \stackrel{\Lambda(u)}{\longrightarrow} & \Lambda(N) \end{array} .$$

De plus, si $M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} P$, alors[39]

$$\Lambda(v \circ u) = \Lambda(v) \circ \Lambda(u) .$$

Démonstration.
On construit $\Lambda(u)$ sur les composantes homogènes $\Lambda^k(M)$ de $\Lambda(M)$. On part de l'application linéaire

$$\left\{\begin{array}{ccc} T^k(M) & \longrightarrow & \Lambda(N) \\ m_1 \otimes \cdots \otimes m_k & \longmapsto & u(m_1) \wedge \cdots \wedge u(m_k) \end{array}\right.$$

qui s'annule sur J_k, donc qui passe au quotient en

$$\Lambda^k(u) : \left\{\begin{array}{ccc} \Lambda^k(M) & \longrightarrow & \Lambda(N) \\ m_1 \wedge \cdots \wedge m_k & \longmapsto & u(m_1) \wedge \cdots \wedge u(m_k) \end{array}\right. .$$

On définit alors $\Lambda(u)$ sur $\Lambda(M)$ par les $\Lambda^k(u)$. L'unicité vient toujours du caractère générateur des $m_1 \wedge \cdots \wedge m_k$.

Pour avoir $\Lambda(v \circ u)$, il suffit d'invoquer l'unicité en remarquant que $\Lambda(v) \circ \Lambda(u)$ fonctionne.

2.4.3 Algèbre extérieure d'une somme directe finie

Théorème.
Soient $M_1, ..., M_n$ des modules. On a un isomorphisme canonique d'algèbres :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \Lambda(M_1 \oplus \cdots \oplus M_n) & \stackrel{\sim}{\longrightarrow} & \Lambda(M_1) \otimes^g \cdots \otimes^g \Lambda(M_n) \\ m_i & \longmapsto & 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes m_i \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \\ m_1 \cdots m_n & \longleftarrow & m_1 \otimes \cdots \otimes m_n \end{array}\right. .$$

Démonstration.
Posons $M := \bigoplus_{i=1}^n M_i$. On va reprendre exactement le calcul de l'algèbre symétrique d'une somme directe.

[39] Λ est, comme T et S, un foncteur covariant.

Fixons un i. Le module M_i s'injecte naturellement dans M par un φ_i, d'où un morphisme d'algèbres $\Lambda(\varphi_i) : \Lambda(M_i) \hookrightarrow \Lambda(M)$. Comme $\Lambda(M)$ est alternée, on en déduit (par la propriété universelle du produit tensoriel d'algèbres gradué) un morphisme d'algèbres

$$\Phi : \begin{cases} \Lambda(M_1) \otimes^g \cdots \otimes^g \Lambda(M_n) & \longrightarrow & \Lambda(M) \\ m_1 \otimes \cdots \otimes m_n & \longmapsto & m_1 \wedge \cdots \wedge m_n \end{cases}.$$

Inversement, pour construire un morphisme d'algèbres $\Lambda(M) \longrightarrow \bigotimes^g \Lambda(M_i)$, en remarquant que chaque $\Lambda(M_i)$ est alternée, le produit $\bigotimes^g \Lambda(M_i)$ l'est aussi, donc il suffit (par la propriété universelle de l'algèbre extérieure) de construire un morphisme $M \longrightarrow \bigotimes^g \Lambda(M_i)$. Comme $M = \bigoplus M_i$, il suffit de construire des morphismes $M_{i_0} \longrightarrow \bigotimes^g \Lambda(M_i)$. On considère

$$\begin{cases} M_{i_0} \hookrightarrow \Lambda(M_{i_0}) & \longrightarrow & \bigotimes^g \Lambda(M_i) \\ m & \longmapsto & 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes m \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \end{cases}.$$

Vérifions que le morphisme $\Psi : \Lambda(M) \longrightarrow \bigotimes^g \Lambda(M_i)$ ainsi construit est inverse de Φ. Il s'agit de montrer $\Psi\Phi = \mathrm{Id}_{\bigotimes^g \Lambda(M_i)}$ et $\Phi\Psi = \mathrm{Id}_{\Lambda(M)}$.

Montrons que $\Psi\Phi = \mathrm{Id}$ sur un système de générateurs de $\bigotimes^g \Lambda(M_i)$, par exemple ses tenseurs purs. Comme M_i engendre l'algèbre $\Lambda(M_i)$, il suffit de vérifier l'égalité $\Psi\Phi = \mathrm{Id}$ sur les tenseurs $m_1 \otimes \cdots \otimes m_n$ où $m_i \in M_i$ pour tout i :

$$\begin{aligned} \Psi\Phi(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) &= \Psi(m_1 \wedge \cdots \wedge m_n) = \prod_{i=1}^n \Psi(m_i) \\ &= \prod_{i=1}^n (\cdots \otimes 1 \otimes m_i \otimes 1 \otimes \cdots) \\ &= (-1)^d \, m_1 \otimes \cdots \otimes m_n \text{ avec } d \text{ entier.} \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de montrer que d est pair. Pour obtenir ce dernier, on peut expliciter le produit $\prod_{i=1}^n \Psi(m_i)$ de manière verticale :

$$\prod (\cdots \otimes 1 \otimes m_i \otimes 1 \otimes \cdots) = \begin{array}{cc} & m_1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \\ \times & 1 \otimes m_2 \otimes \cdots \otimes 1 \\ \vdots & \\ & \vdots \\ \times & \\ & 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes m_n \end{array}.$$

Pour calculer d, on met tous les traits obliques $\diagup$ possibles entre deux composantes des tenseurs purs du produit ci-dessus. On voit que tous contiennent un 1 (la seule obstruction serait un trait oblique $\diagdown$ dans le mauvais sens reliant deux m_i), lequel est de degré nul, d'où $d = 0$ qui est pair, *CQFD.*

De même, on montre $\Phi\Psi = \mathrm{Id}$ sur des générateurs de $\Lambda(M)$. Les éléments de M sont candidats, mais sont déjà engendrés (linéairement) par les M_i. On regarde donc[40]

$$\Phi\Psi(m_i) = \Phi(\cdots \otimes 1 \otimes m_i \otimes 1 \otimes \cdots) = 1 \wedge \cdots \wedge 1 \wedge m_i \wedge 1 \wedge \cdots \wedge 1 = m_i, \text{ CQFD.}$$

Corollaire

Soit $M := Ae_1 + \cdots + Ae_n$ un module libre de rang n. Alors

$$(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_k})_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n}$$

est une base de $\Lambda^k(M)$ et

$$\operatorname{rg} \Lambda^k(M) = \binom{n}{k}.$$

En particulier,

$$\operatorname{rg} \Lambda^n(M) = 1 \text{ et } \operatorname{rg} \Lambda^{k>n}(M) = 0.$$

[40] se souvenir que $2 \wedge 3 \wedge m$ fait $6m$ et non 0

Démonstration.
Pour un module libre de rang 1 on a

$$\Lambda (Ae) \cong A \oplus Ae$$

(en effet, pour $k \geq 2$, les tenseurs purs de $\Lambda^k (Ae)$ contiennent un $e \wedge e$ qui est nul). On en déduit[41]

$$\begin{array}{rcl} \Lambda (M) & = & \Lambda (Ae_1 \oplus \cdots \oplus e_n) \simeq \bigotimes_{i=1,...,n}^{g} \Lambda (Ae_i) \overset{\text{modules}}{\simeq} \bigotimes_{i=1,...,n} (A \oplus Ae_i) \\ & \simeq & \bigoplus_{k=0}^{n} \bigoplus_{\{j_1,...,j_k\} \subset \{1,...,n\}} A \otimes \cdots \otimes A \otimes Ae_{j_1} \otimes A \otimes \cdots \otimes A \otimes Ae_{j_k} \otimes A \otimes \cdots \otimes A \\ & \simeq & \bigoplus_{k=0}^{n} \bigoplus_{\{j_1,...,j_k\} \subset \{1,...,n\}} Ae_{j_1} \otimes \cdots \otimes Ae_{j_k} \\ & = & \bigoplus_{k=0}^{n} \bigoplus_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} Ae_{j_1} \otimes \cdots \otimes Ae_{j_k}, \end{array}$$

donc $\Lambda^k (M)$ est libre de base $(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_k})_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n}$, donc de rang $\binom{n}{k}$.

2.4.4 Lien avec les applications multilinéaires alternées

Définition.
Une application n-linéaire $\varphi : M^n \longrightarrow N$ est dite alternée[42] *si*

$$\varphi (..., m, ..., m, ...) = 0.$$

On notera $\mathcal{LA}_n (M, N)$ l'ensemble des applications n-linéaires alternées.

Proposition.
Si φ est n-linéaire alternée, alors

$$\varphi (..., x_i, ..., x_j, ...) = -\varphi (..., x_j, ..., x_i, ...) .$$

Démonstration.
Il suffit d'écrire

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \varphi (..., x_i + x_j, ..., x_i + x_j, ...) \\ & = & \varphi \underbrace{(..., x_i, ..., x_i, ...)}_{=0} + \varphi \underbrace{(..., x_j, ..., x_j, ...)}_{=0} + \varphi (..., x_i, ..., x_j, ...) + \varphi (..., x_j, ..., x_i, ...) \end{array}$$

Corollaire.
Si φ est n-linéaire alternée, alors

$$\varphi \left(m_{\sigma(1)}, ..., m_{\sigma(n)}\right) = \varepsilon (\sigma) \varphi (m_1, ..., m_n) .$$

Démonstration.
Déjà fait : $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions.

[41] On oubliera les g en exposant car ils ne concernent pas la structure de module – celle qui nous intéresse ici.
[42] En particulier, une application n-linéaire pour $n = 0$ ou $n = 1$ est toujours alternée.

On en vient à la représentation des applications multilinéaires alternées par l'algèbre extérieure.

Proposition.
On a un isomorphisme canonique de modules

$$\left\{\begin{array}{ccc}\mathcal{LA}_n(M,N) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\Lambda^n(M),N) \\ \varphi & \longmapsto & x_1\wedge\cdots\wedge x_n \mapsto \varphi(x_1,...,x_n) \\ (x_1,...,x_n)\mapsto f(x_1\wedge\cdots\wedge x_n) & \longleftarrow & f\end{array}\right. .$$

Démonstration
Les applications linéaires sus-décrites sont clairement réciproques l'une de l'autre.

2.4.5 Déterminant

Soit $M = Ae_1 \oplus Ae_2 \oplus \cdots \oplus Ae_n$ un module libre de rang $n \geq 1$.
On rappelle que $\Lambda^n(M)$ est alors de rang 1. En particulier, tout endomorphisme de $\mathcal{L}(\Lambda^n(M))$ est une homothétie.

Définition.
On appelle déterminant *d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(M)$ le rapport de l'homothétie $\Lambda^n(u)$, noté*

$$\det u \in A.$$

Proposition.
Soit $u \in \mathcal{L}(M)$ et $(a_{i,j})$ les coefficients de $\mathrm{Mat}_{(e_1,...,e_n)}\, u$. Alors[43]

$$\det u = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)}\cdots a_{n,\sigma(n)}.$$

Démonstration.
On regarde l'image d'un vecteur de base par $\Lambda^n(u)$:

$$\begin{aligned}
[\Lambda^n(u)](e_1\wedge\cdots\wedge e_n) &= u(e_1)\wedge\cdots\wedge u(e_n) \\
&= \sum_{i=1}^n a_{i,1}e_i \wedge\cdots\wedge \sum_{i=1}^n a_{i,n}e_i = \sum_{i_1,...,i_n=1}^n a_{i_1,1}\cdots a_{i_n,n}(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_n}) \\
&= \sum_{\{i_1,...,i_n\}=\{1,...,n\}} a_{i_1,1}\cdots a_{i_n,n}(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_n}) + \sum_{\{i_1,...,i_n\}\subsetneq\{1,...,n\}} a_{i_1,1}\cdots a_{i_n,n}\underbrace{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_n}}_{=0 \text{ car } \exists i_k=i_l} \\
&= \sum_{i\in\mathfrak{S}_n} a_{i_1,1}\cdots a_{i_n,n}(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_n}) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}\left(e_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge e_{\sigma(n)}\right) \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}(\varepsilon(\sigma)\, e_1\wedge\cdots\wedge e_n) = \left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}\right) e_1\wedge\cdots\wedge e_n.
\end{aligned}$$

Reste à voir l'égalité des deux sommes en faisant un changement de variables $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$.

Le calcul ci-dessus peut se généraliser à un terme $x_1\wedge\cdots\wedge x_p$ où p n'est pas nécessairement le rang de M. Introduisons pour cela quelques notations.
Pour $k \geq 0$ on pose $\mathfrak{P}_k$ l'ensemble des parties de $\{1,...,n\}$ de cardinal k.

[43] Le lecteur notera bien que les termes de droite sont indépendants de la base choisie vu que le déterminant l'est.

Si $X = (x_{i,j})$ est une matrice de $M_{p,q}(A)$ et $\left\{ \begin{array}{l} I \subset \{1,...,p\} \\ J \subset \{1,...,q\} \end{array} \right.$, on pose

$$X_{I,J} = (x_{i,j})_{\substack{i\in I \\ j \in J}}$$

la matrice extraite de X selon les lignes d'indice $\in I$ et les colonnes d'indice $\in J$.

Enfin, pour $I = \{i_1 < \cdots < i_k\} \in \mathfrak{P}_k$, on pose

$$e_I := e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}.$$

Proposition.

Soient $x_1, ..., x_p \in M$ et $X \in M_{n,p}(A)$ la matrice des x_i dans la base (e_i). Alors

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_p = \sum_{I \in \mathfrak{P}_p} \det\left(X_{I,\{1,...,p\}}\right) e_I.$$

Démonstration.

Notons $a_{i,j}$ les coefficients de X. On a alors, suivant le calcul précédent :

$$\begin{aligned}
x_1 \wedge \cdots \wedge x_p &= \sum_{\substack{\{i_1,...,i_p\} \subset \{1,...,n\} \\ \#\{i_1,...,i_p\} = p}} a_{i_1,1} \cdots a_{i_p,p} \left(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}\right) \\
&= \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\{i_1,...,i_p\}}} a_{\sigma(i_1),1} \cdots a_{\sigma(i_p),p} \left(e_{\sigma(i_1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(i_p)}\right) \\
&= \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\{i_1,...,i_p\}}} a_{\sigma(i_1),1} \cdots a_{\sigma(i_p),p} \varepsilon(\sigma) \left(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}\right) \\
&= \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(\{i_1,...,i_p\})} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(i_1),1} \cdots a_{\sigma(i_p),p} \right) e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \\
&= \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \left(\det X_{\{i_1,...,i_p\},\{1,...,p\}}\right) e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \\
&= \sum_{I \in \mathfrak{P}_p} \det\left(X_{I,\{1,...,p\}}\right) e_I.
\end{aligned}$$

Observer que la formule est aussi valable pour $p > n$, auquel cas il n'y a pas de $I \subset \{1,...,n\}$ de cardinal $p > n$ et donc la somme de droite est nulle, toute comme $x_1 \wedge \cdots \wedge x_p$.

Proposition.

Soit $u \in \mathcal{L}(M)$ de matrice $X := \operatorname{Mat}_{(e_i)} u$. Alors la matrice de $\Lambda^k(u)$ dans la base $(e_I)_{I \in \mathfrak{P}_k}$ est

$$\operatorname*{Mat}_{(e_I)_{I\in\mathfrak{P}_k}} \Lambda^k(u) = \left(\det(X_{I,J})\right)_{I,J \in \mathfrak{P}_k}.$$

Démonstration.

Soit $J = \{i_1 < \cdots < i_k\}$. Alors $X_{\{1,...,n\},J}$ est la matrice des $u(e_{i_1}), ..., u(e_{i_k})$ dans la base $(e_1, ..., e_n)$. En appliquant la proposition précédente, on obtient

$$\Lambda^k(u)(e_J) = u(e_{i_1}) \wedge \cdots \wedge u(e_{i_k}) = \sum_{I \in \mathfrak{P}_k} \det\left(\left[X_{\{1,...,n\},J}\right]_{I,J}\right) e_I = \sum_{I \in \mathfrak{P}_k} \det(X_{I,J}) e_I.$$

Proposition.

Pour $u \in \mathcal{L}(M)$ et $\lambda, \eta \in A$, on a

$$\det(\lambda \operatorname{Id} + \mu u) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{tr}\left(\Lambda^k(u)\right) \mu^k \lambda^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{I \in \mathfrak{P}_k} \det(X_{I,I}) \right) \mu^k \lambda^{n-k}.$$

Démonstration.
Pour avoir le coefficient d'homothétie de $\Lambda^n(\lambda \operatorname{Id} + \eta u)$, il faut calculer

$$[\Lambda^n(\lambda \operatorname{Id} + \mu u)](e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = (\lambda e_1 + \mu u(e_1)) \wedge \cdots \wedge (\lambda e_n + \mu u(e_n)) = \sum_{k=0}^{n} A_k \lambda^{n-k} \mu^k$$

où les $A_k \in \Lambda^k(M)$ sont à déterminer.
Fixons $k \in \{0, ..., n\}$. Pour obtenir la partie en $\lambda^{n-k}\mu^k$, on prend k termes en $u(e_i)$ et $n-k$ termes en e_i, mettons $u(e_{i_1}), ..., u(e_{i_k})$ avec $I = \{i_1 < \cdots < i_k\} \in \mathfrak{P}_k$. En notant $\overline{I}$ le complémentaire de I dans $\{1, ..., n\}$, la contribution d'un tel I sera alors, à un signe près $\varepsilon(I)$ correspondant au réordonnement des e_{i_l}, de

$$e_{\overline{I}} \wedge \left[\Lambda^k u\right](e_I) = e_{\overline{I}} \wedge \left(\sum_{J \in \mathfrak{P}_k} \det(X_{J,I}) e_J \right) = e_{\overline{I}} \wedge \det(X_{I,I}) e_I$$

car $e_{\overline{I}} \wedge e_J$ est non nul ssi $\overline{I} \cap J = \emptyset$, *i. e.* ssi $J = I$.
Ainsi

$$\begin{aligned} A_k &= \sum_{I \in \mathfrak{P}_k} \varepsilon(I) e_{\overline{I}} \wedge \det(X_{I,I}) e_I = \sum_{I \in \mathfrak{P}_k} \det(X_{I,I}) (e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) \\ &= \left(\sum_{I \in \mathfrak{P}_k} \det(X_{I,I}) \right) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n = \operatorname{tr}\left(\Lambda^k u\right) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n. \end{aligned}$$

Application.
Calcul du polynôme caractéristique :

$$\chi_A = \det(X \operatorname{Id} - u) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\sum_{I \in \mathfrak{P}_k} \det(A_{I,I}) \right) X^{n-k}.$$

3 Annexe

3.1 Le morphisme $(\prod M_i) \otimes (\prod N_j) \longrightarrow \prod (M_i \otimes N_j)$ n'est en général ni injectif ni surjectif

On note Π la flèche naturelle $\left\{ \begin{array}{ccc} (\prod M_i) \otimes (\prod N_j) & \longrightarrow & \prod_{i,j} M_i \otimes N_j \\ (m_i) \otimes (n_j) & \longmapsto & (m_i \otimes n_j) \end{array} \right.$.

La flèche Π n'est en général pas surjective .
On remarque judicieusement que, pour des espaces vectoriels de dimension finie, il faut au moins n tenseurs purs pour représenter un endomorphisme de rang n via l'isomorphisme $\left\{ \begin{array}{ccc} V^* \otimes W & \longrightarrow & \mathcal{L}(V, W) \\ l \otimes w & \longmapsto & l(\cdot) w \end{array} \right.$. On va donc chercher un produit $\prod_{m,n} E_m \otimes F_n$ où apparait une composante $\mathcal{L}(V)$ avec $\dim V$ aussi grand que l'on veut.

Prendre par exemple $\left\{\begin{array}{l}E_n := F_n^* \\ F_n := \mathbb{R}^n\end{array}\right.$. Le produit $\prod_{m,n} E_m \otimes F_n$ contient des $E_n \otimes F_n \cong \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, donc on peut piocher dedans un élément ξ dont la coordonnée selon $E_n \otimes E_n$ soit de rang n exactement. Si ξ est l'image par Π d'une somme de p tenseurs purs, alors la composante selon $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{p+1}\right)$ est engendrée par p termes, donc est de rang au plus p, ce qui est absurde.

La flèche Π n'est en général pas injective.

On se place dans l'anneau $A := {}^{\mathbb{R}[x_0,x_1,x_2,...]}\!\big/_{(x_i x_j)_{i \neq j}}$. On considère l'idéal $I := (x_0)$ dans A et on s'intéresse aux produits

$$\left\{\begin{array}{c}\left(\prod_{i\in\{0\}} I\right) \otimes \left(\prod_{j\in\mathbb{N}^*} A\right) \cong I \otimes A^{\mathbb{N}^*} \\ \prod_{\substack{i\in\{0\} \\ j\in\mathbb{N}^*}} I \otimes A \cong (I \otimes A)^{\mathbb{N}^*} \cong A^{\mathbb{N}^*}\end{array}\right. .$$

La flèche Π s'exprime donc par

$$\left\{\begin{array}{ccccc} I \otimes A^{\mathbb{N}^*} & \longrightarrow & (I \otimes A)^{\mathbb{N}^*} & \xrightarrow{\sim} & I^{\mathbb{N}^*} \\ (\iota) \otimes (a_n) & \longmapsto & (\iota \otimes a_n) & \longmapsto & (\iota a_n)\end{array}\right.$$

et envoie l'élément $\xi := x_0 \otimes (x_1, x_2, ...)$ sur $(x_0 x_n)_{n\geq 1} = 0$. On va montrer que ξ est non nul, ce qui prouvera la non-injectivité de Π.

Considérons μ la multiplication par x_0 dans A, d'image I. Pour déterminer son noyau, on introduit l'idéal $J := (x_1, x_2, ...)$. On a clairement $IJ = 0$; l'inclusion $J \subset \operatorname{Ker} \mu$ est donc immédiate. De plus, on voit aisément que $A = I + J = A \oplus A x_0 \oplus A x_0^2 \oplus \cdots \oplus J$, donc si un élément $k = \sum a_n x_0^n + j$ est dans $\operatorname{Ker} \mu$, alors $\sum a_n {x_0}^{n+1} = 0$ modulo $(x_p x_q)_{p\neq q}$, d'où $(a_n) = 0$ (en faisant $x_i = 0$ pour tout $i \geq 1$) et $k \in J$. Finalement, μ induit un isorphisme $I \cong {}^{A}\!\big/_{J}$. D'après les calculs de quotients, on peut en déduire

$$I \otimes A^{\mathbb{N}^*} \overset{\mu\otimes\mathrm{Id}}{\cong} {}^{A}\!\big/_{J} \otimes A^{\mathbb{N}^*} \cong {}^{A^{\mathbb{N}^*}}\!\big/_{JA^{\mathbb{N}^*}}.$$

Regardons notre ξ au travers de ces d'isomorphismes :

$$\xi = x_0 \otimes (x_1, x_2, ...) \longleftrightarrow (1 \mod J) \otimes (x_1, x_2, ...) \longleftrightarrow (x_1, x_2, ...) \mod JA^{\mathbb{N}^*}.$$

Pour avoir ξ non nul, il suffit donc de montrer que la suite $(x_1, x_2, ...)$ n'est pas dans $JA^{\mathbb{N}^*}$. Supposons que ce soit le cas, disons $(x_1, x_2, ...) = js$ où $s \in A^{\mathbb{N}^*}$. j se décompose selon les $x_1, x_2, ...$, mettons $j = \sum_{p=1}^n a_p x_p$. On a donc

$$(x_1, x_2, ...) = js = \sum_{p=1}^n a_p x_p s = \sum_{p=1}^n s^p x_p \text{ où } s^p = a_p s.$$

Mais alors $x_{n+1} = \sum_{p=1}^n s_{n+1}^p x_p$, ce qui manifsestement impossible.

Observer le mal qu'on s'est donné pour montrer qu'un tenseur pur était non nul : ce n'est vraiment pas évident en général...

3.2 Le morphisme de Kronecker n'est en général ni injectif ni surjectif

On notera Θ l'homomorphisme de Kronecker $\begin{array}{c}\mathcal{L}(M, M') \\ \otimes \\ \mathcal{L}(N, N')\end{array} \longrightarrow \mathcal{L}\begin{pmatrix} M & & M' \\ \otimes & , & \otimes \\ N & & N'\end{pmatrix}$.

Soit I un ensemble. On rappelle que, en notant δ_i est la famille « Dirac en i », le dual du A-module $A^{(I)}$ est explicitement A^I selon l'isomorphisme canonique

$$\left\{\begin{array}{ccc}\left(A^{(I)}\right)^* & \xrightarrow{\sim} & A^I \\ f & \longmapsto & (f(\delta_i)) \\ \delta_i \mapsto \lambda_i & \longleftarrow & \overrightarrow{\lambda}\end{array}\right. .$$

À l'aide de ce rappel, montrons que, pour $(M, M') = (N, N') = \left(A^{(\mathbb{N})}, A\right)$, notre Θ s'identifie à la flèche

$$\begin{cases} A^{\mathbb{N}} \otimes A^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & A^{\mathbb{N}^2} \\ \overrightarrow{\lambda} \otimes \overrightarrow{\mu} & \longmapsto & \left(\lambda_p \mu_q\right)_{p,q} \end{cases}.$$

On commence par expliciter le module d'arrivée :

$$\Theta : \begin{cases} M^* \otimes N^* & \longrightarrow & \mathcal{L}\begin{pmatrix} M & A \\ \otimes & , \otimes \\ N & A \end{pmatrix} & \xrightarrow{\sim} & (M \otimes N)^* \\ f \otimes g & \longmapsto & f \widetilde{\otimes} g & \longmapsto & x \otimes y \mapsto f(x)\, g(y) \end{cases}.$$

Le dual de M s'explicite selon l'isomorphisme $\begin{cases} \left(A^{(\mathbb{N})}\right)^* & \xrightarrow{\sim} & A^{\mathbb{N}} \\ f & \longmapsto & (f(\delta_n)) \\ \delta_n \mapsto \lambda_n & \longleftarrow & \overrightarrow{\lambda} \end{cases}$,d'où un isomorphisme

$$\Phi : \begin{cases} A^{\mathbb{N}} \otimes A^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\sim} & M^* \otimes N^* \\ \overrightarrow{u} \otimes \overrightarrow{v} & \longmapsto & [\delta_n \mapsto \lambda_n] \otimes [\delta_n \mapsto \lambda_n] \end{cases}.$$

Par ailleurs, on peut calculer

$$M \otimes N = A^{(\mathbb{N})} \otimes A^{(\mathbb{N})} = \left(\bigoplus_{\mathbb{N}} A\right) \otimes \left(\bigoplus_{\mathbb{N}} A\right) \cong \bigoplus_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} A \otimes A \cong \bigoplus_{\mathbb{N}^2} A = A^{\left(\mathbb{N}^2\right)}.$$

Pour voir comment agit l'isomorphisme ci-dessus, regardons son action sur les générateurs $\delta_p \otimes \delta_q$. En se rappelant que le Dirac en k n'est autre que le réel 1 plongé à l'indice k dans la somme $\bigoplus_{\mathbb{N}} A$ ou $\bigoplus_{\mathbb{N}^2} A$ (ce que nous noterons 1_k), on voit que nos deux isomorphismes successifs ont pour action

$$\delta_p \otimes \delta_q = 1_p \otimes 1_q \longmapsto [1 \otimes 1]_{p,q} \longmapsto 1_{p,q} = \delta_{p,q}.$$

On peut donc expliciter $\begin{cases} M \otimes N & \xrightarrow{\sim} & A^{\left(\mathbb{N}^2\right)} \\ \delta_p \otimes \delta_q & \longmapsto & \delta_{p,q} \end{cases}$. Lorsque l'on passe dans le dual, on obtient un isomorphisme

$$\Psi : \begin{cases} (M \otimes N)^* & \xrightarrow{\sim} & \left(A^{\left(\mathbb{N}^2\right)}\right)^* & \xrightarrow{\sim} & A^{\mathbb{N}^2} \\ f & \longmapsto & \delta_{p,q} \mapsto f(\delta_p \otimes \delta_q) & \longmapsto & \left(f(\delta_{p,q})\right)_{p,q} \end{cases}.$$

Finalement, en recollant Φ, Θ, Ψ, on obtient une flèche explicite

$$\begin{cases} A^{\mathbb{N}} \otimes A^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\sim} & M^* \otimes N^* & \xrightarrow{\Theta} & (M \otimes N)^* & \xrightarrow{\sim} & A^{\mathbb{N}^2} \\ \overrightarrow{\lambda} \otimes \overrightarrow{\mu} & \longmapsto & [\delta_p \mapsto \lambda_p] \otimes \left[\delta_q \mapsto \mu_q\right] & \longmapsto & \delta_p \otimes \delta_q \mapsto \lambda_p \lambda_q & \longmapsto & \left(\lambda_p \mu_q\right)_{p,q} \end{cases}, \textit{CQFD.}$$

La flèche Θ n'est en général pas surjective.

Considérons la suite diagonale $\left(\delta_p^q\right)_{p,q}$ à l'arrivée. Si Θ était surjective, $\left(\delta_p^q\right)_{p,q}$ serait atteinte par une somme de r tenseurs purs $\overrightarrow{\lambda^i} \otimes \overrightarrow{\mu^i}$, mettons $\sum_{i=1}^r \lambda_p^i \mu_q^i = \delta_p^q$ pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. En ne regardant que les relations pour $0 \leq p, q \leq r$ et en faisant varier q, on obtient $e_p = \sum_i \lambda_p^i \mu^i$ où $(e_0, ..., e_r)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^{r+1}$. On en déduit $\mathrm{Vect}_{p=0,...,r}(e_p) \subset \mathrm{Vect}_{i=1,..,r}\left(\mu^i\right)$, d'où la contradiction en passant au dimensions.

La flèche Θ n'est en général pas injective.

On considère (presque) le même anneau $A := {}^{\mathbb{R}[x_0,x_1,x_2,...]}\!\big/_{(x_i x_j)}$ qu'au paragraphe prédécent et on s'intéresse à l'élément $\xi := (x_0, x_1, ...)$ de $A^{\mathbb{N}}$. L'élément $\xi \otimes \xi$ est clairement annulé par la flèche ci-dessus puisque d'image $\left(x_p x_q\right)_{p,q} = 0$ dans $A^{\mathbb{N}^2}$. On va montrer que $\xi \otimes \xi$ est non nul en construisant une forme linéaire l'envoyant sur 1 dans $\mathbb{C}$.

Construisons pour commencer une forme linéaire φ sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ nulle sur $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ et envoyant $x := (1, 1, ...)$ sur 1. Dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, le vecteur x n'est pas lié à $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$, donc on peut écrire (en considérant un supplémentaire S)

$$\mathbb{C}^{\mathbb{N}} = \mathbb{C}^{(\mathbb{N})} \oplus \mathbb{C}x \oplus S = \mathbb{C}x \oplus T$$

où T est un sev contenant $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$. En prenant une base de ce dernier, la forme linéaire coordonée x^* dans cette base (à laquelle on a rajouté x) convient.

Observons à présent qu'un élément de A s'écrit $\lambda_0 + \sum_{\text{finie}} \lambda_n \overline{x_n}$ (modulo $(x_i x_j)$) où les λ_n sont uniques. On peut donc parler des formes linéaires coordonnées x_n^* sur A pour tout $n \geq 0$. Montrons que ces dernières sont A-linéaires où $\mathbb{C}$ est vu comme le module ${}^{A}\!/_{J}$ avec J l'idéal $(x_1, x_2, ...)$ (on récupère simplement le « terme constant » d'un polynôme de A). Les x_n^* étant additives car $\mathbb{C}$-linéaires, il s'agit de montrer que $x_n^*(ab) = a \cdot x_n^*(b)$ pour tous $a, b \in A$. Par additivité, on se ramène au cas où a et b sont éléments de la base $\left(\overline{1}, \overline{x_1}, \overline{x_2}, ...\right)$. Si $a = 1$ ou $b = 1$, la $\mathbb{C}$-linéarité conclut. Pour $(a, b) = (x_p, x_q)$, le produit ab est nul, tout comme le résultat $a \cdot (?)$, *CQFD.*

On définit ensuite l'application diagonale A-linéaire

$$\Delta : \left\{ \begin{array}{ccccccc} A^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} & \overset{\varphi}{\longrightarrow} & \mathbb{C} & \xrightarrow{\sim} & {}^{A}\!/_{J} \\ (a_n) & \longmapsto & (x_n^*(a_n)) & \longmapsto & \varphi(x_n^*(a_n)) & & \\ \xi & \longmapsto & (1, 1, ...) & \longmapsto & 1 & \longmapsto & \overline{1} \end{array} \right. .$$

Prendre son carré tensoriel donne une application linéaire

$$\Delta \otimes \Delta : \left\{ \begin{array}{ccccccc} A^N \otimes A^N & \longrightarrow & {}^{A}\!/_{J} \otimes {}^{A}\!/_{J} & \xrightarrow{\sim} & {}^{A}\!/_{J+J} = {}^{A}\!/_{J} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C} \\ \xi \otimes \xi & \longmapsto & \overline{1} \otimes \overline{1} & \longmapsto & \overline{1} & \longmapsto & 1 \end{array} \right. , \textit{CQFD.}$$

Encore une fois, ce n'a pas été une mince affaire de montrer que le tenseur $\xi \otimes \xi$ était non nul.

3.3 Représentation d'un foncteur, problème universel

On généralise ici le problème posé par la recherche d'un produit tensoriel.

On supposera connues les notions de catégories et de foncteurs. Le lecteur pourra se reporter pour plus de détail au second chapitre de l'ouvrage **Algèbres et théories galoisiennes** de R. et A. Douady.

On fixe pour la suite $\mathcal{C}$ une catégorie et $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{ENS}$ un foncteur (covariant) vers la catégorie des ensembles.

Définition.
On dit que F est représentable *s'il est isomorphe au foncteur* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R, \cdot)$ *induit*[44] *par un certain objet R de $\mathcal{C}$.*
On dit alors que l'objet R représente[45] *le foncteur F.*

En d'autres termes, R représente F ssi on a des bijections

$$F(\cdot) \simeq \mathrm{Hom}(R, \cdot)$$

qui commutent aux morphismes $F(\varphi)$ induits par les morphismes φ de $\mathcal{C}$:

$$\begin{array}{ccc} F(O) & \simeq & \mathrm{Hom}(R, O) \\ \downarrow F(\varphi) & \circlearrowleft & \varphi \circ \downarrow \\ F(O') & \simeq & \mathrm{Hom}(R, O') \end{array} .$$

Par exemple, lorsque $\mathcal{C}$ est la catégorie des modules, nous avons rencontré plusieurs foncteurs représentables :

$$F(\cdot) = \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{Bil}(M \times N; \cdot) \\ \mathcal{L}_n\left(\prod_{i=1}^n M_i; \cdot\right) \\ \mathcal{LS}_n(M; \cdot) \\ \mathcal{LA}_n(M; \cdot) \end{array} \right. \quad \text{avec } M, N, M_i \text{ des modules fixés.}$$

Les deux premiers sont représentés par $M \otimes N$ et $\bigotimes M_i$, les deux derniers par $S(M)$ et $\Lambda(M)$.

[44] On aurait pris $\mathrm{Hom}(\cdot, R)$ pour représenter les foncteurs *contra*variants.
[45] R comme « **r**eprésente »

Proposition.
Suivant les notations ci-dessus, un tel objet R est unique à isomorphisme près.

Démonstration.
Soient R et S deux tels objets. On a donc des bijections $\operatorname{Hom}(S,O) \simeq F(O) \simeq \operatorname{Hom}(R,O)$.

Prendre $O = R$ permet d'écrire $\operatorname{Hom}(R,O) = \operatorname{End} R$, dans lequel nous avons un élément distingué – l'identité. Notons ρ son image dans $\operatorname{Hom}(S,R)$ par la bijection ci-dessus.

De même, faire $O = S$ permet de regarder Id_S comme un élément σ de $\operatorname{Hom}(R,S)$. En appliquant le foncteur F sur $\sigma : R \longrightarrow S$, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{End} R & \simeq & F(R) & \simeq & \operatorname{Hom}(S,R) \\ \sigma\circ \downarrow & & \downarrow & & \sigma\circ \downarrow \\ \operatorname{Hom}(R,S) & \simeq & F(S) & \simeq & \operatorname{End} S \end{array}.$$

Regardons l'image de Id_R dans $\operatorname{End} S$:

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Id} & \longmapsto & \rho \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sigma & \longmapsto & \operatorname{Id} = \sigma\rho \end{array}.$$

Un argument de symétrie immédiat nous donne $\rho\sigma = \operatorname{Id}$, d'où un isomorphisme $\sigma : R \longrightarrow S$, *CQFD*.

Évidemment, dès que $\mathcal{C} = \mathcal{ENS}$, les automorphismes deviennent vite très nombreux, ce qui empêche de croire une seule seconde à l'unicité de l'isomorphisme ci-dessus. On s'en sort en particularisant un élément de $F(R)$.

Définition.
Soit $r \in F(R)$. On dit que le couple (R,r) représente *F si*

$$\forall O,\ \forall y \in F(O),\ \exists! \varphi : R \longrightarrow O,\ r \overset{F(\varphi)}{\mapsto} y.$$

La terminologie est cohérente : le foncteur F est alors représentable par

$$\left\{ \begin{array}{ccc} F(\cdot) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(R,\cdot) \\ y & \longmapsto & \varphi_y \\ F(\psi)(r) & \longleftarrow & \psi \end{array} \right. .$$

Pour vérifier la commutativité du diagramme $\begin{array}{ccc} F(O) & \cong & \operatorname{Hom}(R,O) \\ \downarrow F(f) & \circlearrowleft & f\circ \downarrow \\ F(O') & \cong & \operatorname{Hom}(R,O') \end{array}$, on regarde l'image d'un $\psi \in \operatorname{Hom}(R,O)$ en haut à droite :

$$\begin{array}{ccc} F(\psi)(r) & \longleftarrow & \psi \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(f)(F(\psi)(r)) & & \\ \overset{?}{=} F(f\circ\psi)(r) & \longleftarrow & f\circ\psi \end{array}, \text{ ok car } F \text{ est un foncteur.}$$

La recherche d'un couple (R,r) représentant un foncteur F est appelée *problème universel*.

Si l'on dispose d'une solution (R,r) au problème universel, la donnée de la bijection ci-dessus est appelée *propriété universelle*.

Avant de regarder les sept propriétés universelles que nous avons énoncées dans ce cours, nous allons montrer l'unicité d'une solution au problème universel.

Soient (R,r) et (S,s) représentent F. Puisque (R,s) représente F, on applique la définition à $O := S$ et $y := s$ qui est bien dans $F(O)$: il y a un unique morphisme $\varphi : R \longrightarrow S$ tel que $r \overset{F(\varphi)}{\mapsto} s$. Ce dernier est en fait un isomorphisme.

Proposition – Définition.
Le morphisme φ ci-dessus est un isomorphisme, appelé morphisme canonique *de R sur S.*

Si (T,t) représente F et si $R \xrightarrow{\varphi} S \xrightarrow{\psi} T$ sont les morphismes canoniques, alors $R \xrightarrow{\psi\varphi} T$ est le morphisme canonique.

Démonstration.

Le second point découle trivialement de l'unicité des morphismes.

On l'applique ensuite à $(T,t) = (R,r)$: dans le cas $R \xrightarrow{\varphi} S \xrightarrow{\psi} R$, on obtient $\psi\varphi = \mathrm{Id}_S$, dans le cas $S \xrightarrow{\psi} R \xrightarrow{\varphi} S$, on obtient $\psi\varphi = \mathrm{Id}_R$, *CQFD*.

Passons maintenant aux exemples.

1. **Produit tensoriel de modules.** La catégorie $\mathcal{C}$ est celle des modules, le foncteur F est $\mathrm{Bil}\,(M \times N, \cdot)$ où M et N sont des modules fixés, il est représenté par $M \otimes N$ et l'on dispose d'une projection canonique $\pi \in \mathrm{Bil}\,(M \times N, M \otimes N)$: tout est là.

   Vérifions que le couple $(M \otimes N, \pi)$ est solution au problème universel. Il suffit de réécrire la définition de « $(M \otimes N, \pi)$ représente F » en explicitant tout :

$$\forall P \text{ module, } \forall f \in \mathrm{Bil}\,(M,N;P)\,,\ \exists!\overline{f} : M \otimes N \longrightarrow P,$$
$$F\left(\overline{f}\right) : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{Bil}\,(M,N;M\otimes N) & \xrightarrow{\overline{f}\circ} & \mathrm{Bil}\,(M,N;P) \\ \pi & \longmapsto & f \end{array} \right. ,$$

   ce qui est manifestement juste puisqu'un tel f se factorise d'une unique manière en $\overline{f} \circ \pi$.

2. **Produit tensoriel d'algèbres.** La catégorie $\mathcal{C}$ est celle des algèbres, le foncteur F est $\{f \in \mathrm{Bil}\,(B \times C, \cdot)\ \text{multiplicativ}$ où B et C sont des algèbres fixées, il est représenté par $B \otimes C$ et l'on dispose d'une projection canonique $\pi \in \mathrm{Bil}\,(B \times C, B \otimes C)$ multiplicative.

   Vérifions que le couple $(B \otimes C, \pi)$ est solution au problème universel en revenant à la définition de « $(B \otimes C, \pi)$ représente F » :

$$\forall D \text{ algèbre, } \forall f \in \mathrm{Bil}\,(B,C;D)\ \text{ multiplicative, } \exists!\overline{f} : B \otimes C \longrightarrow D,$$
$$F\left(\overline{f}\right) : \left\{ \begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \varphi \in \mathrm{Bil}\,(B,C;B\otimes C) \\ \text{multiplicatif} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\overline{f}\circ} & \left\{ \begin{array}{c} \varphi \in \mathrm{Bil}\,(B,C;D) \\ \text{multiplicatif} \end{array} \right\} \\ \pi & \longmapsto & f \end{array} \right. ,$$

   ce qui est juste au vu de la factorisation (unique) $\overline{f} = f \circ \pi$.

3. **Produit tensoriel d'algèbres graduées.** La catégorie $\mathcal{C}$ est toujours celle des algèbres, le foncteur F est $\{f \in \mathrm{Bil}\,(B \times C, \cdot)\ \text{ antimultiplicative}\}$ où B et C sont des algèbres graduées fixées, il est représenté par $B \otimes^g C$ et l'on dispose d'une projection canonique $\pi \in \mathrm{Bil}\,(B \times C, B \otimes^g C)$ antimultiplicative.

   Pour vérifier que le couple $(B \otimes C, \pi)$ est solution au problème universel, on réécrit « $(B \otimes^g C, \pi)$ représente F » :

$$\forall D \text{ algèbre, } \forall f \in \mathrm{Bil}\,(B,C;D)\ \text{ antimultiplicative, } \exists!\overline{f} : B \otimes^g C \longrightarrow D,$$
$$F\left(\overline{f}\right) : \left\{ \begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \varphi \in \mathrm{Bil}\,(B,C;B\otimes^g C) \\ \text{antimultiplicatif} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\overline{f}\circ} & \left\{ \begin{array}{c} \varphi \in \mathrm{Bil}\,(B,C;D) \\ \text{antimultiplicatif} \end{array} \right\} \\ \pi & \longmapsto & f \end{array} \right. ,$$

   ce que nous savons vrai.

   Bonus : dans la catégorie des algèbres graduées, on sait que le morphisme d'algèbres $\overline{f}$ est gradué (puisque $f(\cdot,1)$ et $f(1,\cdot)$ le sont), donc tout fonctionne encore.

4. **Algèbre tensorielle.** La catégorie $\mathcal{C}$ est celle des algèbres, le foncteur F est $\mathcal{L}(M,\cdot)$ où M est un module fixé, F est représenté par $T(M)$ et l'on a une injection canonique $\iota \in \mathcal{L}(M, T(M))$.

   Dire « $(T(M), \iota)$ représente F », c'est dire

$$\forall B \text{ algèbre, } \forall f \in \mathcal{L}(M,B)\,,\ \exists!\overline{f} : T(M) \longrightarrow B,$$
$$F\left(\overline{f}\right) : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(M,T(M)) & \xrightarrow{\overline{f}\circ} & \mathcal{L}(M,B) \\ \iota & \longmapsto & f \end{array} \right. ,$$

   ce qui est est vrai puisque prolonger f s'écrit $f = \overline{f} \circ \iota$ et que le $\overline{f}$ du cours est unique à vérifier cela.

5. **Algèbre symétrique.** La catégorie $\mathcal{C}$ est celle des algèbres commutatives (ou celle des algèbres dont les morphismes sont les morphismes d'algèbres commutant à l'arrivée), le foncteur F est $\mathcal{L}(M,\cdot)$ où M est un module fixé[46], F est représenté par $S(M)$ et l'on a une injection canonique $\iota \in \mathcal{L}(M, S(M))$.

   Vérifier que $(S(M), \iota)$ est solution au problème universel se fait comme ci-desssus :

$$\begin{aligned} &\forall B \text{ algèbre, } \forall f \in \mathcal{L}(M,B) \text{ commutant à l'arrivée,} \\ &\exists! \overline{f} : S(M) \longrightarrow B \text{ commutant à l'arrivée,} \\ &F\left(\overline{f}\right) : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(M, S(M)) & \xrightarrow{\overline{f}\circ} & \mathcal{L}(M,B) \\ \iota & \longmapsto & f \end{array} \right. , \end{aligned}$$

6. **Algèbre extérieure.** La catégorie $\mathcal{C}$ est celle des algèbres alternées (ou celle des algèbres dont les morphismes sont les morphismes d'algèbres de carré nul à l'arrivée), le foncteur F est $\mathcal{L}(M,\cdot)$ où M est un module fixé[47], F est représenté par $\Lambda(M)$ et l'on a une injection canonique $\iota \in \mathcal{L}(M, \Lambda(M))$.

   On vérifie comme pour $S(M)$ que $(\Lambda(M), \iota)$ est solution au problème universel.

7. **Algèbre polynomiale.** On l'a brièvement évoquée, mais elle apparaît ! La catégorie est celle des algèbres commutatives, le foncteur F est $\cdot^I$où I est un ensemble d'indices, F est représenté par l'algèbre $A\left[(X_i)_{i\in I}\right]$ et l'on une famille canonique $\iota : I \longrightarrow A\left[(X_i)_{i\in I}\right]$ qui à un $i \in I$ associe X_i.

   Il est aisé de vérifier que $\left(A\left[(X_i)_{i\in I}\right], \iota\right)$ représente $\cdot^I$:

$$\begin{aligned} &\forall B \text{ algèbre, } \forall (b_i) \in B^I, \exists! \overline{f} : A\left[(X_i)_{i\in I}\right] \longrightarrow B, \\ &F\left(\overline{f}\right) : \left\{ \begin{array}{ccc} A\left[(X_i)_{i\in I}\right]^I & \xrightarrow{\overline{f}\circ} & B^I \\ \iota & \longmapsto & (b_i) \end{array} \right. \text{, ok pour } \overline{f} : X_i \mapsto b_i. \end{aligned}$$

Le lecteur se rendra compte que beaucoup d'autres constructions usuelles masquent autant de problèmes universels : strucutures quotients, modules libres, algèbres d'un monoïde, complétion d'un evn...

[46] Si l'on ne considère pas des algèbres commutatives, les applications linéaires doivent commuter à l'arrivée.
[47] Si l'on ne considère pas des algèbres alternées, les applications linéaires doivent être de carré nul à l'arrivée.