Dualité en dimension finie

Marc SAGE

24 octobre 2005

Table des matières

Dans tout ce qui suit, E est un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

1 Dual

1.1 Définitions

Définitions.
On appelle dual *de E l'ensemble des formes linéaires sur E, et on le note*

$$E^* := \mathcal{L}(E, K).$$

Si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E^*, on définit des formes linéaires e_k^* par

$$e_k^* : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & K \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i & \longmapsto & \lambda_k \end{array} \right. ,$$

appelée projection *selon la k-ième coordonée dans la base $(e_1, ..., e_n)$.*
En introduisant le symbole de Kronecker

$$\delta_x^y = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x = y \\ 0 \text{ si } x \neq y \end{array} \right. ,$$

on peut redéfinir les e_k^* par la formule

$$e_k^*(e_i) = \delta_i^k.$$

Remarque. Attention à ne pas dire qu'à un vecteur $u \in E$ on peut associer une forme linéaire $u^* \in E^*$ de manière intrinsèque ; le choix de la base dans laquelle on prend la coordonnée selon u est crucial.

Par exemple, si $E = \mathbb{R}^2$, fixons $u = (1, 0)$ et considérons $\left\{ \begin{array}{l} v_1 = (0, 1) \\ v_2 = (1, 1) \end{array} \right.$, de sorte que $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B}_1 = (u, v_1) \\ \mathcal{B}_2 = (u, v_2) \end{array} \right.$ sont deux bases de $\mathbb{R}^2$. Maintenant, le vecteur $x = (1, 1)$ se décompose comme $x = \left\{ \begin{array}{l} 1 \cdot u + 1 \cdot v_1 \\ 0 \cdot u + 1 \cdot v_2 \end{array} \right.$,d'où $u^*(x) = 1$ ou 0 selon que l'on considère u dans la base $\mathcal{B}_1$ ou $\mathcal{B}_2$.

1.2 Base duale

Proposition.
Si $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ est une base de E, alors $\mathcal{B}^* = (e_1^*, ..., e_n^*)$ est une base de E^*, appelé base duale *de $\mathcal{B}$.*
De plus, on dispose de l'isomorphisme

$$\Phi_{\mathcal{B}} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^* \\ e_i & \longmapsto & e_i^* \end{array} \right. , \textit{ de sorte que } \dim E^* = \dim E.$$

Démonstration.
Montrons que $\mathcal{B}^*$ est libre :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^* = 0 \quad & \Longrightarrow \quad \forall k = 1, ..., n, \ \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^* \right](e_k) = 0 \\ & \Longrightarrow \quad \forall k = 1, ..., n, \ \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^*(e_k) = 0 \\ & \Longrightarrow \quad \forall k = 1, ..., n, \ \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_i^k = 0 \\ & \Longrightarrow \quad \forall k = 1, ..., n, \ \lambda_k = 0. \end{aligned}$$

Le caractère générateur s'obtient en écrivant, pour $\varphi \in E^*$:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} \varphi(e_k)\, e_k^*.$$

En effet, en évaluant en un $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ quelconque de E , les deux expressions coïncident :

$$\begin{aligned}\left[\sum_{k=1}^{n} \varphi(e_k)\, e_k^*\right](x) &= \left[\sum_{k=1}^{n} \varphi(e_k)\, e_k^*\right]\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(e_k)\, e_k^* \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \varphi(e_k) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{e_k^*(e_i)}_{\delta_i^k} = \sum_{k=1}^{n} \varphi(e_k)\, \lambda_k = \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right) = \varphi(x).\end{aligned}$$

$\Phi_{\mathcal{B}}$ envoie par conséquent une base sur une base, donc est un isomorphisme, d'où l'égalité des dimensions.

1.3 Matrices et bases duales

Propriété.
Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\left\{\begin{array}{c} x \in E \\ \varphi \in E^* \end{array}\right.$ *. On a alors*

$$\varphi(x) = \left({}^t \operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}^*} \varphi\right) \operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} x = {}^t [\varphi]_{\mathcal{B}^*} [x]_{\mathcal{B}}.$$

Demonstration.
Posons $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$, et décomposons x dans $\mathcal{B}$: $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. On a alors

$$\left({}^t \operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}^*} \varphi\right)\left(\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} x\right) = (\varphi(e_1), ..., \varphi(e_n)) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(e_i) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \varphi(x).$$

Proposition.
Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E. Alors

$$\operatorname{Pass}(\mathcal{B}_1^*, \mathcal{B}_2^*) = {}^t \operatorname{Pass}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)^{-1}.$$

Démonstration.
Notons $\left\{\begin{array}{c} \mathcal{B}_1 = (e_1, ..., e_n) \\ \mathcal{B}_2 = (f_1, ..., f_n) \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{c} P = \operatorname{Pass}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \\ Q = \operatorname{Pass}(\mathcal{B}_1^*, \mathcal{B}_2^*) \end{array}\right.$. On veut ${}^tQP = I_n$, ce qui découle de

$$\begin{aligned}[I_n]_{i,j} &= \delta_i^j = f_i^*(f_j) = \left[\sum_{k=1}^{n} q_{k,i} e_k^*\right]\left(\sum_{l=1}^{n} p_{l,j} e_l\right) = \sum_{k=1}^{n} q_{k,i} \sum_{l=1}^{n} p_{l,j} \underbrace{e_k^*(e_l)}_{=\delta_k^l} \\ &= \sum_{k=1}^{n} q_{k,i} p_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \left[{}^tQ\right]_{i,k} [P]_{k,j} = \left[{}^tQP\right]_{i,j}.\end{aligned}$$

Corollaire.
Notons $\beta(V)$ l'ensemble des bases d'un espace vectoriel V. Alors l'application

$$\sigma : \left\{\begin{array}{ccc} \beta(E) & \longrightarrow & \beta(E^*) \\ \mathcal{B} & \longmapsto & \mathcal{B}^* \end{array}\right.$$

*(σ comme "**S**tar") est une bijection.*

Démonstration.
• *injectivité* : si $\sigma(\mathcal{B}_1) = \sigma(\mathcal{B}_2)$, i.e. $\mathcal{B}_1^* = \mathcal{B}_2^*$, alors

$$\operatorname{Pass}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = {}^t \operatorname{Pass}(\mathcal{B}_1^*, \mathcal{B}_2^*)^{-1} = {}^t I_n^{-1} = I_n, \text{ d'où } \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2.$$

• *surjectivité* : soit $\mathcal{C}$ une base de E^*. On se fixe une base $\mathcal{B}_0$ de E de référence, puis on considère une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\operatorname{Pass}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}) = {}^t \operatorname{Pass}(\mathcal{B}_0^*, \mathcal{C})^{-1}$ (possible car la matrice de droite est inversible), de sorte que

$$\operatorname{Pass}(\mathcal{B}_0^*, \mathcal{B}^*) = {}^t \operatorname{Pass}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B})^{-1} = {}^t \left({}^t \operatorname{Pass}(\mathcal{B}_0^*, \mathcal{C})^{-1}\right)^{-1} = \operatorname{Pass}(\mathcal{B}_0^*, \mathcal{C})$$

et donc $\mathcal{C} = \mathcal{B}^* = \sigma(\mathcal{B})$.

On dispose ainsi pour toute base $\mathcal{C}$ de E^* d'une base $\mathcal{B}$ de E dont la duale vaut $\mathcal{C}$. $\mathcal{B}$ est appelée *base préduale* ou *antéduale* de $\mathcal{C}$.

2 Bidual

La chose fascinante de la dualité en dimension finie est qu'elle agit comme un miroir.

E et E^* sont isomorphes, mais ils ne peuvent être naturellement identifiés – l'isomophisme dépend du choix d'une base de E –, de même qu'un objet et son image dans un miroir se ressemblent en tous points, mais ne sauraient être confondus pour une histoire de chiralité (l'image d'une main droite est une main gauche...).

Cependant, quand on considère le dual du dual de E, on retombe sur nos pieds, via l'identification suivante.

Définition.
Le bidual *de E est par définition le dual de E^*,* i.e.

$$E^{**} := (E^*)^* = \mathcal{L}(E^*, K).$$

2.1 Identification d'un espace à son bidual

Proposition.
L'application

$$J : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^{**} \\ x & \longmapsto & \widehat{x} : \left\{ \begin{array}{ccc} E^* & \longrightarrow & K \\ \varphi & \longmapsto & \varphi(x) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

J identifie ainsi de manière intrinsèque E à son bidual E^{**}.

Démonstration.
• J est tout d'abord bien définie, car $\widehat{x}$ est linéaire :

$$\widehat{x}(\lambda\varphi + \psi) = [\lambda\varphi + \psi](x) = \lambda\varphi(x) + \psi(x) = \lambda\widehat{x}(\varphi) + \widehat{x}(\psi).$$

• Montrons ensuite la linéarité de J :

$$\widehat{\lambda x + y}(\varphi) = \varphi(\lambda x + y) = \lambda\varphi(x) + \varphi(y) = \lambda\widehat{x}(\varphi) + \widehat{y}(\varphi).$$

• Il reste à prouver que J est injective, ce qui concluera par l'égalité des dimensions

$$\dim E^{**} = \dim (E^*)^* = \dim E^* = \dim E.$$

Soit donc $x \in \operatorname{Ker} J$. Si $x \neq 0$, on complète la famille libre (x) en une base de E, et on considère la forme linéaire x^* dans la base considérée, de sorte que

$$0 = \widehat{x}(x^*) = x^*(x) = 1, \text{ *absurde.*}$$

Il en résulte $x = 0$ et l'injectivité de J.

2.2 Crochet de dualité

L'isomorphisme entre E et E^{**} étant maintenant établi, on voit que l'écriture

$$\varphi(x) = \widehat{x}(\varphi)$$

comporte une certaine symétrie (ou dualité) : il n'y a plus de raisons de choisir qui est l'application et qui est le vecteur.

On introduit par conséquent le *crochet de dualité*

$$\langle \varphi, x \rangle = \langle x, \varphi \rangle := \varphi(x) = \widehat{x}(\varphi),$$

notation symétrique qui remplace avantageusement les précédentes – noter que l'on parle de *crochets*, alors qu'il s'agit en vérité de *chevrons* –, la dualité entre E et E^* s'exprimant à travers la propriété $\langle x, \varphi \rangle = \langle J(x), \varphi \rangle$.

L'isomorphisme J peut maintenant se réécrire de manière beaucoup plus concise :

$$J : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^{**} \\ x & \longmapsto & \langle x, \cdot \rangle \end{array} \right. .$$

2.3 Bidual et bases duales

Un aspect sympathique de l'isomorphsime J est qu'il se comporte bien vis-à-vis des bases duales.

Proposition.
Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Alors $J(\mathcal{B})$ est la base duale de $\mathcal{B}^*$:

$$J(\mathcal{B}) = \mathcal{B}^{**}.$$

Démonstration.
Écrivons $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$. On a $J(e_k)(e_i^*) = \langle e_i^*, e_k \rangle = \delta_i^k$, ce qui est précisément la formule définissant $(e_k^*)^*$.

On en déduit une formule explicite pour la base préduale, dont l'existence a déjà prouvée à l'aide de matrices de passage.

Corollaire (expression de la base préduale).
Soit $\mathcal{C}$ une base de E^*. Alors la base $\mathcal{B}$ préduale de $\mathcal{C}$ peut s'écrire

$$\mathcal{B} = J^{-1}(\mathcal{C}^*).$$

Démonstration.
Si un tel $\mathcal{B}$ existe, on doit avoir $\mathcal{C}^* = (\mathcal{B}^*)^* = J(\mathcal{B})$, d'où l'idée de définir

$$\mathcal{B} = J^{-1}(\mathcal{C}^*).$$

Posons $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C} = (\varphi_1, ..., \varphi_n) \\ \mathcal{B} = (e_1, ..., e_n) \end{array} \right.$ avec $e_i = J^{-1}(\varphi_i^*)$. On veut $\mathcal{C} = \mathcal{B}^*$, *i.e.* $\varphi_k = e_k^*$ pour tout k, ce qui s'obtient en calculant

$$\varphi_k(e_i) = \langle \varphi_k, e_i \rangle = \langle \varphi_k, J(e_i) \rangle = \langle \varphi_k, \varphi_i^* \rangle = \delta_i^k.$$

Synthèse.

On dispose d'une bijection "duale" et intrinsèque entre $\beta(E)$ et $\beta(E^*)$ donnée par

$$\sigma_E : \left\{ \begin{array}{ccc} \beta(E) & \longrightarrow & \beta(E^*) \\ \mathcal{B} & \longmapsto & \mathcal{B}^* \end{array} \right. \text{ et}$$
$$\sigma_E^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \beta(E^*) & \longrightarrow & \beta(E) \\ \mathcal{C} & \longmapsto & J^{-1}(\mathcal{C}^*) \end{array} \right. .$$

On peut tout résumer sur le digramme commutatif suivant : $\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\sigma_E} & E^* \\ & J \searrow & \downarrow \sigma_{E^*} \\ & & E^{**} \end{array}$.

Démonstration.
Construisons σ_E^{-1} en utilisant les propositions précédentes. On définit.

$$\tau : \left\{ \begin{array}{ccc} \beta(E^*) & \longrightarrow & \beta(E) \\ \mathcal{C} & \longmapsto & J^{-1}(\mathcal{C}^*) \end{array} \right.$$

qui va être σ_E^{-1}.
Soit $\mathcal{C} = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ une base de E^* et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ l'image de C par τ. On a donc $e_i = J^{-1}(\varphi_i^*)$.
Pour montrer que $\sigma_E \tau(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, *i.e.* $\left[J^{-1}(\mathcal{C}^*)\right]^* = \mathcal{C}$, ou encore $e_k^* = \varphi_k$ pour tout k, on calcule

$$\varphi_k(e_i) = \langle \varphi_k, e_i \rangle = \langle \varphi_k, J(e_i) \rangle = \langle \varphi_k, \varphi_i^* \rangle = \delta_i^k, \text{ qui est la formule souhaitée.}$$

Par ailleurs, on sait que

$$\tau \sigma_E(\mathcal{B}) = \tau(\mathcal{B}^*) = J^{-1}\left((\mathcal{B}^*)^*\right) = J^{-1}(\mathcal{B}^{**}) = J^{-1}(J(\mathcal{B})) = \mathcal{B}.$$

τ est donc bien l'application réciproque de σ_E.

3 Orthogonalité

3.1 Définitions et propriétés basiques

Définition.
On appelle orthogonal *de $A \subset E$ le sous-espace vectoriel de E^* défini par*

$$\begin{array}{rcl} A^\perp & = & \{\varphi \in E^* \ ; \ \forall a \in A, \ \varphi(a) = 0\} \\ & = & \{\varphi \in E^* \ ; \ \langle \varphi, A \rangle = \{0\}\} . \end{array}$$

On appelle orthogonal *de $B \subset E^*$ le sous-espace vectoriel de E défini par*

$$\begin{array}{rcl} B^\circ & = & \{x \in E \ ; \ \forall b \in B, \ b(x) = 0\} \\ & = & \{x \in E \ ; \ \langle B, x \rangle = \{0\}\} . \end{array}$$

Il est clair que $A^\perp$ et B° sont des sous-espaces vectoriels de E et E^*.

Remarque. Pourquoi le terme orthogonal est-il le même pour $A^\perp$ et B° alors que, dans le premier cas, on rajoute une étoile à l'espace de départ, et dans le second on en retire une ?
Il s'agit encore de l'identification de E et E^{**} via J, car on dispose de l'égalité

$$B^\perp = J(B^\circ) .$$

En effet :

$$\begin{array}{rcl} B^\perp & = & \{y \in E^{**} \ ; \ \langle y, B \rangle = \{0\}\} \\ & = & \{J(x) \in E^{**} \ ; \ \langle J(x), B \rangle = \{0\}\} \\ & = & \{J(x) \in E^{**} \ ; \ \langle x, B \rangle = \{0\}\} \\ & = & J(\{x \in E \ ; \ \langle B, x \rangle = \{0\}\}) \\ & = & J(B^\circ) . \end{array}$$

Cette identité est à retenir. Toutes les démonstrations concernant des orthogaux B° peuvent être copiées *mutatis mutandis* sur celles des orthogonaux $A^{\perp}$, mais il vaut mieux utiliser directement les résultats des $A^{\perp}$ sur les B puis l'isomorphisme J pour conclure.

Propriétés.
• *Tel un miroir, l'orthogonalité duale inverse l'ordre de la taille des objets :*

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 \subset A_2 \implies A_2^{\perp} \subset A_1^{\perp} \\ B_1 \subset B_2 \implies B_2^{\circ} \subset B_1^{\circ} \end{array} \right. .$$

• *Lorsque l'on parle d'orthogonalité, on peut toujours se ramener à des sous-espaces vectoriels :*

$$\left\{ \begin{array}{l} (\operatorname{Vect} A)^{\perp} = \operatorname{Vect}\left(A^{\perp}\right) = A^{\perp} \\ (\operatorname{Vect} B)^{\circ} = \operatorname{Vect}\left(B^{\circ}\right) = B^{\circ} \end{array} \right. .$$

Démonstration.
• Par implications directes :

$$\varphi \in A_2^{\perp} \implies \langle \varphi, A_1 \rangle \subset \langle \varphi, A_2 \rangle = \{0\} \implies \langle \varphi, A_1 \rangle = \{0\} \implies \varphi \in A_1^{\perp}.$$

Le second cas se traite en passant par J et en utilisant le premier cas :

$$B_2^{\circ} = J^{-1}\left(B_2^{\perp}\right) \subset J^{-1}\left(B_1^{\perp}\right) = B_1^{\circ}.$$

• Par équivalences :

$$\begin{array}{rcl} \varphi \in \operatorname{Vect}\left(A^{\perp}\right) & \iff & \varphi \in A^{\perp} \text{ car } A^{\perp} \text{ est un sous-espace vectoriel} \\ & \iff & \langle \varphi, A \rangle = \{0\} \\ & \iff & \langle \varphi, \operatorname{Vect} A \rangle = \{0\} \text{ par linéarité de } \varphi \\ & \iff & \varphi \in (\operatorname{Vect} A)^{\perp}. \end{array}$$

Le second cas se traite encore avec J, en appliquant le premier cas :

$$\begin{array}{rcl} (\operatorname{Vect} B)^{\perp} = \operatorname{Vect}\left(B^{\perp}\right) & \implies & J\left((\operatorname{Vect} B)^{\circ}\right) = \operatorname{Vect} J\left(B^{\circ}\right) \\ & \implies & J\left((\operatorname{Vect} B)^{\circ}\right) = J\left(\operatorname{Vect}\left(B^{\circ}\right)\right) \text{ par linéairité de } J \\ & \implies & (\operatorname{Vect} B)^{\circ} = \operatorname{Vect}\left(B^{\circ}\right) \text{ par injectivité de } J. \end{array}$$

3.2 Description des orthogonaux

Il existe une manière très simple et en même temps très riche de voir les orthogonaux.

Proposition (construction des orthogonaux).
Soit F un sous-espace vectoriel de E. Pour obenir $F^{\perp}$:
• *on prend une base $(e_1, ..., e_p)$ de F,*
• *on la complète en une base $(e_1, ..., e_n)$ de E,*
• *on la dualise,*
• *on prend l'engendré $\operatorname{Vect}\left(e_{p+1}^*, ..., e_n^*\right)$ des vecteurs hors de F dualisés.*
Ceci peut se résumer à l'aide du schéma suivant :

$$\left\downarrow \begin{array}{lll} E: & \overbrace{e_1, ..., e_p}^{F} & e_{p+1}, ..., e_n \\ E^*: & e_1^*, ..., e_p^* & \underbrace{e_{p+1}^*, ..., e_n^*}_{F^{\perp}} \end{array} \right\downarrow .$$

Soit V un sous-espace vectoriel de E^*. Pour obenir V° :
- *on prend une base $\left(\varphi_1, ..., \varphi_p\right)$ de V,*
- *on la complète en une base $\left(\varphi_1, ..., \varphi_n\right)$ de E^*,*
- *on la prédualise, mettons en $(e_1, ..., e_n)$,*
- *on prend l'engendré $\operatorname{Vect}\left(e_{p+1}, ..., e_n\right)$ des vecteurs hors de V prédualisés.*

Ceci peut se résumer à l'aide du schéma suivant :

$$\left\uparrow \begin{array}{ccc} E: & e_1, ..., e_p & \overbrace{e_{p+1}, ..., e_n}^{V^\circ} \\ E^*: & \underbrace{\varphi_1, ..., \varphi_p}_{V} & \varphi_{p+1}, ..., \varphi_n \end{array} \right\uparrow .$$

Démonstration.
Il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned} \varphi \in F^\perp & \iff \langle \varphi, F \rangle = \{0\} \\ & \iff \forall i = 1, ..., p,\ \langle \varphi, e_i \rangle = 0 \\ & \iff \forall i = 1, ..., p,\ \langle \varphi, e_i^{**} \rangle = 0 \\ & \iff \forall i = 1, ..., p,\ e_i^{**}(\varphi) = 0 \\ & \iff \varphi \in \operatorname{Vect}\left(e_{p+1}^*, ..., e_n^*\right). \end{aligned}$$

Pour V°, on répète le procédé ci-dessus en passant par J^{-1} pour retomber dans E :

$$\left\downarrow \begin{array}{ccc} E^*: & \overbrace{\varphi_1, ..., \varphi_p}^{V} & \varphi_{p+1}, ..., \varphi_n \\ E^{**}: & \varphi_1^*, ..., \varphi_p^* & \underbrace{\varphi_{p+1}^*, ..., \varphi_n^*}_{V^\perp} \\ & & \\ E: & \underbrace{e_1, ..., e_p}_{J^{-1}\left(\varphi_1^*, ..., \varphi_p^*\right)} & \underbrace{e_{p+1}, ..., e_n}_{J^{-1}(V^\perp)} \end{array} \right\downarrow .$$

On se souvient alors que $V^\circ = J^{-1}\left(V^\perp\right)$ et qu'une base préduale de $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ est $J^{-1}(\varphi_1^*, ..., \varphi_n^*)$, ce qui conclut.

Corollaire (dimensions des orthogonaux).
Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors

$$\left\{ \begin{array}{c} \dim F^\perp = \operatorname{codim} F \\ \left(F^\perp\right)^\circ = F \end{array} \right. .$$

Si V est un sous-espace vectoriel de E^*, alors

$$\left\{ \begin{array}{c} \dim V^\circ = \operatorname{codim} V \\ \left(V^\circ\right)^\perp = V \end{array} \right. .$$

Démonstration.
Tout tombe en reprenant les constructions décrites à la proposition précédente.

3.3 Quelques corollaires

Corollaire 1 (comportement de $\perp$ et $\circ$ vis-à-vis de $+$ et $\cap$).
L'orthogonalisation transforme les $+$ en $\cap$ et les $\cap$ en $+$, au sens suivant.
• *Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors*

$$\left\{\begin{array}{l}(F+G)^{\perp}=F^{\perp}\cap G^{\perp}\\(F\cap G)^{\perp}=F^{\perp}+G^{\perp}\end{array}\right. .$$

• *Si V et W sont deux sous-espaces vectoriels de E^*, alors*

$$\left\{\begin{array}{l}(V+W)^{\circ}=V^{\circ}\cap W^{\circ}\\(V\cap W)^{\circ}=V^{\circ}+W^{\circ}\end{array}\right. .$$

Démonstration.

Première méthode (utilisation de la construction explicite des orthogonaux).
Soit $(h_1,...,h_r)$ une base de $F\cap G$, que l'on complète en

$$\left\{\begin{array}{l}(h_1,...,h_r,f_1,...,f_p)\text{ base de }F\\(h_1,...,h_r,g_1,...,f_q)\text{ base de }G\end{array}\right. .$$

Remarquer que les espaces $\left\{\begin{array}{l}\operatorname{Vect}(f_1,...,f_p)\\\operatorname{Vect}(g_1,...,g_q)\end{array}\right.$ sont en somme directe, sinon ils contiendraient un élément de $F\cap G$ qui ne serait pas dans $\operatorname{Vect}(h_1,...,h_r)$.

On applique alors la construction des orthogonaux. On complète la base $(f_1,...,f_p,g_1,...,g_q,h_1,...,h_r)$ de $F+G$ en une base de E :

$$(e_1,...,e_m,f_1,...,f_p,g_1,...,g_q,h_1,...,h_r).$$

Résumons :

$$E\quad:\quad e_1,...,e_m,\underbrace{f_1,...,f_p,\overbrace{h_1,...,h_r}^{F\cap G}}_{F},g_1,...,g_q$$

$$E\quad:\quad e_1,...,e_m,\underbrace{f_1,...,f_p,\overbrace{h_1,...,h_r,g_1,...,g_q}^{G}}_{F+G}.$$

Les résultats devraient maintenant apparaître clairement sur le schéma ci-dessus en réécrivant tout dans le dual.

De manière plus explicite, on a

$$\left\{\begin{array}{l}F^{\perp}=\operatorname{Vect}\left(e_1^*,...,e_m^*,g_1^*,...,g_q^*\right)\\G^{\perp}=\operatorname{Vect}\left(e_1^*,...,e_m^*,f_1^*,...,f_p^*\right)\end{array}\right. ,$$

d'où

$$\begin{aligned}(F+G)^{\perp}&=\operatorname{Vect}\left(e_1^*,...,e_m^*\right)\\&=\operatorname{Vect}\left(e_1^*,...,e_m^*,f_1^*,...,f_p^*\right)\cap\operatorname{Vect}\left(e_1^*,...,e_m^*,g_1^*,...,g_q^*\right)\\&=F^{\perp}\cap G^{\perp}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(F\cap G)^{\perp}&=\operatorname{Vect}\left(e_1^*,...,e_m^*,f_1^*,...,f_p^*,g_1^*,...,g_q^*\right)\\&=\operatorname{Vect}\left(e_1^*,...,e_m^*,f_1^*,...,f_p^*\right)+\operatorname{Vect}\left(e_1^*,...,e_m^*,g_1^*,...,g_q^*\right)\\&=F^{\perp}+G^{\perp}.\end{aligned}$$

Pour V et W, on applique comme toujours ce qui précède en y incorporant du J :

$$(V+W)^\circ = J^{-1}\left((V+W)^\perp\right) = J^{-1}\left(V^\perp \cap W^\perp\right) = J^{-1}\left(V^\perp\right) \cap J^{-1}\left(W^\perp\right) = V^\circ \cap W^\circ$$

puis

$$(V\cap W)^\circ = J^{-1}\left((V\cap W)^\perp\right) = J^{-1}\left(V^\perp + W^\perp\right) = J^{-1}\left(V^\perp\right) + J^{-1}\left(W^\perp\right) = V^\circ + W^\circ.$$

Seconde méthode (utilisation des dimensions).

On raisonne directement par double inclusion. On a d'une part

$$\left\{\begin{array}{l} F\subset F+G \implies (F+G)^\perp \subset F^\perp \\ G\subset F+G \implies (F+G)^\perp \subset G^\perp \end{array}\right. \implies (F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp,$$

d'autre part

$$\begin{array}{rcl} \varphi\in F^\perp\cap G^\perp & \implies & \langle\varphi,F\rangle = \langle\varphi,G\rangle = \{0\} \\ & \implies & \langle\varphi,F+G\rangle \subset \{0\}+\{0\}=\{0\} \\ & \implies & \varphi\in(F+G)^\perp, \end{array}$$

d'où l'égalité

$$(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp.$$

Par ailleurs,

$$\begin{array}{rcl} \varphi\in F^\perp+G^\perp & \implies & \varphi = \underbrace{\varphi_F}_{\in F^\perp} + \underbrace{\varphi_G}_{\in G^\perp} \\ & \implies & \langle\varphi,F\cap G\rangle \subset \langle\varphi_F,F\cap G\rangle + \langle\varphi_G,F\cap G\rangle \\ & \implies & \langle\varphi,F\cap G\rangle \subset \langle\varphi_F,F\rangle + \langle\varphi_G,G\rangle \\ & \implies & \langle\varphi,F\cap G\rangle \subset \{0\}+\{0\}=\{0\} \\ & \implies & \varphi\in(F\cap G)^\perp, \end{array}$$

d'où

$$F^\perp+G^\perp \subset (F\cap G)^\perp,$$

et puisque l'on a toujours l'identité dimensionnelle

$$\begin{array}{rcl} \dim\left(F^\perp+G^\perp\right)+\dim\left(F^\perp\cap G^\perp\right) & = & \dim F^\perp + \dim G^\perp \\ & = & (n-\dim F)+(n-\dim G) \\ & = & (n-\dim(F+G))+(n-\dim(F\cap G)) \\ & = & \dim\left[(F+G)^\perp\right]+\dim\left[(F\cap G)^\perp\right], \end{array}$$

on conclut grâce à la première égalité que

$$\dim\left(F^\perp+G^\perp\right) = \dim\left[(F\cap G)^\perp\right].$$

On recommence *exactement* la même chose pour V et W. On a d'une part

$$\left\{\begin{array}{l} V\subset V+W \implies (V+W)^\circ \subset V^\circ \\ W\subset V+W \implies (V+W)^\circ \subset W^\circ \end{array}\right. \implies (V+W)^\circ \subset V^\circ \cap W^\circ,$$

d'autre part

$$\begin{array}{rcl} x\in V^\circ\cap W^\circ & \implies & \langle V,x\rangle = \langle W,x\rangle = \{0\} \\ & \implies & \langle V+W,x\rangle \subset \{0\}+\{0\}=\{0\} \\ & \implies & x\in(V+W)^\circ, \end{array}$$

d'où l'égalité

$$(V+W)^{\circ} = V^{\circ} \cap W^{\circ}.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} x \in V^{\circ} + W^{\circ} &\implies x = \underbrace{x_V}_{\in V^{\circ}} + \underbrace{x_W}_{\in W^{\circ}} \\ &\implies \langle V \cap W, x \rangle \subset \langle V \cap W, x_V \rangle + \langle V \cap W, x_W \rangle \\ &\implies \langle V \cap W, x \rangle \subset \langle V, x_V \rangle + \langle W, x_W \rangle \\ &\implies \langle V \cap W, x \rangle \subset \{0\} + \{0\} = \{0\} \\ &\implies x \in (V \cap W)^{\circ}, \end{aligned}$$

i.e.

$$V^{\circ} + W^{\circ} \subset (V \cap W)^{\circ},$$

et puisque l'on a toujours l'identité dimensionnelle

$$\dim (V^{\circ} + W^{\circ}) + \dim (V^{\circ} \cap W^{\circ}) = \dim \left[(V+W)^{\circ}\right] + \dim \left[(V \cap W)^{\circ}\right],$$

on conclut grâce à la première égalité que

$$\dim (V^{\circ} + W^{\circ}) = \dim \left[(V \cap W)^{\circ}\right].$$

Remarque. L'avantage de la seconde méthode est qu'elle permet d'obtenir les trois quarts des résultats sans utiliser la dimension finie.

Corollaire 2 (calcul du rang d'une famille de formes linéaires).
Soit $\varphi_1, ..., \varphi_p$ des formes linéaires sur E. Alors

$$\operatorname{rg}(\varphi_1, ..., \varphi_p) = \operatorname{codim} \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} \varphi_i.$$

Démonstration.
Il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} \varphi_i &= \{x \in E\,;\, \forall i = 1, ..., p,\ \langle \varphi_i, x \rangle = 0\} \\ &= \left\{x \in E\,;\ \left\langle \operatorname{Vect}(\varphi_1, ...\varphi_p), x \right\rangle = \{0\}\right\} \\ &= \operatorname{Vect}(\varphi_1, ...\varphi_p)^{\circ}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \dim \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} \varphi_i &= \dim \left(\operatorname{Vect}(\varphi_1, ...\varphi_p)\right)^{\circ} \\ &= \dim E - \dim \operatorname{Vect}(\varphi_1, ...\varphi_p) \\ &= \dim E - \operatorname{rg}(\varphi_1, ...\varphi_p). \end{aligned}$$

Corollaire (décomposition d'un sous-espace vectoriel en intersection d'hyperplans).
• *Tout sous-espace vectoriel F peut se décomposer comme intersection de* codim F *d'hyperplans :*

$$F = \bigcap_{i=1}^{\operatorname{codim} F} \operatorname{Ker} \varphi_i.$$

- *Réciproquement, pour toute décomposition de F en q hyperplans*

$$F = \bigcap_{i=1}^{q} \operatorname{Ker} \varphi_i,$$

d'une part on a $q \geq \operatorname{codim} F$, d'autre part on peut extraire de la décomposition une sous-famille de codim F *hyperplans dont l'intersection reste inchangée,* i.e. *(quitte à réindexer les φ_i)*

$$F = \bigcap_{i=1}^{\operatorname{codim} F} \operatorname{Ker} \varphi_i.$$

Démonstration.
Concernant l'existence, on considère $\psi_1, ..., \psi_p$ une base de $F^\perp$, avec $p = \dim F^\perp = \operatorname{codim} F$, de sorte que

$$\begin{array}{rcl} x \in F & \iff & x \in \left(F^\perp\right)^\circ \\ & \iff & \left\langle F^\perp, x \right\rangle = \{0\} \\ & \iff & \forall i = 1, ..., p,\ \langle \psi_i, x \rangle = 0 \\ & \iff & \forall i = 1, ..., p\ x \in \operatorname{Ker} \psi_i \\ & \iff & x \in \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} \psi_i. \end{array}$$

Soit réciproquement $F = \bigcap_{i=1}^{q} \operatorname{Ker} \varphi_i$ une décomposition de F en q hyperplans. Quitte à renuméroter les φ_i, soit $(\varphi_1, ..., \varphi_r)$ une sous-famille libre de $\left(\varphi_1, ..., \varphi_q\right)$. Puisque

$$\operatorname{codim} F = \operatorname{codim} \bigcap_{i=1}^{q} \operatorname{Ker} \varphi_i = \operatorname{rg}\left(\varphi_1, ..., \varphi_q\right) = \operatorname{rg}\left(\varphi_1, ..., \varphi_r\right) = r,$$

on a $q \geq r = \operatorname{codim} F$ et la minoration voulue sur le nombre d'hyperplans utilisés. D'autre part, on dispose de l'implication

$$\psi \in \operatorname{Vect}\left(\varphi_1, ..., \varphi_r\right) \implies \bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} \varphi_i \subset \operatorname{Ker} \psi,$$

ce que montre que $\bigcap_{i=1}^{q} \operatorname{Ker} \varphi_i = \bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} \varphi_{\sigma(i)}$, prouvant que l'on peut élaguer les hyperplans restants.

4 Application transposée

Transposer une matrice est une opération miroir, tout comme la dualité. Voyons un lien plus précis.

4.1 Définition – relation matricielle

Définition.
Soient E et F deux espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle transposée *de u l'application linéaire définie par*

$$^t u : \left\{ \begin{array}{ccc} F^* & \longrightarrow & E^* \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ u \end{array} \right. .$$

Proposition (justification de la terminologie "transposée").
Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B} \text{ base de } E \\ \mathcal{C} \text{ base de } F \end{array} \right.$ *, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors*

$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{C}^*,\ \mathcal{B}^*} {}^t u = {}^t \operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} u.$$

Démonstration.

Posons $\left\{\begin{array}{l}\mathcal{B}=(e_1,...,e_n)\\ \mathcal{C}=(f_1,...,f_m)\end{array}\right.$ et notons $A=\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}u$. En utilisant la formule $\varphi=\sum_{k=1}^n\varphi(e_k)\,e_k^*$ pour une forme linéaire φ, on obtient

$$\begin{aligned}{}^tu\left(f_j^*\right) &= f_j^*\circ u=\sum_{k=1}^n\left[f_j^*\circ u\right](e_k)\,e_k^*=\sum_{k=1}^n f_j^*\left(u\left(e_k\right)\right)e_k^*\\ &= \sum_{k=1}^n f_j^*\left(\sum_{i=1}^m a_{i,k}f_i\right)e_k^*=\sum_{k=1}^n\sum_{i=1}^m a_{i,k}\underbrace{f_j^*\left(f_i\right)}_{=\delta_i^j}e_k^*=\sum_{k=1}^n a_{j,k}e_k^*,\end{aligned}$$

d'où

$$\left[\operatorname*{Mat}_{\mathcal{C}^*,\mathcal{B}^*}{}^tu\right]_{i,j}=e_i^{**}\left(f_j^*\circ u\right)=e_i^{**}\left(\sum_{k=1}^n a_{j,k}e_k^*\right)=\sum_{k=1}^n a_{j,k}\underbrace{e_i^{**}\left(e_k^*\right)}_{=\delta_i^k}=a_{j,i}=\left[{}^t\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}u\right]_{i,j}.$$

En corollaire immédiat :

$$\left\{\begin{array}{c}\operatorname{rg}\,{}^tu=\operatorname{rg}u\\ {}^t(u\circ v)={}^tv\circ{}^tu\\ \chi_{{}^tu}=\chi_u\\ \operatorname{Sp}\left({}^tu\right)=\operatorname{Sp}u\end{array}\right..$$

4.2 Lien entre applications transposées et bidual

On sait que ${}^t\left({}^tA\right)=A$ pour A matrice. Qu'en est-il des endomorphismes et de leur transposées ?

Propriété (calcul de ${}^t\left({}^tu\right)$).
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u\in\mathcal{L}(E)$. Alors

$${}^t\left({}^tu\right)=J\circ u\circ J^{-1}.$$

Démonstration.

Pour $\left\{\begin{array}{l}x\in E\\ \varphi\in E^*\end{array}\right.$, on a

$$\begin{aligned}\left[{}^t\left({}^tu\right)(J(x))\right](\varphi) &= \left[J(x)\circ{}^tu\right](\varphi)=J(x)\left({}^tu(\varphi)\right)=\left\langle x,{}^tu(\varphi)\right\rangle\\ &= \langle x,\varphi\circ u\rangle=\langle\varphi,u(x)\rangle=[J(u(x))](\varphi),\end{aligned}$$

d'où ${}^t\left({}^tu\right)(J(x))=J(u(x))$ pour tout x, *i.e.* ${}^t\left({}^tu\right)\circ J=J\circ u$. Le résultat en découle étant donnée l'inversibilité de J.

Remarque. On retrouve la relation ${}^t\left({}^tu\right)=u$ à peu de choses près, le J étant juste une passerelle entre les espaces de définition.

4.3 Calcul du noyau et de l'image

Proposition.

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On dispose des égalités suivantes : $\left\{\begin{array}{l}\operatorname{Im}({}^t u) = (\operatorname{Ker} u)^{\perp} \\ \operatorname{Ker}({}^t u) = (\operatorname{Im} u)^{\perp}\end{array}\right.$.

Démonstration.

• On a les implications

$$\varphi \in \operatorname{Im}\left({}^t u\right) \implies \varphi = {}^t u(\psi) = \psi \circ u \implies \langle \varphi, \operatorname{Ker} u \rangle = \{0\} \implies \varphi \in (\operatorname{Ker} u)^{\perp}.$$

On obtient l'égalité en prenant les dimensions :

$$\dim \operatorname{Im}\left({}^t u\right) = \operatorname{rg}\left({}^t u\right) = \operatorname{rg} u = \operatorname*{codim}_E \operatorname{Ker} u = \dim\left[(\operatorname{Ker} u)^{\perp}\right].$$

• On a les équivalences

$$\varphi \in \operatorname{Ker}\left({}^t u\right) \iff \varphi \circ u = 0 \iff \langle \varphi, \operatorname{Im} u \rangle = \{0\} \iff \varphi \in (\operatorname{Im} u)^{\perp}.$$

4.4 Espace stable et dualité en dimension finie

Proposition (très utile).

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. On a l'équivalence

$$F \textit{ stable par } u \iff F^{\perp} \textit{ stable par } {}^t u.$$

Démonstration.

Première méthode (par le calcul).

• Supposons F stable par u. Soit $\varphi \in F^{\perp}$; on a

$$\left\langle {}^t u(\varphi), F \right\rangle = \langle \varphi \circ u, F \rangle = \langle \varphi, u(F) \rangle \subset \langle \varphi, F \rangle = \{0\},$$

d'où ${}^t u(\varphi) \in F^{\perp}$.

• Supposons réciproquement $F^{\perp}$ stable par ${}^t u$. On dispose alors de deux approches, l'une utilisant la décomposition de F en intersection d'hyperplans, l'autre le bidual.

$*$ On décompose $F = \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} \varphi_i$ en intersection d'hyperplans. On a alors les implications suivantes, à $i \in \{1, ..., p\}$ fixé :

$$\begin{aligned} F \subset \operatorname{Ker} \varphi_i &\implies \langle \varphi_i, F \rangle = \{0\} \implies \varphi_i \in F^{\perp} \implies {}^t u(\varphi_i) \in F^{\perp} \implies \varphi_i \circ u \in F^{\perp} \\ &\implies \langle \varphi_i \circ u, F \rangle = \{0\} \implies \langle \varphi_i, u(F) \rangle = \{0\} \implies u(F) \subset \operatorname{Ker} \varphi_i, \end{aligned}$$

d'où $u(F) \subset \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} \varphi_i = F$ et F est bien stable par u.

$*$ On applique le sens direct : $\left(F^{\perp}\right)^{\perp}$ est stable par ${}^t\left({}^t u\right)$. On sait déjà que

$$\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = J\left(\left(F^{\perp}\right)^{\circ}\right) = J(F),$$

et une propriété précédente nous donne ${}^t\left({}^t u\right) \circ J = J \circ u$. Maintenant, pour $x \in F$, $J(x) \in J(F)$, donc son image par ${}^t\left({}^t u\right)$

$${}^t\left({}^t u\right) \circ J(x) = J \circ u(x)$$

doit rester dans $J(F)$, donc $u(x)$ reste dans F par injectivité de J. C'est-y pas plus joli comme ça ?

Seconde méthode (par les matrices).

Soit $\mathcal{F}$ une base de F que l'on complète en $\mathcal{B} = (\mathcal{F}, \mathcal{E})$ base de E, de sorte que $F^{\perp} = \mathrm{Vect}\,(\mathcal{E}^*)$. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
F \text{ stable par } u \quad &\iff \quad \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}\, u = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\quad}^{F} & \quad\; \end{array} \\ \begin{pmatrix} ? & ? \\ 0 & ? \end{pmatrix} \end{array} \\
&\iff \quad {}^t \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}\, u = \begin{pmatrix} ? & 0 \\ ? & ? \end{pmatrix} \\
&\iff \quad \underset{\mathcal{B}^*}{\mathrm{Mat}}\, \left({}^t u\right) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad\; & \overbrace{\quad}^{F^{\perp}} \end{array} \\ \begin{pmatrix} ? & 0 \\ ? & ? \end{pmatrix} \end{array} \\
&\iff \quad F^{\perp} \text{ stable par } {}^t u.
\end{aligned}$$

C'est quand même bien plus classe comme ça, non ?

La proposition précédente s'avère très utile pour mener des raisonnements par récurrence.

Illustrons en montrant par exemple qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_u est scindé.

On commence par faire passer les hypothèses dans le dual. Dans notre exemple, si A est une matrice représentant u, alors ${}^t A$ représente ${}^t u$, donc $\chi_{{}^t u} = \chi_{{}^t A} = \chi_A = \chi_u$, ce qui montre que $\chi_{{}^t u}$ est scindé.

On montre ensuite que ${}^t u$ admet une droite stable. Pour le cas qui nous intéresse, $\chi_{{}^t u}$ est scindé, donc admet une racine, d'où une valeur propre pour ${}^t u$ et la droite stable cherchée.

On peut alors appliquer la proposition précédente : on dispose d'une droite D dans E^* stable par ${}^t u$, donc son orthogonal D° dans E est stable par u. Or, $\dim D^{\circ} = \dim E - \dim D = \dim E - 1$, donc D° est un hyperplan H.

On conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence à u restreint à notre hyperplan stable. Soit $e_1, ..., e_{n-1}$ une base de trigonalisation de $u_{|H}$. On complète par un vecteur e_n, d'où $\mathrm{Mat}_{e_1,...,e_n}\, u = \begin{pmatrix} T & * \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ où T est triangulaire supérieure, ce qui montre que u est trigonalisable.