Anneaux différentiels et dérivations de Kähler

Marc SAGE

30 avril 2009

Tous les anneaux considérés seront unitaires.

1 Dérivation algébrique

Définition.
Soient A et B deux anneaux.

Une dérivation *de A dans B est un morphisme* $\left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ a & \longmapsto & a' \end{array} \right.$ *de groupes additifs vérifiant la* formule de Leibniz *:*

$$\forall x, y \in A,\ (xy)' = x'y + xy'.$$

Un anneau muni d'une dérivation à valeurs dans lui-même est appelé anneau différentiel*.*

L'exemple historique est bien sûr la dérivation usuelle des fonctions rélles dérivables sur un intervalle I infini (dérivation prenant ses valeurs dans l'anneau $\mathbb{R}^I$). Nous verrons à la section suivante une description exhaustive des dérivations d'une sous-algèbre de $\mathbb{R}^I$ ainsi qu'un réponse à la question : peut-on prolonger la dérivation usuelle sur $D^1(I, \mathbb{R})$ à $C^0(I, \mathbb{R})$.

Des exemples d'anneaux différentiels sont l'anneau $\mathbb{Z}[X]$ des polynômes à coefficients entiers, l'anneau des fonctions réelles de classe C^∞ sur un intervalle infini, le corps $\mathbb{C}(X)$ des fractions rationnelles complexes, l'anneau des fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$.

Propriétés basiques.
Soit $A \longrightarrow B$ une dérivation.
Prendre $x = y = 1$ dans la formule de Leibniz montre que

$$1' = 0.$$

Des récurrences immédiates donnent la dérivée d'une puissance (entière positive)

$$(a^n)' = na^{n-1}a'$$

ainsi que les dérivées sucessives d'un produit (*formules de Leibniz*)

$$\begin{aligned} (ab)^{(n)} &= \sum_{p+q=n} \binom{n}{p} a^{(p)} b^{(q)}, \\ (a_1 a_2 \cdots a_k)^{(n)} &= \sum_{p_1+p_2+\cdots+p_k=n} \binom{n}{p_1\ p_2\ \cdots\ p_k} a_1^{(p_1)} a_2^{(p_2)} \cdots a_k^{(p_k)}. \end{aligned}$$

Anneau des constantes.
Le noyau d'une dérivation $A \longrightarrow B$ est un sous-groupe additif de A, et même un sous-anneau d'après la formule de Leibniz, appelé *anneau des constantes*. En le notant C, la dérivation $a \mapsto a'$ devient une application C-linéaire.

Par exemple, les constantes de la dérivation usuelle des applications dérivables sont les fonctions constantes, ce qui justifie la terminologie employée.

Un autre dérivation des polynômes.

Soit A un annneau différentiel. La dérivation induit une application linéaire sur $A^{\mathbb{N}}$ qui agit par dérivation sur chaque coordonnée, Pour $P = \sum a_i X^i$ dans $A[X]$ vu dans $A^{\mathbb{N}}$, on notera son image par cette dérivation produit (à ne pas confondre avec la dérivée usuelle P')

$$'P := \sum a_i' X^i.$$

Observer qu'un polynôme à coefficients dans l'anneau des constantes est annulé par $P \mapsto \ 'P$, en particulier les monômes, d'où la formule de Leibniz pour ces derniers (elle s'écrit $0 = 0$), donc pour tous les polynômes (par linéairité). On dispose donc d'une dérivation sur $A[X]$ qui prolonge clairement celle de A.

Un des intérets de cette dérivation est qu'elle permet d'exprimer la dérivée d'un polynôme de $A[X]$ évalué en un élément de A. Pour un monôme λX^n, on trouve

$$(\lambda a^n)' = \lambda n a^{n-1} a' + \lambda' a^n = a' [\lambda X^n]' (a) + \ ' [\lambda X^n] (a),$$

d'où par linéarité la formule générale

$$P(a)' = P'(a) a' + \ 'P(a).$$

Extension différentielle.

Une *extension différentielle* est une extension d'anneaux différentiels telle que la dérivation de l'anneau d'arrivée prolonge celle de l'anneau de départ.

Exemple. Lorsque A est un anneau différentiel commutatif **intègre**, sa dérivation se prolonge d'une unique façon en une dérivation du corps des fractions de A. L'unicité d'obtient en dérivant l'égalité $\frac{a}{b} b = a$, d'où la formule connue du quotient

$$\left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a'b - ab'}{b^2}.$$

On laisse au soin du lecteur vérifier que la formule ci-dessus ne dépend pas des représentants (a, b) de la fraction et qu'elle satisfait la formule de Leibniz.

2 Dérivations de Kähler

Soit I un intervalle infini de $\mathbb{R}$ et A une sous-$\mathbb{R}$-algèbre non nulle de $\mathbb{R}^I$. On pensera aux applications k fois dérivables ou de classe C^k pour $k = 0, 1, ..., \infty$.

On s'intéresse aux dérivations *linéaires*[1] de A envoyant Id sur 1.

Remarque. Une dérivation étant additive, la linéarité équivaut à l'homogénéité, laquelle implique la nullité des λ' pour λ application constantes :

$$\lambda' = (\lambda \cdot 1)' = \lambda \cdot 1' = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Réciproquement, dire que les fonctions constantes sont dans l'anneaux des constantes montre la $\mathbb{R}$-linéarité de la dérivation via la formule de Leibniz.

Proposition.

Soit d une dérivation linéaire sur $C^1(I, \mathbb{R})$ envoyant l'identité sur 1. Alors d coïncide avec la dérivation usuelle sur $D^2(I, \mathbb{R})$.

Démonstration.

Soit f deux fois dérivable. Fixons $a \in I$ et montrons que $d(f)(a) = f'(a)$.

[1] A est un $\mathbb{R}$-ev

On écrit $f - f(a) = (\mathrm{Id} - a) \times g$ où g est une application envoyant a sur $f'(a)$. En admettant un moment que g soit C^1 (et donc que $d(g)$ soit défini), on a donc

$$\begin{aligned} d(f) &= d(f - f(a)) \text{ car } d \text{ annule les constantes} \\ &= d((\mathrm{Id} - a) g) \\ &= d(\mathrm{Id} - a) \times g + (\mathrm{Id} - a) \times d(g) \text{ car tout est } C^1 \\ &= d(\mathrm{Id}) \times g + (\mathrm{Id} - a) \times d(g) \text{ car } d \text{ annule les constantes} \\ &= g + (\mathrm{Id} - a) g' \text{ car } d \text{ envoie } \mathrm{Id} \text{ sur } 1, \end{aligned}$$

d'où en évaluant en a

$$d(f)(a) = g(a) = f'(a), \ CQFD.$$

Montrons que g est bien C^1. Déjà, g est bien continue sur I par définition de $f'(a)$. Ensuite, g est C^1 sur $I \setminus \{a\}$: il reste à montrer que g est dérivable en a et que g' est continue en a.

D'une part, on a (pour $x \neq a$)

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{(x - a)^2} = \frac{1}{2} f''(a) + o(x - a) \longrightarrow \frac{1}{2} f''(a),$$

donc g est dérivable en a avec $g'(a) = \frac{1}{2} f''(a)$, d'autre part on a (pour $x \neq a$)

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f'(x)(x - a) + f(x) - f(a)}{(x - a)^2} \\ &= \underbrace{\frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}}_{\longrightarrow f''(a)} + \underbrace{\frac{f'(a)(x - a) + f(x) - f(a)}{(x - a)^2}}_{= -\frac{1}{2} f''(a) + o(x - a)} \\ &\longrightarrow \frac{1}{2} f''(a), \ CQFD. \end{aligned}$$

Question. Pour faire marcher ce qui précède, on a besoin que d soit défini en g qui est moins régulière que f. En particulier, si f est juste dérivable, g est juste continue. L'idéal serait donc de pouvoir prolonger d (définie sur les applications dérivables) sur les fonctions continues tout en conservant la formule du produit. Or, l'on va montrer qu'une dérivation linéaire sur $C^0(I, \mathbb{R})$ est nécessairement nulle.

Pire : on va montrer que, sans autre conditions, il y a beaucoup de dérivations (autant que de réels !) autres que la dérivation usuelle.

Peut-on sauver la mise en imposant à d de tranformer les application C^1 en des applications continues ? J'y réfléchis encore...

Définitions – Notations. Pour a dans I, on appellera

1. a-dérivation sur A toute forme linéaire $f \mapsto f'$ sur A telle que
$$\forall f, g \in A, \ (fg)' = f(a) g' + g(a) f';$$
2. $\mathfrak{m}_a$ l'idéal[2] des applications $I \longrightarrow \mathbb{R}$ s'annulant en a ;
3. $\mathfrak{n}_a$ l'idéal $\mathfrak{m}_a^2 := \sum \mathfrak{m}_a \mathfrak{m}_a$ formé des sommes finies de produits de deux éléments de $\mathfrak{m}_a$ (c'est un sev de $\mathfrak{m}_a$) ;
4. V_a le $\mathbb{R}$-ev quotient ${}^{\mathfrak{m}_a}\!/_{\mathfrak{n}_a}$.

[2] L'idéal $\mathfrak{m}_a$ est maximal, d'où la notation.

Théorème. *Les dérivations linéaires sur A sont en bijection avec le produit $\prod_{a\in I} V_a^*$ des duaux des V_a pour a décrivant I.*

Corollaires.

1. *Sur $\mathbb{R}^I$ et $C^0(I,\mathbb{R})$, il n'y a pas d'autre dérivations linéaires que l'application nulle.*
2. *Sur $D^1(I,\mathbb{R})$, la dimensions de l'ev des dérivations linéaires est supérieure au continu. Même conclusion pour l'ev des dérivations linéaires envoyant* Id *sur* 1.

Démonstration des corollaires.

1. Il n'y pas de dérivations linéaires autre que l'application nulle lorsque V_a est nul pour tout $a\in I$, autrement dit lorsque $\mathfrak{n}_a=\mathfrak{m}_a$, ou (plus simplement) quand $\mathfrak{m}_a\subset\mathfrak{n}_a$. Montrons que c'est le cas pour $A=\mathbb{R}^I$ et $A=C^0(I,\mathbb{R})$.

   Une application $f: I\longrightarrow\mathbb{R}$ s'annulant en a s'écrit
$$f=\left(\underbrace{\chi_{f^{-1}(\mathbb{R}^+)}\sqrt{f}}_{\in\mathfrak{m}_a}\right)^2+\left(\underbrace{\chi_{f^{-1}(\mathbb{R}^-)}\sqrt{-f}}_{\in\mathfrak{m}_a}\right)^2\in\mathfrak{m}_a^2+\mathfrak{m}_a^2\subset\mathfrak{n}_a,\ \mathit{CQFD}.$$

   Si f est de plus continue, il suffit de voir pourquoi les applications $\chi_{f^{-1}(\mathbb{R}^+)}\sqrt{f}$ et $\chi_{f^{-1}(\mathbb{R}^-)}\sqrt{-f}$ sont aussi continues sur I.

   Soit $a\in I$ et montrons que $\chi_{f^{-1}(\mathbb{R}^+)}\sqrt{f}$ est continue en a.

   Si $f(a)<0$, par continuité f reste <0 autour de a, donc $\chi_{f^{-1}(\mathbb{R}^+)}\sqrt{f}$ est nulle autour de a, *a fortiori* continue.

   Si $f(a)>0$, on a $\chi_{f^{-1}(\mathbb{R}^+)}\sqrt{f}=\sqrt{f}$ autour de a, et même conclusion.

   Si $f(a)=0$, pour $\varepsilon>0$, il y a un $\delta>0$ tel que $|x-a|<\delta\implies|f(x)-0|<\varepsilon$, et on conclut en invoquant l'inégalité $\left|\chi_{f^{-1}(\mathbb{R}^+)}\sqrt{f}\right|\leq\sqrt{f}$.
2. Pour $A=D^1(I,R)$, montrons que V_a contient une famille libre qui a la puissance du continu. On en déduira
$$\dim\{\text{dérivations linéaires sur } A\}=\dim\left(\prod_{a\in I}V_a^*\right)\geq\dim V_a^*\geq\dim V_a\geq 2^{\aleph_0},\ \mathit{CQFD}.$$

   On exhibe pour cela les $x\mapsto(x-a)^\omega$ pour $1\leq\omega<2$. En effet, si $\sum\lambda_i(x-a)^{\omega_i}\in\mathfrak{m}_a^2$, en remarquant qu'un $f\in\mathfrak{m}_a$ est dérivable et s'annule a donc s'écrit $f(x)=(x-a)g(x)$ avec g continue, on voit que les éléments de $\mathfrak{m}_a^2$ sont de la forme $x\mapsto(x-a)^2h(x)$ où h est continue. Divisant par $(x-a)^\omega$ où $\omega<2$ est le plus grand ω_i tel que $\lambda_i\neq0$ et évaluant en a, il vient $\lambda_i=0$, *absurde*.

   Si l'on impose la condition $d:\mathrm{Id}\mapsto1$, cela se traduit dans $\prod_{a\in I}V_a^*$, en identifiant d à la famille (φ_a) de ses images, par la condition $d_a(\mathrm{Id})=1$ pour tout a. Cela revient à se placer dans chaque V_a^* dans l'hyperplan affine $\mathrm{eval}_{\mathrm{Id}}=1$ (où eval_f est la forme linéaire $\left\{\begin{array}{ccc}V_a^*&\longrightarrow&\mathbb{R}\\\varphi&\longmapsto&\varphi(f)\end{array}\right.$). Puisqu'on a montré que V_a^* est de dim infinie, un hyperplan de V_a^* restera de même dimension, d'où la conclusion.

Démonstration du théorème.
On commence par observer la bijection suivante (écrire un petit peu)
$$\left\{\begin{array}{ccc}\{\text{dérivations linéaires sur } A\}&\longrightarrow&\prod_{a\in I}\{a\text{-dérivations sur } A\}\\ f\mapsto f'&\longmapsto&f\mapsto f'(a)\\ f\mapsto[a\mapsto d_a(f)]&\longleftarrow&(d_a)_{a\in I}\end{array}\right..$$

Il suffit donc de montrer que les a-dérivations sont en bijection avec V_a^* pour tout a dans I.

Fixons a dans I.

Le sous-anneau A contenant l'application constante 1, faire $f = g = 1$ dans la formule du produit donne $1' = 1' + 1'$, d'où $1' = 0$, de sorte qu'une a-dérivation annule les constantes.

Considérons une a-dérivation sur A. D'après la formule du produit, elle s'annule sur tout produit fg pour f et g dans $\mathfrak{m}_a$, donc sur tout $\mathfrak{n}_a$, donc passe au quotient modulo $\mathfrak{n}_a$. En restreignant auparavant notre dérivation de A sur $\mathfrak{m}_a$, on obtient une forme linéaire sur V_a.

Soit réciproquement φ une forme linéaire sur V_a. En écrivant pour $f, g \in A$

$$fg - fg(a) = f(a)(g - g(a)) + g(a)(f - f(a)) + (f - f(a))(g - g(a)),$$

on voit que l'application $f \mapsto \varphi(f - f(a) \mod \mathfrak{n}_a)$ est une forme linéaire satisfaisant la formule du produit, donc est une a-dérivation.

Montrons que la correspondance sus-établie est bijective :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \{a\text{-dérivations sur } A\} & \longrightarrow & V_a^* \\ d & \longmapsto & d_{|\mathfrak{m}_a / \mathfrak{n}_a} \\ f \mapsto \varphi(f - f(a) \mod \mathfrak{n}_a) & \longleftarrow & \varphi \end{array} \right.$$

Soit d une a-dérivation, φ son image par la flèche ci-dessus. Pour $f \in A$, on a

$$\begin{array}{ll} & \varphi(f - f(a) \mod \mathfrak{n}_a) \\ = & d(f - f(a) \mod \mathfrak{n}_a) \text{ pardéfinitiondelaflècheci-dessus} \\ = & d(f - f(a)) \text{ par définitino de } d \text{ passée au quotient} \\ = & d(f) \text{ car } d \text{ annule les constantes.} \end{array}$$

Soit φ forme linéaire sur V_a, d son image par la flèche ci-dessus et ψ l'image de d. Pour g dans $\mathfrak{m}_a$, on a

$$\begin{array}{ll} & \psi(g \mod \mathfrak{n}_a) \\ = & d(g \mod \mathfrak{n}_a) \text{ par définition de } \psi \\ = & d(g) \text{ car } d \text{ s'annule sur } \mathfrak{n}_a \\ = & \varphi(g - g(a) \mod \mathfrak{n}_a) \text{ par définition de } d \\ = & \varphi(g \mod \mathfrak{n}_a) \text{ car } g \text{ s'annule en } a. \end{array}$$