Axiomatique des produits à valeurs réels

Marc SAGE

15 septembre 2010

Appelons *produit* sur un ev toute application bilinéaire.

Par exemple, on montre que les produits à valeurs scalaires[1] sur $\mathbb{R}$ forment une droite engendré par le produit usuel. En effet, fixant un réel a, le réel (a,b) est une forme linéaire en b, donc une homothétie $\lambda_a b$, puis prenant à présent $b=1$ le réel $(a,1)=\lambda_a$ est une forme linéaire en a, donc une homothéie λa.

On voit alors des comportement inhabituels selon la valeurs de λ : l'égalité $a^2 \geq 0$ n'est pas toujours vérifiée (prendre λ négatif), et l'implication $a^2=0 \implies a=0$ non plus (prendre $\lambda=0$). Seul le cas $\lambda>0$ récomforte notre intuition (ô combien naïve).

Plaçons nous à présent dans le plan réel, muni du produit scalaire naturel $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = aa'+bb'$. On est habitué à avoir la positivité des carrés scalaires x^2, à en déduire une norme $\|x\|=\sqrt{x^2}$, à avoir deux inégalités géométriquement évidentes dans le plan $|xy| \leq \|x\|\,\|y\|$ et $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$ avec égalité seulement si $x \parallel y$. Mais rien qu'en changeant le $+$ du produit $aa'+bb'$ en $-$, on voit déjà plein de choses se compliquer. De même, dans $\mathbb{R}^n$, que dire d'un produit du type $ab := \sum \pm a_i b_i$? Et que dire en toute généralité d'un produt de la forme $ab := \varphi(a)\,\varphi(b)$ où φ est une forme linéaire ? Que reste-il de ces propriétés ?

Dans le cas général, on dispose de plein d'énoncés : le caractère « défini » ou non-dégénéré du produit, la constance du signe de x^2, le fait que $\|\cdot\| : x \mapsto \sqrt{|x^2|}$ soit une norme, les inégalités de Cauchy-Schwarz et Minkowsky avec leurs cas d'égalité. Les voici (on quantifie universellement sur des vecteurs a et b)

$$\begin{array}{cc}
DEF & a^2=0 \iff a=0 \\
ND & (a\cdot)\equiv 0 \implies a=0 \\
SIG & a^2b^2 \geq 0 \\
CS & (ab)^2 \leq a^2b^2 \\
|CS| & (ab)^2 \leq \left|a^2b^2\right|,\ i.\ e.\ |ab| \leq \|a\|\,\|b\| \\
MIN & \|a+b\| \leq \|a\|+\|b\| \\
=_{CS} & (ab)^2 = a^2b^2 \implies a \parallel b \\
=_{|CS|} & (ab)^2 = \left|a^2b^2\right| \implies a \parallel b \\
=_{MIN} & \|a+b\| \leq \|a\|+\|b\| \implies a \parallel b \\
NOR & \|\cdot\| \text{ est une norme, } i.\ e.\ DEF \text{ et } MIN \\
CS^{=} & CS \text{ et } =_{CS} \\
|CS|^{=} & |CS| \text{ et } =_{|CS|} \\
MIN^{=} & MIN \text{ et } =_{MIN}
\end{array}.$$

Nous allons voir que ces énoncés se regroupent en trois blocs (au sein de chacun desquels les énoncés sont équivalents), l'un équivalant la conjonction des deux autres (sans réciproque), comme suit :

dimension ≥ 3

	$\|CS\|^{=}$	$CS^{=}$	MIN	DEF
	$=_{\|CS\|}$	$=_{CS}$	$=_{MIN}$	NOR
	$\Downarrow$			$\Downarrow$
$\|CS\|$	CS	MIN		ND
	SIG			

(la seule différence entre les deux tableaux est la place de $=_{CS}$)

dimension 2

	$\|CS\|^{=}$	$CS^{=}$	MIN	DEF	
	$=_{\|CS\|}$	$(\Delta>0)$	$=_{MIN}$	NOR	
	$\Downarrow$			$\Downarrow$	
$\|CS\|$	CS	MIN		ND	$=_{CS}$
	SIG	$(\Delta\neq 0)$		$(\Delta\geq 0)$	

Δ désigne le déterminant de la matrice du produit, défini à un carré près (dû aux changements de base)

[1] On a vraiment envie de dire « produit *scalaire* » tout court, comme l'on parlerait d'une suite *complexe* pour préciser le domaine où tombent les valeurs, mais il semblerait que cette terminologie soit déjà monopolisée. De même, on parle bien de norme *euclidienne* dans un espace muni d'un produit scalaire qui n'est pas forcément euclidien...

On traitera exclusivement le cas commutatif de la dimension ≥ 2. En dimension 1, un produit non nul vérifie tous les énoncés ci-dessus, tandis que le produit nul infirme uniquement DEF et (donc) NOR. (En dimension nulle, tout est vérifié.) Dans le cas où le produit n'est pas commutatif, on peut s'y ramener en introduisant le symétrisé $a\natural b := \frac{ab+ba}{2}$. Tous les énoncés ci-dessus (appliqué au produit symétrisé) sont alors inchangés, à l'exception des quatre assertions sur CS où il faut remplacer ab par $a\natural b$.

Un point important est de traiter la dimension 2. D'une part pour se donner une intuition, d'autre part parce que chaque énoncé ci-dessus (à l'exception de ND) est *vérifié ssi il est vérifié sur tout plan*, ce qui fournira un bon tremplin pour l'étude générale.

En dimension 2, en se plaçant dans une base orthogonale, tout produit est de la forme $\binom{a}{b}\binom{x}{y} = \lambda ax + \mu by$ pour des réels λ et μ. On distingue les cas selon la position du déterminant $\Delta := \lambda\mu$ par rapport à 0.

Il est aisé de voir l'équivalence $\boxed{SIG \iff \Delta \geq 0}$. De même, en remarquant que les normes des vecteurs orthogonaux choisis sont λ et μ, on voit que $DEF \implies \Delta \neq 0$; par ailleurs, si $\Delta < 0$, alors le polynôme $\left\|\binom{t}{1-t}\right\|^2 = \lambda t^2 + \mu(1-t)^2$ s'annule par le TVI, ce qui infirme DEF. On en déduit l'équivalence $\boxed{DEF \implies \Delta > 0}$. Enfin, une condition $\forall x, y,\ \lambda ax + \mu by = 0$ signifiant que le vecteur $\binom{\lambda a}{\mu b}$ de $\mathbb{R}^2$ est orthogonal à tout le monde (donc nul), on a l'équivalence $\boxed{ND \iff \Delta \neq 0}$.

Regardons l'inégalité CS : étant donnés deux vecteurs $u := \binom{a}{b}$ et $v := \binom{x}{y}$, on a les équivalences

$$\begin{aligned}
& (uv)^2 \overset{?}{\leq} u^2 v^2 \\
\iff\quad & (\lambda ax + \mu by)^2 \overset{?}{\leq} \left(\lambda a^2 + \mu b^2\right)\left(\lambda x^2 + \mu y^2\right) \\
\iff\quad & \underline{\lambda^2 a^2 x^2 + \mu^2 b^2 y^2} + 2\lambda\mu abxy \overset{?}{\leq} \underline{\lambda^2 a^2 x^2 + \mu^2 b^2 y^2} + \lambda\mu\left(a^2 x^2 + b^2 y^2\right) \\
\iff\quad & \lambda\mu \begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix}^2 \overset{?}{\geq} 0 \iff \lambda\mu \overset{?}{\geq} 0 \text{ ou } u \overset{?}{\parallel} v.
\end{aligned}$$

On en déduit les équivalences $\boxed{CS \iff \Delta \geq 0}$, $\boxed{CS^= \iff \Delta > 0}$ et $\boxed{=_{CS} \iff \Delta \neq 0}$.

Le cas $|CS|$ est un peu plus fin. L'inégalité $(uv)^2 \overset{?}{\leq} \left|u^2 v^2\right|$ équivaut à la disjonction $u^2 v^2 \overset{?}{\leq} (uv)^2$ (cas sus-traité) ou $u^2 v^2 \overset{?}{\geq} -(uv)^2$, laquelle inégalité s'écrit

$$\begin{aligned}
& \lambda^2 a^2 x^2 + \mu^2 b^2 y^2 + \lambda\mu\left(a^2 x^2 + b^2 y^2\right) \overset{?}{\geq} -\lambda^2 a^2 x^2 - \mu^2 b^2 y^2 - 2\lambda\mu abxy, \\
& \textit{i. e. } 2(\lambda ax + \mu by)^2 + \lambda\mu(ay - bx)^2 \overset{?}{\geq} 0.
\end{aligned}$$

Lorsque $\Delta \geq 0$, on a toujours égalité ; sinon, en prenant $(b, x, y) = (1, 1, 0)$, l'inégalité ci-dessus se réécrit $2\lambda^2 a^2 \overset{?}{\geq} -\lambda\mu$, ce qui devient faux pour a assez petit. Il en résulte l'équivalence $\boxed{|CS| \iff \Delta \geq 0}$. Le cas d'égalité est valide lorsque $\lambda\mu > 0$ et faux sinon (reprendre le même contre-exemple en choisissant a pour avoir égalité ; les vecteurs $(a, 1)$ et $(1, 0)$ ne sont jamais colinéaires). On en déduit $\boxed{=_{|CS|} \iff \Delta > 0}$ et par là même $\boxed{|CS|^= \iff \Delta > 0}$.

Passons à Minkowsky. En passant au carré, on regarde l'inégalité

$$\left|(u+v)^2\right| = \left|u^2 + v^2 + 2uv\right| \overset{?}{\leq} \left|u^2\right| + \left|v^2\right| + 2\|u\|\|v\|.$$

Dès qu'on peut retirer les valeurs absolues (ou bien les retirer en mettant un signe moins devant chaque), l'inégalité devient $\pm uv \leq \|u\|\|v\|$, ce que nous avons appelé $|CS|$. Or, les conditions proposées sont impliquées par SIG, *i. e.* par $\Delta \geq 0$. Dans ce cas, MIN équivaut à $|CS|$, donc à $\Delta \geq 0$, et $=_{MIN}$ équivaut à $=_{|CS|}$, donc à $\Delta > 0$. Dans le cas contraire $\Delta < 0$, quitte à normaliser notre base orthogonale (on peut vu que $\Delta \neq 0$) et permuter ses vecteurs, on peut supposer $\binom{\lambda}{\mu} = \binom{1}{-1}$, de sorte que l'inégalité se réécrit

$$\sqrt{\left|(a+x)^2 - (b+y)^2\right|} \overset{?}{\leq} \sqrt{|a^2 - b^2|} + \sqrt{|x^2 - y^2|}.$$

En prenant encore $(b, x, y) = (1, 1, 0)$ avec $0 < a < 1$, cela devient $a^2 + 2a \overset{?}{\leq} \sqrt{1 - a^2} + 1$, inégalité qui dépend des valeurs de a et dont le cas d'égalité peut être vérifié[2]. Cela infirme MIN, $=_{MIN}$ et (par conséquent) $MIN^=$. On déduit de tout cela les équivalences $\boxed{MIN^= \iff =_{MIN} \iff \Delta > 0}$ et $\boxed{MIN \iff \Delta \geq 0}$.

[2] $a^2 + 2a$ croît de 0 à 3 tandis que $\sqrt{1 - a^2} + 1$ décroît de 2 à 1

Il reste à récupérer NOR comme conjonction de MIN et DEF, d'où l'équivalence $\boxed{NOR \iff \Delta > 0}$.

Finalement, on obtient le tableau annoncé. On a trois blocs, celui du haut équivalant à la conjonction des deux du bas : invoquer simplement l'équivalence $\Delta > 0 \iff (\Delta \neq 0 \text{ et } \Delta \geq 0)$. Suivant les mêmes invocations, il n'y a pas d'autres implications entre deux de ces trois blocs.

Passon à présent à la dimension quelconque. Comme il l'a été dit, chaque énoncé, à l'exception de ND, est vrai ssi il est vérifié dans tout plan. On en déduit que toutes les implications ci-dessus restent valides, à l'exceptions de celles mettant en jeu ND. Toutefois, l'implication $\boxed{DEF \implies ND}$ est conservée (c'est immédiat), et l'on va pouvoir, grâce à une troisième dimension disponible, raccrocher $=_{CS}$ au bloc du haut : montrons $\boxed{=_{CS} \implies DEF}$. Soit a non nul de carré nul. On le complète en une famille libre (a, b, c). Remarquer que $ab \neq 0$, sinon on a l'égalité $(ab)^2 = a^2b^2$ dans CS, d'où $a \parallel b$, contredisant la liberté imposée. (De même, $ac \neq 0$.) Alors le vecter $a + (ac)\, b - (ab)\, c$ est orthogonal à a, donc lui est parallèle par le même raisonnemnet, ce qui est absurde.

Nous retrouvons ainsi le tableau annoncé. Comme pour la dimension 2, les deux blocs du bas impliquent celui du haut, vu que la conjonction de CS et ND implique DEF. Mais aucune autre implication n'est valide

Quelques sanity checks.

$\boxed{DEF \implies =_{CS}}$ C'est le caractère défini qui permet d'obtenir de cas d'égalité dans CS.

$\boxed{CS \iff SIG}$ Cauchy-Schwarz donne la positivité de $a^2b^2 \geq (ab)^2 \geq 0$ et réciproquement c'est la positivité du trinôme $(a + \lambda b)^2$ en λ qui permet de récolter CS comme la négativité d'un discrimant.

$\boxed{DEF \implies SIG}$ Soient a et b tels que $a^2b^2 < 0$. Alors le trinome $(ta + (1-t)\, b)^2$ est continu en t, donc par le TVI s'annule sur $]0, 1[$, d'où $a \parallel b$, mais alors a^2 et b^2 ont même signe, ce qui est absurde. (On en déduit $\boxed{DEF \implies CS^=}$, vue que $CS^=$ repose sur SIG et DEF.)

$\boxed{CS^= \implies MIN^=}$ et $\boxed{CS \implies MIN}$ L'inégalité MIN équivaut à $\left|a^2 + b^2 + 2ab\right| \overset{?}{\leq} \left|a^2\right| + \left|b^2\right| + 2\sqrt{|a^2b^2|}$, ce qui s'obtient en appliquant une inégalité triangulaire classique et CS. Si l'on a égalité, on doit avoir égalité dans le CS utilisé, d'où $a \parallel b$, ce qui est bien un cas d'égalité

$\boxed{MIN^= \implies DEF}$ Soit $a \neq 0$ de carré nul. Pour b non lié à a et λ un scalaire, MIN appliqué à b et λa s'écrit $\left|0 + b^2 + 2\lambda ab\right| \leq \left|b^2\right| + 0 + 2\sqrt{0}$; choisissant le signe de λ convenablement, on voit que le produit ab est nul. Mais alors on a égalité pour tout λ, d'où $b \parallel \lambda a$, contradiction.

$\boxed{MIN \iff CS}$ Écrivons MIN :

$$-\left|a^2\right| - \left|b^2\right| - 2\sqrt{|a^2b^2|} \leq a^2 + b^2 + 2ab \leq \left|a^2\right| + \left|b^2\right| + 2\sqrt{|a^2b^2|}.$$

Supposons $a^2 \geq 0$. L'inégalité de droite donne alors $ab \leq \frac{\left|b^2\right| - b^2}{2} + \sqrt{|a^2b^2|}$. Pour tuer ce qui nous embête, on remplace b par λb, on divise par λ (pris > 0) puis on fait tendre λ vers 0. Lorsque $a^2 \leq 0$, on procède de même à gauche.