Familles sommables

Marc SAGE

18 novembre 2004

Table des matières

Résumé

Etant donnée une famille finie de réels $(x_i)_{i\in I}$, on sait facilement définir la somme $\sum_{i\in I} x_i$ de cette famille, comformément à notre intuition, en ajoutant les x_i un par un dans n'importe quel ordre. Qu'en est-il des familles infinies ? Les séries nous montrent les problèmes liés non seulement à la convergence mais aussi à l'ordre de sommation (cas des séries semi-convergentes). Les familles sommables proposent un cadre agréable pour s'affranchir de ces contraintes.

1 Familles positives

On ne considère dans cette partie que des familles $(x_k)_{k\in\mathcal{D}}$ *réelles positives* à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ indexées par un ensemble $\mathcal{D}$ (comme **d**omaine). En pratique, $\mathcal{D}$ sera la plupart du temps $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$, d'où le choix de la variable k pour parcourir $\mathcal{D}$. Le choix de la terminologie *domaine* (au lieu d'*ensemble* tout simplement) sera justifié en temps voulu.

On pourra être amené, pour des raisons de commodité, à considérer $\overline{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ dont on rappelle les propriétés basiques : $\forall a \in \mathbb{R}, a < \infty$ (c'est-à-dire $\infty = \max \overline{\mathbb{R}^+}$), $\infty + a = a + \infty = \infty$, et $\infty + \infty = \infty$.

1.1 Définitions

Définition.
• *On dit qu'une famille de réels positifs* $(x_k)_{k\in\mathcal{D}}$ *est* sommable *si*

$$\exists M > 0, \forall A \text{ fini dans } \mathcal{D}, \sum_{i\in A} x_i < M.$$

• *On définit la* somme *de la famille* $(x_k)_{k\in\mathcal{D}}$ *(sommable ou non) par :*

$$\sum_{k\in\mathcal{D}} x_k = \sup \sum_{i\in A} x_i$$

où le supremum court sur tous les sous-ensembles finis A *de* $D = \mathcal{D}$.

Observer que la somme $\sum_{k\in\mathcal{D}} x_k$ est finie si et seulement si la famille est sommable et vaut ∞ dans le cas contraire. Noter également la cohérence dans le cas d'une famille finie. On a de plus la propriété évidente :

$$\forall \mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}, \sum_{k\in\mathcal{D}'} x_k \leq \sum_{k\in\mathcal{D}} x_k.$$

On se restreindra par la suite au cas où le domaine d'indexation $\mathcal{D}$ est au plus dénombrable. Outre le fait qu'en pratique on a toujours affaire à des familles au plus dénombrables (indexées typiquement par $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^2$), une des raisons est le lemme suivant :

Lemme (L1).
Si $(x_k)_{k\in\mathcal{D}}$ *est sommable, alors* $\{k \in \mathcal{D} \; ; \; x_k \neq 0\}$ *(appelé* support *de la famille) est au plus dénombrable.*

Démonstration.
Soit M un majorant de la somme $\sum_{k\in\mathcal{D}} x_k$. L'ensemble $\mathcal{D}_p := \{k \in \mathcal{D} \; ; \; x_k > 1/p\}$ est alors fini de cardinal $\leq Mp$:

$$M \geq \sum_{k\in\mathcal{D}} x_k \geq \sum_{k\in\mathcal{D}_p} x_k \geq 1/p \; \#\mathcal{D}_p.$$

La réunion $\bigcup_{p=1}^{\infty} \mathcal{D}_p$ est donc dénombrable ; or elle contient le support, *CQFD*.

1.2 Suites exhaustives

Montrons à présent que, pour obtenir la somme d'une famille, on peut sommer les éléments du domaine un par un, et ce dans n'importe quel ordre. Cela fait l'objet du prochain théorème.

Définition.
On appelle suite exhaustive *de* $\mathcal{D}$ *toute suite croissante* (A_n) *de sous-ensembles finis de* D *dont la réunion vaut* $\mathcal{D}$. *On dira alors que* (A_n) *épuise* $\mathcal{D}$, *et on notera* $(A_n) \circlearrowleft \mathcal{D}$.

Remarquer qu'alors $\mathcal{D}$ est au plus dénombrable, et que réciproquement tout ensemble au plus dénombrable $\mathcal{D}$ admet un suite exhaustive : si $\mathcal{D} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{a_n\}$, prendre la suite $(\{a_0, ..., a_k\})_{k\in\mathbb{N}}$.

Lemme (L2).

Si (A_n) épuise $\mathcal{D}$ et si A est un sous-ensemble fini de $\mathcal{D}$, alors $\exists N > 0, A \subseteq A_n$ pour $n > N$.

Démonstration.
Si $A = \{a_1, ..., a_p\}$, chaque a_i est dans $\mathcal{D} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, donc dans un $A_{\varphi(i)}$, et il suffit de prendre $N = \max \varphi(i)$.

Cela justifie le terme de suite exhaustive : la suite "épuise" le domaine $\mathcal{D}$ en recouvrant tout sous-domaine fini à partir d'un certain rang.

Théorème (T1).
Si (x_k) est une famille sur $\mathcal{D}$ (sommable ou non) et si (A_n) épuise $\mathcal{D}$, alors :

$$\sum_{k\in\mathcal{D}} x_k = \lim_{n\infty} \sum_{k\in A_n} x_k.$$

Démonstration.
Considérons pour cela la suite $s_n = \sum_{k\in A_n} x_k$, croissante car les A_n croissent (et car les x_k sont positifs !).
• Si la famille n'est pas sommable, (s_n) n'est pas bornée ; en effet, en considérant par l'absurde un de ses majorants M, on peut trouver un sous-ensemble fini A de $\mathcal{D}$ tel que $\sum_{k\in A} x_k > M$, et d'après le lemme **L2** A est dans les A_n à patir d'un certain rang N, d'où $s_N = \sum_{k\in A_N} x_k \geq \sum_{k\in A} x_k > M$, *absurde* par définition de M. On en tire $\lim\limits_{n\infty} s_n = \infty = \sum_{k\in A_n} x_k$.
• Dans le cas où les x_k sont sommables, (s_n) est bornée par $S = \sum_{k\in\mathcal{D}} x_k$, donc converge vers un réel $l \leq S$. Si $l < S$, posons $\varepsilon = S - l > 0$; par définition de $S = \sum_{k\in\mathcal{D}} x_k$, on peut trouver un sous-ensemble fini A de $\mathcal{D}$ tel que $\sum_{k\in A} x_k > S - \varepsilon = l$, et comme dans le premier cas A est dans les A_n à partir d'un certain rang N, d'où $s_N \geq \sum_{k\in A} x_k > l$, *absurde*. On en tire $\lim\limits_{n\infty} s_n = l = S = \sum_{k\in\mathcal{D}} x_k$.

On a montré mieux que prévu : si on somme les éléments du domaine $\mathcal{D}$ en rajoutant un nombre *fini* d'éléments à chaque étape, alors on obtient la somme de la famille. Il revient au même de dire qu'étant donnée une partition du domaine $\mathcal{D}$ en sous-domaines *finis*, on peut obtenir la somme sur le domaine $\mathcal{D}$ tout entier en ajoutant – dans n'importe quel orde – les sommes sur les sous-domaines considérés.

On peut se demander d'une part si le théorème **T1** admet une réciproque (cf. proposition suivante), d'autre part s'il reste valable si les sous-domaines partitionnant $\mathcal{D}$ ne sont plus supposés finis (cf. théorème de Fubini au paragraphe suivant).

Réciproque (R1).
Soit (x_k) une famille sur $\mathcal{D}$.
• *Si on trouve une suite exaustive $(A_n) \circlearrowleft \mathcal{D}$ telle que $\lim\limits_{n\infty} \sum_{k\in A_n} x_k$ soit fini, alors les (x_k) sont sommables et $\sum_{k\in\mathcal{D}} x_k = \lim\limits_{n\infty} \sum_{k\in A_n} x_k$.*
• *Si on trouve une suite exaustive $(A_n) \circlearrowleft \mathcal{D}$ telle que $\lim\limits_{n\infty} \sum_{k\in A_n} x_k = \infty$, alors les (x_k) ne sont pas sommables.*

Démonstration : • considérons dans le premier cas A un sous-ensemble fini de $\mathcal{D}$. D'après le lemme **L2**, A est dans les A_n à partir d'un certain rang N, d'où $\sum_{k\in A} x_k \leq \sum_{k\in A_N} x_k \leq \lim\limits_{n\infty} \sum_{k\in A_n} x_k$ qui est indépendant de A, d'où la sommabilité voulue, et on applique le sens direct pour obtenir l'égalité des sommes.
• Dans le deuxième cas, si les (x_k) étaient sommables, on aurait un majorant M de $\sum_{k\in A} x_k$ indépendant du sous-ensemble A fini de $\mathcal{D}$ choisi ; or $\lim\limits_{n\infty} \sum_{k\in A_n} x_k = \infty$, donc à partir d'un certain rang $\sum_{k\in A_n} x_k > M$, ce qui est impossible

Remarquer que les deux cas envisagés dans la réciproque sont les seuls possibles, ceci à cause de la croissance de $\left(\sum_{k\in A_n} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Passons maintenant à la généralisation du théorème **T1**.

1.3 Théroème de Fubini, version faible

Une autre façon de sommer une famille finie consiste à regrouper les éléments du domaine par paquets, de sommer sur chaque paquet, puis d'ajouter les sommes obtenues. Cela reste valable pour les familles sommables en général (non nécessairement finies), quel que soit le regroupement par paquets choisi.

Lemme (L3).
Soit $\mathcal{D}$ un ensemble au plus dénombrable. Si $\coprod_{i\in I}\mathcal{D}_i$ est une partition de $\mathcal{D}$ – ce qui, rappelons-le, impose $\mathcal{D}_i \neq \emptyset$ –, alors I est au plus dénombrable.

Démonstration.
En effet, soit φ l'application qui à un élément x de $\mathcal{D}$ associe l'indice i tel que $x \in \mathcal{D}_i$ (i existe et est unique car les $\mathcal{D}_i$ partitionnent $\mathcal{D}$). φ va de $\mathcal{D}$ dans I, et est surjective. Soit en effet i dans I ; par définition $\mathcal{D}_i$ est non vide, donc contient un $x \in \mathcal{D}$, et on a alors clairement $\varphi(x) = i$.

Ainsi, puisque les domaines $\mathcal{D}$ que l'on manipule sont toujours dénombrables, les partitions de $\mathcal{D}$ considérées le seront également.

Théorème faible de Fubini (T2) : *Soit (x_k) une famille sommable sur $\mathcal{D}$ et $\coprod_{i\in I}\mathcal{D}_i$ une partition de $\mathcal{D}$ en sous-domaines (I est donc au plus dénombrable). On a alors :*

$$\sum_{k\in\mathcal{D}} x_k = \sum_{i\in I}\sum_{k\in\mathcal{D}_i} x_k.$$

Démonstration.
Soit M un majorant de $\sum_{k\in\mathcal{D}} x_k$.

• Tout d'abord, (x_k) est sommable sur $\mathcal{D}_i$ pour tout i ; en effet, $\mathcal{D}_i \subset \mathcal{D}$, donc $\sum_{k\in\mathcal{D}_i} x_k \leq \sum_{k\in\mathcal{D}} x_k$ qui est fini par hypothèse. Les nombres $\sum_{k\in\mathcal{D}_i} x_k$ sont par conséquent des réels positifs, et on peut donc parler de leur somme $\sum_{i\in I}\sum_{k\in\mathcal{D}_i} x_k$.

• Montrons ensuite que les paquets $\sum_{k\in\mathcal{D}_i} x_k$ sont sommables sur I. Soit J sous-ensemble fini de I et, pour chaque i, $(A_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exaustive de $\mathcal{D}_i$ (possible car les $\mathcal{D}_i$ sont au plus dénombrables). On a alors, en appliquant le théorème **T1**, et car J est fini :

$$\sum_{i\in J}\sum_{k\in\mathcal{D}_i} x_k = \sum_{i\in J}\lim_{n\infty}\sum_{k\in A_i^n} x_k = \lim_{n\infty}\sum_{i\in J}\sum_{k\in A_i^n} x_k = \lim_{n\infty}\sum_{k\in\bigcup\limits_{i\in J} A_i^n} x_k \leq M$$

(l'ensemble de sommation est inclus dans $\mathcal{D}$: $\bigcup\limits_{i\in J} A_i^n \subseteq \bigcup\limits_{i\in J}\mathcal{D}_i \subseteq \bigcup\limits_{i\in I}\mathcal{D}_i = \mathcal{D}$).

• Calculons enfin la somme des paquets. Soit $(J_p) \circlearrowleft I$ (toujours possible car I est au plus dénombrable) :

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I}\sum_{k\in\mathcal{D}_i} x_k &= \lim_{p\infty}\sum_{i\in J_p}\sum_{k\in\mathcal{D}_i} x_k = \lim_{p\infty}\sum_{i\in J_p}\lim_{n\infty}\sum_{k\in A_i^n} x_k \\ &= \lim_{p\infty}\lim_{n\infty}\sum_{i\in J_p}\sum_{k\in A_i^n} x_k = \lim_{p\infty}\lim_{n\infty}\sum_{k\in\bigcup\limits_{i\in J_p} A_i^n} x_k.\end{aligned}$$

Par ailleurs, à p fixé, $\left(\bigcup\limits_{i\in J_p} A_i^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ croît vers

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{i\in J_p} A_i^n = \bigcup_{i\in J_p}\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_i^n = \bigcup_{i\in J_p}\mathcal{D}_i,$$

donc épuise $\bigcup\limits_{i\in J_p}\mathcal{D}_i$. On en déduit (en appliquant le théorème **T1**) :

$$\lim_{p\infty}\lim_{n\infty}\sum_{k\in\bigcup\limits_{i\in J_p} A_i^n} x_k = \lim_{p\infty}\sum_{k\in\bigcup\limits_{i\in J_p}\mathcal{D}_i} x_k = \sum_{k\in\mathcal{D}} x_k$$

étant donné que $\left(\bigcup\limits_{i\in J_p}\mathcal{D}_i\right)_{p\in\mathbb{N}}$ épuise $\mathcal{D}$.

Réciproque (R2).
Soit (x_k) une famille sur $\mathcal{D}$. Si on peut trouver une partition $\coprod_{i\in I}\mathcal{D}_i$ de $\mathcal{D}$ telle que les paquets $\sum_{k\in\mathcal{D}_i}x_k$ soient finis et sommables sur I, alors (x_k) est sommable sur $\mathcal{D}$ et

$$\sum_{k\in\mathcal{D}}x_k=\sum_{i\in I}\sum_{k\in\mathcal{D}_i}x_k.$$

Démonstration.
Soit A un sous-ensemble fini de $\mathcal{D}$, et M un majorant de $\sum_{i\in I}\sum_{k\in\mathcal{D}_i}x_k$. On a :

$$A=A\cap\mathcal{D}=A\cap\coprod_{i\in I}\mathcal{D}_i=\coprod_{i\in I}A\cap\mathcal{D}_i=\coprod_{i\in J}A\cap\mathcal{D}_i$$

où J est un sous-ensemble *fini* de I (A est fini !), donc :

$$\sum_{k\in A}x_k=\sum_{i\in J}\sum_{k\in A\cap\mathcal{D}_i}x_k\leq\sum_{i\in J}\sum_{k\in\mathcal{D}_i}x_k\leq M$$

qui est indépendant de A, donc les (x_k) sont sommables, et on applique le sens direct pour obtenir l'égalité des sommes.

On étend à présent le théorème **T2** au cas des familles quelconques, non nécéssairement sommables.

1.4 Théorème de Fubini, version forte

On considère désormais des familles (toujours *au plus dénombrables*) à valeurs positives dans $\overline{\mathbb{R}^+}$, en conservant les mêmes définitions de la sommabilité et de la somme d'une famille. Fubini se généralise à de telles familles.

Lemme (L4).
Si $(x_k)_{k\in\mathcal{D}}$ est une famille d'élément de $\overline{\mathbb{R}^+}$ qui contient ∞, alors $\sum_{k\in\mathcal{D}}x_k=\infty$.

Démonstration.
Soit $k_0\in\mathcal{D}$ tel que $x_{k_0}=\infty$; puisque $\{k_0\}$ est un sous-ensemble fini de $\mathcal{D}$, on a $\sum_{k\in\mathcal{D}}x_k\geq\sum_{k\in\{k_0\}}x_k=\infty$.

Théorème de Fubini (T3)
Soit (x_k) une famille quelconque (non nécessairement sommable) d'éléments de $\overline{\mathbb{R}^+}$ sur $\mathcal{D}$ et $\coprod_{i\in I}\mathcal{D}_i$ une partition de $\mathcal{D}$. On a alors :

$$\sum_{k\in\mathcal{D}}x_k=\sum_{i\in I}\sum_{k\in\mathcal{D}_i}x_k.$$

Démonstration.
• Si les (x_k) sont sommables, ils sont nécessairement tous finis d'après le lemme **L4**, donc **T2** s'applique.
• Dans le cas contraire, on a $\sum_{k\in\mathcal{D}}x_k=\infty$. Si $\exists i\in I,\sum_{k\in\mathcal{D}_i}x_k=\infty$, on a d'après le lemme **L4** $\sum_{i\in I}\sum_{k\in\mathcal{D}_i}x_k=\infty=\sum_{k\in\mathcal{D}}x_k$. Sinon, tous les x_k sont finis ; soit alors $(J_n)\circlearrowleft I$, et considérons la suite croissante de réels $\left(\sum_{i\in J_n}\sum_{k\in\mathcal{D}_i}x_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Si elle était bornée, elle convergerait vers un réel fini l et les paquets $\sum_{k\in\mathcal{D}_i}x_k$ seraient sommables en vertu de la réciproque **R1**, *a fortiori* les (x_k) seraient sommables d'après la réciproque **R2**, *absurde*. Donc elle diverge vers ∞, d'où (en appliquant **T1**)

$$\sum_{i\in I}\sum_{k\in\mathcal{D}_i}x_k=\lim_{n\infty}\sum_{i\in J_n}\sum_{k\in\mathcal{D}_i}x_k=\infty=\sum_{k\in\mathcal{D}}x_k.$$

Une première application pratique du théorème de Fubini est de pouvoir intervertir des signes de sommation.

Considérons en effet une famille $(x_{p,q})$ sommable sur $\mathbb{N}^2$. En partionnant $\mathbb{N}^2$ en

$$\mathbb{N}^2 = \coprod_{p\in\mathbb{N}} \coprod_{q\in\mathbb{N}} (p,q) = \coprod_{i\in I} \mathcal{D}_i$$

(on a posé $I = \mathbb{N}$ et $\mathcal{D}_i = \coprod_{q\in\mathbb{N}} (i,q)$), ce qui revient, dans un repère avec p en abscisse et q en ordonnée, à voir le domaine $\mathbb{N}^2$ comme un réunion de droites verticales, on obtient :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} x_{p,q} = \sum_{i\in I} \sum_{(p,q)\in\mathcal{D}_i} x_{p,q} = \sum_{p\in\mathbb{N}} \sum_{q\in\mathbb{N}} x_{p,q},$$

d'où par symétrie :

$$\sum_{p\in\mathbb{N}} \sum_{q\in\mathbb{N}} x_{p,q} = \sum_{q\in\mathbb{N}} \sum_{p\in\mathbb{N}} x_{p,q}.$$

Insistons à présent sur le terme de *domaine* utilisé pour $\mathcal{D}$. Il est en effet important de *voir* l'ensemble sur lequel on somme, afin de visualiser d'éventuelles partitions. Il est ainsi beaucoup plus clair de dire "on partitionne $\mathbb{N}^2$ selon ses droites de pentes -1, d'où $\sum_{p,q\geq 0} x_{p,q} = \sum_{k\geq 0} \sum_{p+q=k} x_{p,q}$" plutôt que de passer par des méandres formelles comme "soit la partition au plus dénombrable $\mathbb{N} = \coprod_{k\in\mathbb{N}} \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \ / \ p+q = k\}$; on peut appliquer le théorème de Fubini, d'où $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} x_{p,q} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{(p,q)\in\coprod_{k\in\mathbb{N}}\{(p,q)\in\mathbb{N}^2/p+q=k\}} x_{p,q}$". C'est pour ces raisons que l'auteur préfère le terme *domaine* au terme *ensemble*, afin de faire implicitement appel à notre visualisation de l'ensemble concerné.

Une autre application de ce théorème est de pouvoir calculer la somme d'une famille positive sans savoir au préalable si elle est sommable ou non (c'est-à-dire sans vérifier les conditions d'applications du théorème de Fubini version faible).

Par exemple, pour la famille positive $\left(\frac{1}{pq(p+q)}\right)_{p,q\geq 1}$, on a :

$$\sum_{p,q\geq 1} \frac{1}{pq(p+q)} = \sum_{n\geq 2} \sum_{p+q=n} \frac{1}{pq(p+q)} = \sum_{n\geq 2} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(n-p)n}$$

$$= \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{n-p} + \frac{1}{p}\right) \frac{1}{n} = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2} \sum_{p=1}^{n} \frac{2}{p} = 2 \sum_{n\geq 2} \frac{H_n}{n^2}$$

où H_n désigne la série harmonique. Or $H_n = O(\ln n)$, donc $\frac{H_n}{n^2} = O(\frac{\ln n}{n^2}) = O(\frac{1}{n^{3/2}})$ et la somme trouvée converge. On peut donc en déduire que la famille $\left(\frac{1}{pq(p+q)}\right)_{p,q\geq 1}$ est sommable (sinon sa somme, qu'on vient de calculer, vaudrait ∞) de somme $2\sum_{n\geq 2} \frac{H_n}{n^2}$.

2 Familles sommables dans un Banach

On se place désormais dans un espace vectoriel normé E complet (c'est-à-dire où toute suite de Cauchy converge). On cherche à quelles conditions sur la famille $(x_k)_{k\in\mathcal{D}}$ on peut définir sa somme et si l'on peut retrouver des théorèmes analogues au cas des familles positives. Comme dans les autres paragraphes, on supposera le domaine $\mathcal{D}$ au plus dénombrable.

2.1 Définitions

Définition.
On dit qu'une famille $(x_k)_{k\in\mathcal{D}}$ de E est sommable *si la famille $(\|x_k\|)_{k\in\mathcal{D}}$ est sommable.*

On ne pas définir la somme à l'aide de sup comme dans le cas positif, faute de relation d'ordre. Cependant, le théorème **T1** nous donne une définition en termes de limites ; c'est celle-là que nous prendrons.

Définition - Proposition.
Soit $(x_k)_{k\in\mathcal{D}}$ une famille sommable et $(A_n) \circlearrowleft \mathcal{D}$. La limite $\lim\limits_{n\infty} \sum_{k\in A_n} x_k$ existe et ne dépend pas de la suite exaustive choisie ; on l'appelle somme *de la famille $(x_k)_{k\in\mathcal{D}}$ et on la note $\sum_{k\in\mathcal{D}} x_k$.*

Démonstration.

• Soit $s_n = \sum_{k\in A_n} x_k$; montrons que (s_n) est de Cauchy. En effet, soient n et p des entiers positifs ; on a :

$$\begin{aligned}
\|s_{n+p}-s_n\| &= \left\|\sum_{k\in A_{n+p}} x_k - \sum_{k\in A_n} x_k\right\| = \left\|\sum_{k\in A_{n+p}\setminus A_n} x_k\right\| \\
&\le \sum_{k\in A_{n+p}\setminus A_n} \|x_k\| = \sum_{k\in A_{n+p}} \|x_k\| - \sum_{k\in A_n} \|x_k\|.
\end{aligned}$$

Or la suite $S_n = \sum_{k\in A_n} \|x_k\|$ converge car les x_k sont sommables, donc est de Cauchy, donc (s_n) aussi. On en déduit l'existence de $l = \lim\limits_{n\infty} \sum_{k\in A_n} x_k$.

• Montrons à présent que la limite ne dépend pas de la suite exhaustive choisie. Soit $(A'_n) \circlearrowleft \mathcal{D}$, $s'_n = \sum_{k\in A'_n} x_k$ et $l' = \lim\limits_{n\infty} \sum_{k\in A'_n} x_k$. On construit par récurrence (à l'aide du lemme **L2**) des extratrices (suites de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissantes) φ et ψ telles que

$$A_{\varphi(1)} \subset A'_{\psi(1)} \subset A_{\varphi(2)} \subset A'_{\psi(2)} \subset A_{\varphi(3)} \subset A'_{\psi(3)} \ldots$$

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|l'-l\| \le \left\|l' - s'_{\psi(n)}\right\| + \left\|s'_{\psi(n)} - s_{\varphi(n)}\right\| + \left\|s_{\varphi(n)} - l\right\|$. Les premier et troisième termes tendent vers 0. Quant au second :

$$\begin{aligned}
\left\|s'_{\psi(n)} - s_{\varphi(n)}\right\| &= \left\|\sum_{k\in A'_{\psi(n)}} x_k - \sum_{k\in A_{\varphi(n)}} x_k\right\| = \left\|\sum_{k\in A'_{\psi(n)}\setminus A_{\varphi(n)}} x_k\right\| \\
&\le \sum_{k\in A'_{\psi(n)}\setminus A_{\varphi(n)}} \|x_k\| \le \sum_{k\in A_{\varphi(n+1)}\setminus A_{\varphi(n)}} \|x_k\| \\
&= S_{\varphi(n+1)} - S_{\varphi(n)},
\end{aligned}$$

il tend aussi vers 0. D'où l'égalité des limites.

On se gardera d'utiliser toute forme de réciproque dans le cas général. Considérer par exemple la famille $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que la suite exhaustive $A_n = \{0, \ldots, 2n\}$: on a $\lim\limits_{n\infty} \sum_{k\in A_n} (-1)^k = \lim\limits_{n\infty} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k = \lim\limits_{n\infty} 1 = 1$, et pourtant la famille n'est pas sommable.

Un des intérêts de la définition de la somme d'une famille sommable à l'aide de limites est de pouvoir retrouver le théorème de Fubini – version faible nécessairement, car la somme d'une famille quelconque n'est en général pas définie. En effet, la démonstration de **T2** reposant essentiellement sur **T1**, on peut s'attendre à retrouver un analogue de **T2** en suivant exactement la même démarche.

2.2 Théorème de Fubini

Lemme (L5).
Soit (x_k) une famille sommable sur $\mathcal{D}$. Alors :

$$\left\|\sum_{k\in\mathcal{D}} x_k\right\| \le \sum_{k\in\mathcal{D}} \|x_k\|.$$

Démonstration.
On se ramème à une somme finie (pour pouvoir appliquer l'inégalité triangulaire) en considérant $(A_n) \circlearrowleft \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k\in\mathcal{D}} x_k\right\| &= \left\|\lim_{n\infty} \sum_{k\in A_n} x_k\right\| = \lim_{n\infty} \left\|\sum_{k\in A_n} x_k\right\| \\
&\le \lim_{n\infty} \sum_{k\in A_n} \|x_k\| = \sum_{k\in\mathcal{D}} \|x_k\|.
\end{aligned}$$

Théorème de Fubini (T4).

Soit (x_k) une famille sommable sur $\mathcal{D}$ et $\coprod_{i\in I} D_i$ une partition de $\mathcal{D}$. On a alors :

$$\sum_{k\in\mathcal{D}} x_k = \sum_{i\in I}\sum_{k\in\mathcal{D}_i} x_k.$$

Démonstration.

On reprend pas à pas la démonstration de **T2**. Soit M un majorant de $\sum_{k\in\mathcal{D}}\|x_k\|$.

• Tout d'abord, (x_k) est sommable sur $\mathcal{D}_i$ pour tout i ; en effet, $\mathcal{D}_i\subset\mathcal{D}$, donc $\sum_{k\in\mathcal{D}_i}\|x_k\|\leq\sum_{k\in\mathcal{D}}\|x_k\|$ qui est fini par hypothèse.

• Montrons ensuite que les paquets $\sum_{k\in\mathcal{D}_i} x_k$ sont sommables sur I. Soit J sous-ensemble fini de I, et pour chaque i, $(A_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exaustive de $\mathcal{D}_i$ (possible car les $\mathcal{D}_i$ sont au plus dénombrables). On a alors (en appliquant **L5** et **T1**) :

$$\sum_{i\in J}\left\|\sum_{k\in\mathcal{D}_i} x_k\right\|\leq\sum_{i\in J}\sum_{k\in\mathcal{D}_i}\|x_k\|=\sum_{i\in J}\lim_{n\infty}\sum_{k\in A_i^n}\|x_k\|=\lim_{n\infty}\sum_{i\in J}\sum_{k\in A_i^n}\|x_k\|=\lim_{n\infty}\sum_{k\in\bigcup\limits_{i\in J}A_i^n}\|x_k\|\leq M$$

car $\bigcup\limits_{i\in J}A_i^n\subseteq\bigcup\limits_{i\in J}\mathcal{D}_i\subseteq\bigcup\limits_{i\in I}\mathcal{D}_i=\mathcal{D}$ pour tout n.

• Calculons enfin la somme des paquets. Soit $(J_p)\circlearrowleft I$ (toujours possible car I est au plus dénombrable) :

$$\sum_{i\in I}\sum_{k\in\mathcal{D}_i} x_k=\lim_{p\infty}\sum_{i\in J_p}\lim_{n\infty}\sum_{k\in A_i^n} x_k=\lim_{p\infty}\lim_{n\infty}\sum_{i\in J_p}\sum_{k\in A_i^n} x_k=\lim_{p\infty}\lim_{n\infty}\sum_{k\in\bigcup\limits_{i\in J_p}A_i^n} x_k=\lim_{p\infty}\sum_{k\in\bigcup\limits_{i\in J_p}\mathcal{D}_i} x_k=\sum_{k\in\mathcal{D}} x_k$$

car $\left(\bigcup\limits_{i\in J_p}A_i^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\circlearrowleft\bigcup\limits_{i\in J_p}\mathcal{D}_i$ et $\left(\bigcup\limits_{i\in J_p}\mathcal{D}_i\right)_{p\in\mathbb{N}}\circlearrowleft\mathcal{D}$.

Encore une fois, Fubini n'admet pas de réciproque dans un Banach quelconque. On peut (encore) considérer la famille $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la partition $\mathbb{N}=\coprod\limits_{n=0}^{\infty}\{2n,2n+1\}$; les paquets sont tous nuls, donc la somme des paquets existe, et pourtant la famille n'est pas sommable. On peut même trouver une autre partition où les paquets sont sommables, de somme différente que la première : $\mathbb{N}=\{0\}\bigcup\coprod\limits_{n=1}^{\infty}\{2n-1,2n\}$.

Pour montrer à quel point la réciproque de Fubini est fausse, montrons en complément qu'étant donnée une série réelle semi-convergente, on peut réagencer ses termes de façon à la faire converger vers n'importe quoi.

2.3 Cas des séries réelles semi-convergentes

On rappelle qu'une *série* (à valeurs dans un Banach) est une suite du type $\left(\sum_{i=0}^n x_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$, généralement notée $\left(\sum_{i=0}^n x_i\right)$ ou $\left(\sum x_n\right)$ qu'elle est dite *convergente* si $\lim_{n\infty}\sum_{i=0}^n x_i$ existe (on note alors la limite $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ ou $\sum x_n$), *divergente* sinon, et *semi-convergente* si $\left(\sum x_n\right)$ converge et $\left(\sum|x_n|\right)$ diverge (par exemple $\left(\sum\frac{(-1)^n}{n}\right)$).

Proposition.

Soit $\left(\sum x_n\right)$ une série réelle *semi-convergente et a un réel. Il existe alors une permutation φ de $\mathbb{N}$ telle que $\sum x_{\varphi(n)}=a$.*

Démonstration : Notons X^+ l'ensemble des x_n positifs, et X^- l'ensemble des x_n négatifs.

• Tout d'abord, X^+ et X^- sont infinis. Sinon, si l'un des deux est fini, les x_n sont tous positifs (ou tous négatifs) à partir d'un certain rang, et donc $\sum x_n$ existe si et seulement si $\sum|x_n|$ existe, *absurde* par semi-convergence des x_n.

On notera alors
$$\begin{cases} X^+=\left\{x_{\pi(1)},x_{\pi(2)},...\right\} & (\pi\text{ pour positif})\\ X^-=\left\{x_{\nu(1)},x_{\nu(2)},...\right\} & (\pi\text{ pour négatif})\end{cases}$$
où π et ν sont des extractrices.

• Deuxièmement, il faut remarquer que

$$\sum x_{\pi(n)} = \infty \text{ et } \sum x_{\nu(n)} = -\infty.$$

En effet, supposons par l'absurde que $S_\pi = \sum x_{\pi(n)}$ soit fini. Alors $\infty = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \left|x_{\pi(n)}\right| + \sum_{n=0}^{\infty} \left|x_{\nu(n)}\right| = S_\pi + \sum_{n=0}^{\infty} \left|x_{\nu(n)}\right|$, donc $\sum_{n=0}^{\infty} \left|x_{\nu(n)}\right| = \infty$. Mais alors la série $\left(\sum x_n\right)$ ne peut converger, car les termes négatifs l'emportent sur les termes positifs : en désignant un majorant M de la somme $\sum x_{\pi(n)}$, le terme $\sum_{i=0}^{\nu(n)} x_i$ est majoré par $M + \sum_{i=0}^{n} x_{\nu(i)}$ qui diverge vers $-\infty$. Donc $S_\pi = \infty$, et de même $S_\nu = -\infty$.

• On peut maintenant construire la permutation φ voulue, en procédant de la façon suivante : en partant d'un terme quelconque x_0 (supposons $x_0 \leq a$), on lui ajoute des termes $x_{\pi(i)}$ positifs jusqu'à ce que la somme devienne $> a$ (on s'arrête précisément *dès que* la somme devient $> a$), puis on ajoute des termes $x_{\nu(i)}$ négatifs jusqu'à ce que la somme redevienne $< a$ (on s'arrête dès que la somme devient $< a$), puis ainsi de suite. Ceci est possible : vu que $\sum x_{\pi(i)} = \infty$, on peut toujours trouver assez de termes positifs pour passer d'un valeur inférieure à a à une valeur strictement supérieure et *vice versa* pour les termes négatifs (étant donné que$\sum x_{\nu(i)} = -\infty$).

Il convient toutefois d'ajouter les termes positifs et négatifs dans un ordre bien précis. Rangeons pour cela les x_n selon leur ordre naturel d'indexation donné par la série $\left(\sum x_n\right)$; dans cet ordre, des tranches de termes positifs puis négatifs se succèdent alternativement, mettons :

$$(x_1, x_2, x_3, ...) = (\overbrace{x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, ..., x_{\pi(p_1-1)}}^{\geq 0}, \underbrace{x_{\nu(1)}, x_{\nu(2)}, ..., x_{\nu(n_1-1)}}_{\leq 0},$$

$$\overbrace{x_{\pi(p_1)}, x_{\pi(p_1+1)}, ..., x_{\pi(p_2-1)}}^{\geq 0}, \underbrace{x_{\nu(n_1)}, x_{\nu(n_1+1)}, ..., x_{\nu(n_2-1)}}_{\leq 0}, ...)$$

où (p_k) et (n_k) sont des extractrices (p pour positif et n pour négatif). On rajoute alors les termes positifs et négatifs dans l'ordre sus-décrit.

Montrons alors que $\sum x_{\varphi(n)} = a$ comme voulu. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la série $\left(\sum x_n\right)$ converge, les x_n sont plus petits qu'ε à partir d'un certain rang N ; en prenant un k tel que $\pi(p_k) > N$, il est clair que tous les termes ajoutés au-delà des $k^{\text{ièmes}}$ tranches positives et négatives (comprendre les $x_{\pi(l)}$ et $x_{\nu(l)}$ pour $l > k$) sont plus petits qu'ε, et donc qu'à partir d'un certain rang m (assez grand pour que tous les termes des k premières tranches positives et négatives aient été utilisés) les termes $x_{\varphi(n)}$ ajoutés sont tous plus petits qu'ε. Mais puisqu'on change le signe des termes ajoutés *dès que* celui de $\left(\sum_{i=0}^{n} x_{\varphi(i)} - a\right)$ change, la différence $\left|\sum_{i=0}^{n} x_{\varphi(i)} - a\right|$ est pour $n \geq m$ au plus égale à ε. Ceci conclut la preuve.

On remarquera que la seule subtilité dans la preuve du théorème de Fubini – comme dans beaucoup de démonstrations de sommabilité de familles à valeurs dans un Banach quelconque – consiste à remplacer les vecteurs par leurs normes, de façon à se placer dans le cas positifs où l'on dispose de tous les gentils théorèmes et de leurs réciproques ; en particulier la somme de la famille positive est toujours définie, et on peut donc travailler avec (en pratique, c'est surtout **T3** qui sert) . C'est ce qu'il convient de faire dans 99.99% des cas.

3 Quelques applications

On présente ici quelques outils mathématiques où interviennent de façon plus ou moins directe des problèmes de sommabilité. La méthode pour les traiter a déjà été évoquée ci-dessus : on passe dans les réels positifs en prenant les normes, puis on travaille sur les sommes positives en Fubinisant à souhait et sans scrupules. Le lecteur est invité à chercher les démonstrations en guise d'exercice.

3.1 Exponentielle dans une algèbre de Banach

Rappelon qu'une algèbre de Banach (sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative A munie d'une norme vérifiant $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$ pour tout (x, y) dans A^2 (une telle norme sous-multiplicative est appelée *norme d'algèbre*) telle que l'espace vetoriel normé $(A, \|\cdot\|)$ soit complet. Par exemple, $M_n(\mathbb{R})$ (complet en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie) est une algèbre de Banach pour toute norme subordonnée.

Définition.
On appelle exponentielle *de $a \in A$ l'élément*

$$\exp a = e^a := \sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{n!}.$$

Pour montrer son existence, il suffit de prouver la sommabilité de la famille $\left(\frac{a^n}{n!}\right)_{n \geq 0}$, ce qui revient à démontrer que la famille $\left(\left\|\frac{a^n}{n!}\right\|\right)_{n \geq 0}$ est sommable. Or, cela est trivial puisque

$$\sum_{n \geq 0} \left\|\frac{a^n}{n!}\right\| \leq \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \|a\|^n = e^{\|a\|} < \infty.$$

Proposition.
Pour tout (a, b) dans A^2, on a :

$$e^{a+b} = e^a e^b = e^b e^a.$$

Démonstration.
On a

$$e^a e^b = \sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{n!} \sum_{n \geq 0} \frac{b^n}{n!} = \sum_{p \geq 0} \sum_{q \geq 0} \frac{a^p}{p!} \frac{b^q}{q!} \stackrel{?}{=} \sum_{n \geq 0} \sum_{p+q=n} \frac{a^p}{p!} \frac{b^q}{q!}$$

sous réserve que la famille $\left(\frac{a^p}{p!} \frac{b^q}{q!}\right)_{p,q \geq 0}$ soit sommable

$$= \sum_{n \geq 0} \sum_{p+q=n} \frac{n!}{p!q!} \frac{a^p b^q}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (a+b)^n = e^{a+b}.$$

Montrons donc la sommabilité voulue, en suivant la méthode générale décrite au début de cette partie :

$$\sum_{p \geq 0} \sum_{q \geq 0} \left\|\frac{a^p}{p!} \frac{b^q}{q!}\right\| \leq \sum_{p \geq 0} \sum_{q \geq 0} \frac{\|a\|^p}{p!} \frac{\|b\|^q}{q!} = e^{\|a\|+\|b\|}$$

en suivant le même calcul que ci-dessus, l'interversion étant permise par Fubini car on est dans les réels positifs. Comme annoncé, ça se déroule comme du beurre.

On notera de plus que le calcul dans le cas positif est calqué sur celui dans le cas pas positif, ce qui donne généralement une méthode fructueuse pour mener les calculs dans le cas positif. À retenir donc.

3.2 Fonctions analytiques

Rappelons qu'une fonction f de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}$ est dite *analytique* en t_0 si f s'écrit sous forme d'une série entière autour de t_0 :

$$f(t) = \sum_{|\alpha| \geq 0} a_\alpha (t - t_0)^\alpha := \lim_{n\infty} \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha (t - t_0)^\alpha$$

avec les notations multi-indices usuelles :

$$\begin{cases} \alpha & = & (\alpha_1, ..., \alpha_n) & \in & \mathbb{N}^n \\ |\alpha| & = & \alpha_1 + ... + \alpha_n & \in & \mathbb{N} \\ t & = & (t_1, ..., t_n) & \in & \mathbb{C}^n \\ t^\alpha & = & t_1^{\alpha_1} ... t_n^{\alpha_n} & \in & \mathbb{C} \end{cases}.$$

On prendra par la suite $t_0 = 0$, et donc pour $\|t\|$ assez petit (on ne considère dans ce paragraphe que des normes infinies), on a

$$f(t) = \sum_{|\alpha| \geq 0} a_\alpha t^\alpha.$$

3.2.1 Analyticité et sommabilité

Proposition.
Si f est analytique (en 0), alors la famille $(a_\alpha t^\alpha)_{|\alpha|\geq 0}$ est sommable pour t assez petit.

Démonstration.
Supposons que $f(t)$ est défini sur une boule fermée $\overline{\mathcal{B}}(0,r_0)$. Alors pour tout t dans $\mathring{B}(0,r)$ avec $r<r_0$, en notant $S_n=\sum_{|\alpha|=n} a_\alpha t^\alpha$, la limite $f(t)=\lim_{n\infty}\sum_{i\leq n} S_i$ existe, donc S_n tend vers 0, donc le terme $\sum_{|\alpha|=n} a_\alpha t^\alpha$ est borné par un M fixé. On en déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|\geq 0}|a_\alpha t^\alpha| &\leq \sum_{|\alpha|\geq 0}|a_\alpha|\,|t^\alpha| \leq \sum_{|\alpha|\geq 0}|a_\alpha|\,\|t\|^{|\alpha|} \leq \sum_{|\alpha|\geq 0}|a_\alpha|\,r^{|\alpha|} = \sum_{|\alpha|\geq 0}|a_\alpha|\,r_0^{|\alpha|}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{|\alpha|}\\ &= \sum_{n\geq 0}\sum_{|\alpha|=n}|a_\alpha|\,r_0^{|\alpha|}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{|\alpha|} = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{n}\sum_{|\alpha|=n}|a_\alpha|\,r_0^{|\alpha|} \leq \sum_{n\geq 0}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{n} M\end{aligned}$$

qui est bien fini car $r<r_0$.

On utilisera par la suite la notation $|f|$ pour désigner la fonction f où l'on a remplacé les coefficients de f par leurs valeurs absolues, *i.e.* si $f(t)=\sum_{|\alpha|\geq 0} a_\alpha t^\alpha$,

$$|f|(t)=\sum_{|\alpha|\geq 0}|a_\alpha|\,t^\alpha.$$

On a ainsi montré que si f est analytique, $|f|$ l'est également.

3.2.2 Produit de fonctions analytiques

Proposition.
Un produit fini de fonctions analytiques est analytique.

Démonstration.
On raisonne par récurrence sur le nombre n de fonctions considérées ; remarquer que seul le cas $n=2$ nécessite d'être examiné.
Soient donc f et g analytiques, mettons $f(t)=\sum_{|\alpha|\geq 0} a_\alpha t^\alpha$ et $g(t)=\sum_{|\beta|\geq 0} b_\beta t^\beta$ pour t petit. On a :

$$f(t)g(t)=\sum_{|\alpha|\geq 0} a_\alpha t^\alpha\sum_{|\beta|\geq 0} b_\beta t^\beta=\sum_{|\alpha|\geq 0}\sum_{|\beta|\geq 0} a_\alpha b_\beta t^{\alpha+\beta}\overset{?}{=}\sum_{|\gamma|\geq 0}\left(\sum_{\alpha+\beta=\gamma} a_\alpha b_\beta\right)t^\gamma$$

sous réserve que la famille $\left(a_\alpha b_\beta t^{\alpha+\beta}\right)_{|\alpha|,|\beta|\geq 0}$ soit sommable. On vérifie bien que

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|,|\beta|\geq 0}\left|a_\alpha b_\beta t^{\alpha+\beta}\right| &\leq \sum_{|\alpha|,|\beta|\geq 0}|a_\alpha|\;|b_\beta|\;\left|t^{\alpha+\beta}\right| \leq \sum_{|\alpha|,|\beta|\geq 0}|a_\alpha|\;|b_\beta|\;\|t\|^{|\alpha+\beta|} = \sum_{|\alpha|,|\beta|\geq 0}|a_\alpha|\;|b_\beta|\;\|t\|^{|\alpha|+|\beta|}\\ &= \sum_{|\alpha|,|\beta|\geq 0}|a_\alpha|\;\|t\|^{|\alpha|}\;|b_\beta|\;\|t\|^{|\beta|} = \sum_{|\alpha|,|\beta|\geq 0}|a_\alpha|\;\tilde{t}^\alpha\;|b_\beta|\;\tilde{t}^\beta\end{aligned}$$

où $\tilde{t}$ est le vecteur $(\|t\| \ldots \|t\|)$

$$=\sum_{|\alpha|\geq 0}|a_\alpha|\;\tilde{t}^\alpha\sum_{|\beta|\geq 0}|b_\beta|\;\tilde{t}^\beta=|f|(\tilde{t})\;\;|g|(\tilde{t})$$

qui est fini pour t dans l'intersection de voisinages de 0 où $|f|$ et $|g|$ sont définies.
Encore une fois, le passage aux normes, un Fubini version forte, et une marche arrière dans les calculs suffisent pour conclure quant à la sommabilité voulue.

On a plus précisément montré la proposition suivante : soit $f_1,\ldots,f_n$ des fonctions analytiques, mettons

$$f_i=\sum_{|\alpha|\geq 0} a_\alpha^{[i]} t^\alpha.$$

Alors le produit $f_1\ldots f_n$ est analytique et

$$f_1\ldots f_n(t)=\sum_{|\gamma|\geq 0}\left(\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=\gamma} a_{\alpha_1}^{[1]}\ldots a_{\alpha_n}^{[n]}\right)t^\gamma.$$

3.2.3 Logarithme d'une fonction analytique

Proposition.
Si f est analytique et $f(0) = 1$, alors $\ln f$ est aussi analytique en 0.

Démonstration.
On écrit :

$$f(t) = 1 + \sum_{|\alpha|>0} a_\alpha t^\alpha,$$

d'où

$$\ln f(t) = \ln\left(1 + \sum_{|\alpha|>0} a_\alpha t^\alpha\right) = \sum_{i>0} \frac{(-1)^{i+1}}{i}\left(\sum_{|\alpha|>0} a_\alpha t^\alpha\right)^i = \sum_{i>0} \frac{(-1)^{i+1}}{i} \sum_{|\gamma|>0} b_{\gamma,i}\ t^\gamma$$

où $b_{\gamma,i} = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_i=\gamma} a_{\alpha_1}...a_{\alpha_i}$

$$\overset{?}{=} \sum_{|\gamma|>0}\left(\sum_{i>0} \frac{(-1)^{i+1}}{i} b_{\gamma,i}\right) t^\gamma$$

sous réserve de la sommabilité de $\left(\frac{(-1)^{i+1}}{i} b_{\gamma,i}\ t^\gamma\right)_{|\gamma|,i>0}$. On vérifie facilement que

$$\begin{aligned}
\sum_{|\gamma|,i>0} \left|\frac{(-1)^{i+1}}{i} b_{\gamma,i} t^\gamma\right| &\leq \sum_{i>0} \frac{1}{i} \sum_{|\gamma|>0} |b_{\gamma,i}|\ \|t\|^{|\gamma|} \\
&= \sum_{i>0} \frac{1}{i} \sum_{|\gamma|>0} \left|\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_i=\gamma} a_{\alpha_1}...a_{\alpha_i}\right|\ \tilde{t}^\gamma \\
&\leq \sum_{i>0} \frac{1}{i} \sum_{|\gamma|>0} \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_i=\gamma} |a_{\alpha_1}| ... |a_{\alpha_i}|\ \tilde{t}^\gamma \\
&= \sum_{i>0} \frac{1}{i} \sum_{|\gamma|>0} \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_i=\gamma} |a_{\alpha_1}|\ \tilde{t}^{\alpha_1} ... |a_{\alpha_i}|\ \tilde{t}^{\alpha_i} \\
&= \sum_{i>0} \frac{1}{i} \sum_{|\alpha_1|...|\alpha_i|>0} |a_{\alpha_1}|\ \tilde{t}^{\alpha_1} ... |a_{\alpha_i}|\ \tilde{t}^{\alpha_i} \\
&= \sum_{i>0} \frac{1}{i} \left(\sum_{|\alpha|>0} |a_\alpha|\, \tilde{t}^\alpha\right)^i \\
&= \sum_{i>0} \frac{1}{i} \left(|f|(\tilde{t}) - 1\right)^i \\
&= \ln\left(|f|(\tilde{t})\right)
\end{aligned}$$

qui est fini pour t assez petit (car alors $1 \leq |f| < \infty$).

3.2.4 Composée d'une fonction analytique par une application linéaire

Proposition.
Si $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ est analytique et A est une application linéaire sur $\mathbb{C}^n$, alors $f \circ A$ est analytique.

Démonstration.
Soit $f(t) = \sum_{|\alpha|\geq 0} a_\alpha t^\alpha$ analytique, et $A\ t = (A_1\ t, ..., A_n\ t)$ une application linéaire, où les A_i sont linéaires de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}$ (*a fortiori* analytiques, donc on dispose des $|A_i|$). Puisque A est continue (car linéaire), $f \circ A(t)$ est bien défini pour t petit, et on a :

$$f \circ A(t) = \sum_{|\alpha|\geq 0} a_\alpha (A\ t)^\alpha = \sum_{|\alpha|\geq 0} a_\alpha \prod_{i=1}^n (A_i\ t)^{\alpha_i} = \sum_{|\alpha|\geq 0} a_\alpha \sum_{|\gamma|\geq 0} b_{\gamma,\alpha} t^\gamma$$

car $\prod_{i=1}^n (A_i\ t)^{\alpha_i}$ est un polynôme en les t_i

$$\overset{?}{=} \sum_{|\gamma|\geq 0}\left(\sum_{|\alpha|\geq 0} a_\alpha b_{\gamma,\alpha}\right) t^\gamma,$$

d'où l'analyticité de $f \circ A$ si l'on justifie l'interversion, c'est-à-dire si l'on montre que la famille $(a_\alpha b_{\gamma,\alpha} t^\gamma)_{|\alpha|,|\gamma|\geq 0}$ est sommable. On vérifie comme d'habitude en remontant les calculs, bien que cela soit un peu moins direct cette fois :

$$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha|,|\gamma|\geq 0} |a_\alpha b_{\gamma,\alpha}\ t^\gamma| \quad &\leq \quad \sum_{|\alpha|\geq 0} \sum_{|\gamma|\geq 0} |a_\alpha|\ \ |b_{\gamma,\alpha}|\ \ \|t\|^{|\gamma|} = \sum_{|\alpha|\geq 0} \sum_{|\gamma|\geq 0} |a_\alpha|\ \ |b_{\gamma,\alpha}|\ \ \tilde{t}^\gamma \\
&= \quad \sum_{|\alpha|\geq 0} |a_\alpha| \sum_{|\gamma|\geq 0} |b_{\gamma,\alpha}|\ \ \tilde{t}^\gamma \leq \sum_{|\alpha|\geq 0} |a_\alpha| \sum_{|\gamma|\geq 0} c_{\gamma,\alpha}\ \tilde{t}^\gamma
\end{aligned}$$

où $c_{\gamma,\alpha}$ sont les coefficients (positifs !) du polynôme $\prod_{i=1}^{n} (|A_i|\ \ t)^{\alpha_i}$, et en remarquant que $|b_{\gamma,\alpha}| \leq c_{\gamma,\alpha}$ par une inégalité triangulaire après développement de $\prod_{i=1}^{n} (A_i\ t)^{\alpha_i}$

$$= \sum_{|\alpha|\geq 0} |a_\alpha| \prod_{i=1}^{n} \left(|A_i|\ \ \tilde{t}\right)^{\alpha_i} = \sum_{|\alpha|\geq 0} |a_\alpha| \left(|A|\ \ \tilde{t}\right)^\alpha = |f| \circ |A|\ \ \tilde{t}$$

qui est bien défini pour t petit car $|A|$ continue en 0.