Une identité classique sur le polynôme caractéristique

Marc SAGE

25 octobre 2005

Table des matières

1 Cas des matrices inversibles **2**

2 Cas des matrices complexes **2**

3 Cas d'un corps quelconque **2**

3.1 Comment inverser une matrice non inversible 2

3.2 Méthode du J_r 3

3.3 Polynômes à une infinité de racines 3

4 Cas d'un anneau commutatif unitaire : utilisation de la comatrice **4**

Résumé

Soit K un corps commutaif et $n \in \mathbb{N}^*$ un entier non nul.

Nous allons montrer que pour deux matrices A et B de $M_n(K)$, on a toujours

$$\chi_{AB} = \chi_{BA}.$$

On généralise ensuite cela à un anneau unitaire quelconque.

1 Cas des matrices inversibles

Si A est inversible, il n'y a pratiquement rien à faire : on utilise la commutativité en dehors du det (dans le corps de base) pour avoir celle sous le χ :

$$\begin{aligned} \chi_{AB} &= \det\left(XI_n - AB\right) = \det\left[A\left(XA^{-1} - B\right)\right] = \left(\det A\right)\det\left(XA^{-1} - B\right) \\ &= \det\left(XA^{-1} - B\right)\left(\det A\right) = \det\left[\left(XA^{-1} - B\right)A\right] = \det\left(XI_n - BA\right) \\ &= \chi_{BA}. \end{aligned}$$

Dans toute la suite, on va chercher à se ramener à ce cas.

2 Cas des matrices complexes

On conclut en invoquant la densité de $GL_n\left(\mathbb{C}\right)$ et la continuité de χ : soit $\left(A_n\right)$ suite de matrices inversibles qui tend vers A, d'où

$$\chi_{AB} = \lim \chi_{A_n B} = \lim \chi_{BA_n} = \chi_{BA}.$$

3 Cas d'un corps quelconque

Soient $A, B \in M_n\left(K\right)$ où K est un corps commutatif quelconque.

3.1 Comment inverser une matrice non inversible

On voudrait bien que A soit inversible pour pouvoir conclure. Qu'à cela tienne, on la rend inversible en la plongeant dans le corps des fractions rationnelles en ses coefficients formalisés, puis on évalue l'identité obtenue en remplaçant les coefficients formels par les vrais coefficients (idée que je tiens de mon professeur M. RANDÉ).

Plus précisément, considérons le corps $K\left(X_{i,j}\right)$ des polynômes en les n^2 indéterminées $X_{i,j}$. On pose

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} X_{1,1} & \cdots & X_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n,1} & \cdots & X_{n,n} \end{pmatrix} \text{ et } \widetilde{B} = B$$

vues commes matrices de $M_n\left(K\left(X_{i,j}\right)\right)$. $\widetilde{A}$ est inversible car son déterminant – polynôme en les $X_{i,j}$ – n'est pas le polynôme nul, d'où

$$\det\left(XI_n - \widetilde{A}\widetilde{B}\right) = \det\left(XI_n - \widetilde{B}\widetilde{A}\right).$$

Cette dernière égalité est une égalité de polynôme dans $K\left[X_{i,j}\right]\left[X\right]$, que l'on s'empresse de considérer dans $K\left[X\right]\left[X_{i,j}\right]$, de sorte que l'on puisse remplacer les indéterminées par les coefficients de n'importe quelle matrice A de $M_n\left(K\right)$ et obtenir l'égalité

$$\det\left(XI_n - AB\right) = \det\left(XI_n - BA\right), \textit{ CQFD.}$$

3.2 Méthode du J_r

Si $A = J_r$ pour un $r \in \{0, ..., n\}$, on écrit

$$A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} R & T \\ S & U \end{pmatrix},$$

d'où

$$\begin{cases} AB = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & T \\ S & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ BA = \begin{pmatrix} R & T \\ S & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ S & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \chi_{AB} = \det \begin{pmatrix} XI_r - R & T \\ 0 & XI_{n-r} \end{pmatrix} = \chi_R X^{n-r} \\ \chi_{BA} = \det \begin{pmatrix} XI_r - R & 0 \\ T & XI_{n-r} \end{pmatrix} = \chi_R X^{n-r} \end{cases}.$$

Enfin, A est toujours équivalente à un J_r :

$$A = PJ_rQ$$

avec P et Q inversibles, d'où

$$\chi_{AB} = \chi_{PJ_rQB}\,;$$

il reste à appliquer qui précède pour envoyer P, J_r et Q à droite de B :

$$\chi_{AB} = \chi_{PJ_rQB} = \chi_{J_rQBP} = \chi_{QBPJ_r} = \chi_{BPJ_rQ} = \chi_{BA}.$$

3.3 Polynômes à une infinité de racines

L'idée est de perturber une des matrices pour la rendre inversible et appliquer ce qui précède.

On suppose dans un premier temps que K est infini.
On considère ensuite la différence

$$\delta_t(X) = \chi_{(A-tI_n)B} - \chi_{B(A-tI_n)} \in K[X]$$

où t est un scalaire de K.

D'après la première partie, $\delta_t(X)$ sera nul si la matrice $A - tI_n$ est inversible, *i.e.* ssi son déterminant est non nul. Or, $\det(A - tI_n)$ est un polynôme en t sur le corps K, donc n'admet qu'un nombre fini de racines, et puisque K est infini on a $\det(A - tI_n) \neq 0$ pour une infinité de t. Par conséquent, $\delta_t(X) = 0$ pour cette infinité de $t \in K$.

On considère à présent le polynôme

$$\Delta(T) = \chi_{(A-TI_n)B} - \chi_{B(A-TI_n)} \in K[X][T],$$

que l'on peut toujours voir comme un polynôme sur en T sur le corps $K(X)$. D'après ce qui a été dit, il y a une infinité de $t \in K$ tels que $\chi_{(A-tI_n)B} = \chi_{B(A-tI_n)}$, et quitte à voir ces t dans $K(X)$, Δ admet ainsi une infinité de racines sur le corps $K(X)$, d'où $\Delta = 0$. Appliquer en $T = 0$ conclut.

Dans le cas général, on plonge K dans son corps des fractions rationnelles, lequel est infini (considérer les puissances entières de l'indéterminée), puis on applique ce qui précède.

Le résultat reste même valable pour un anneau intègre (le plonger dans son corps des fractions).
En revanche, le raisonnement précédent ne fonctionne plus si l'on retire l'hypothèse d'intégrité.

4 Cas d'un anneau commutatif unitaire : utilisation de la comatrice

On considère ici R un anneau commutatif unitaire quelconque (R comme "**r**ing") non réduit à 0.
Soient A et B des matrices de $M_n(R)$

On va rendre A inversible comme dans le cas d'un corps, mais sans faire intervenir de fractions rationnelles (de toute façon on ne pourrait pas si R n'était pas intègre car $R(X)$ n'aurait pas de sens). L'idée de la preuve qui suit est à rendre à son inventeur M. RANDÉ.

Considérons l'anneau $R[(X_{i,j})]$ des polynômes en les n^2 indéterminées $X_{i,j}$ et posons

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} X_{1,1} & \cdots & X_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n,1} & \cdots & X_{n,n} \end{pmatrix} \text{ et } \widetilde{B} = B$$

matrices de $M_n(R[(X_{i,j})])$.

En notant $A' = {}^t\operatorname{com}\widetilde{A}$, on rappelle que

$$\widetilde{A}A' = A'\widetilde{A} = \left(\det\widetilde{A}\right) I_n,$$

ce qui permet d'obtenir

$$\begin{aligned}
\left(\det\widetilde{A}\right)^n \det\left(XI_n - \widetilde{A}\widetilde{B}\right) &= \det\left[X\left(\det\widetilde{A}\right)I_n - \left(\det\widetilde{A}\right)\widetilde{A}\widetilde{B}\right] \\
&= \det\left[X\widetilde{A}A' - \left(\det\widetilde{A}\right)\widetilde{A}\widetilde{B}\right] \\
&= \left(\det\widetilde{A}\right) \times \det\left[XA' - \left(\det\widetilde{A}\right)\widetilde{B}\right] \\
&= \det\left[XA' - \left(\det\widetilde{A}\right)\widetilde{B}\right] \times \left(\det\widetilde{A}\right) \\
&= \det\left[XA'\widetilde{A} - \left(\det\widetilde{A}\right)\widetilde{B}\widetilde{A}\right] \\
&= \det\left[X\left(\det\widetilde{A}\right)I_n - \left(\det\widetilde{A}\right)\widetilde{B}\widetilde{A}\right] \\
&= \left(\det\widetilde{A}\right)^n \det\left(X - \widetilde{B}\widetilde{A}\right).
\end{aligned}$$

La prochaine étape est de montrer que $\left(\det\widetilde{A}\right)^n$ n'est pas un diviseur de 0 dans $R[(X_{i,j})]$, ce qui permettra de simplifier le $\left(\det\widetilde{A}\right)^n$ dans l'identité ci-dessus puis de remplacer les $X_{i,j}$ par des coefficients $a_{i,j}$ quelconques pour obtenir le résultat voulu.

Dans le cas d'un corps, c'était facile car $\det\widetilde{A} \neq 0$ était automatiquement inversible. Dans le cas d'un anneau unitaire, c'est plus subtil. On raisonne par récurrence sur n.

Pour $n = 1$, il est facile de voir que $\det\widetilde{A} = X_{1,1}$ n'est pas un diviseur de 0 dans $R[X_{1,1}]$.

Pour $n \geq 2$, on écrit

$$\begin{aligned}
\det\widetilde{A} &= \begin{vmatrix} X_{1,1} & \cdots & X_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n,1} & \cdots & X_{n,n} \end{vmatrix} \\
&= aX_{n,n} + b
\end{aligned}$$

(en développant selon la dernière ligne/colonne) où

$$a = \begin{vmatrix} X_{1,1} & \cdots & X_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n-1,1} & \cdots & X_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

et b ne contiennent pas la variable $X_{n,n}$. Si jamais $\det\widetilde{A}$ divisait 0 dans $R[(X_{i,j})]$, on aurait

$$(aX_{n,n} + b)\left(\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n \geq 0} \lambda_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} X_{n,1}^{\alpha_1} \ldots X_{n,n-1}^{\alpha_{n-1}} X_{n,n}^{\alpha_n}\right) = 0$$

avec les $\lambda_{\alpha_1,...,\alpha_n}$ dans $R\left[(X_{i,j})_{i,j<n}\right]$ non tous nuls. En regardant le coefficient dominant en $X_{n,n}$, mettons $X_{n,n}^{d+1}$ où $d \geq 0$, on obtient

$$\sum_{\alpha_1,...,\alpha_{n-1}\geq 0} a\lambda_{\alpha_1,...,\alpha_{n-1},d} X_{n,1}^{\alpha_1}...X_{n,n-1}^{\alpha_{n-1}} = 0$$

où l'un des $\lambda_{\alpha_1,...,\alpha_{n-1},d}$ est non nul, puis

$$a\lambda_{\alpha_1,...,\alpha_{n-1},d} = 0$$

pour tout $(\alpha_1,...,\alpha_{n-1})$, en particulier pour celui tel que $\lambda_{\alpha_1,...,\alpha_{n-1},d} \neq 0$. Ceci est *impossible* car par hypothèse de récurrence a n'est pas un diviseur de 0 dans $R\left[(X_{i,j})_{i,j<n}\right]$, *CQFD.*