

Une descente arithmétique (IMO25 Pb1) – rédaction compacte

Marc SAGE

12 août 2025

Énoncé. Pour chaque entier $N \geq 1$, notons N' la somme des trois plus grands diviseurs stricts de N . Déterminer les entiers sur lesquels l'application $\alpha \mapsto \alpha'$ peut s'itérer indéfiniment.

Solution compacte. Soit $n \in \mathbf{N}$ tels que n' fait sens et notons $1 < a < b < c$ ses quatre plus petits diviseurs. On alors l'égalité $n' = \frac{n}{a} + \frac{n}{b} + \frac{n}{c} = \lambda n$ où $\lambda := \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Notons enfin t le triplet (a, b, c) .

Lemme. Si n est impair, alors n' aussi et l'on a $n' < n$.

Preuve. L'imparité de n implique celle des diviseurs a, b, c , d'où d'une part l'imparité de leur somme n' , d'autre part leur minoration par 3 et la majoration $\lambda < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$.

Théorème. On est dans un et un seul des quatre cas suivants :

1. Si n est multiple de 12, alors $n' = 13 \frac{n}{12}$.
2. Si n est divisible par 6 et 5 mais pas par 12, alors $n' = 31 \frac{n}{6 \cdot 5}$.
3. Si n est divisible par 6 mais pas par 5 ni par 12, alors $n = n'$ est fixe.
4. Si n n'est pas multiple de 6, alors n' non plus et l'on a encore $n' < n$.

Corollaire (conclusion). On pourra itérer indéfiniment l'application $\alpha \mapsto \alpha'$ sur un entier ssi ce dernier est une puissance de 12 multipliée par le sextuple d'un impair non multiple de 5.

Démonstration du corollaire. Le théorème nous livre l'évolution des itérés de n : après élimination des puissances de 12 divisant n (cas 1), on tombe ou bien sur un point fixe (cas 3) ou bien sur une image n' non multiple de 6 (cas 4 peut-être précédé d'un unique cas 2) avec descente infinie $n > n' > n'' > n''' > \dots$.

Démonstration du théorème

1. Supposons $12 \mid n$. On a alors l'égalité $t = (2, 3, 4)$, d'où celles $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6+4+3}{12} = \frac{13}{12}$.
2. Supposons $\begin{cases} 2, 3, 5 \mid n \\ 4 \nmid n \end{cases}$. On a alors l'égalité $t = (2, 3, 5)$, d'où celles $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{15+10+6}{30} = \frac{31}{30}$.
3. Supposons $\begin{cases} 2, 3 \mid n \\ 4, 5 \nmid n \end{cases}$. On a alors l'égalité $t = (2, 3, 6)$, d'où celles $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{6+4+2}{12} = \frac{12}{12} = 1$.
4. Supposons enfin $\begin{cases} \text{ou} \\ 2 \nmid n \\ 3 \nmid n \end{cases}$. Le lemme nous permet déjà d'imposer la parité de n , çàd $\underline{\underline{a = 2}}$ et $\underline{\underline{3 \nmid n}}$.

On peut alors minorer $c > b \stackrel{b \neq 3}{\geq} 4$ et majorer $\lambda < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$. Il reste à établir $2 \nmid n'$ ou $3 \nmid n'$.

(a) Si $4 \mid n$, çàd si $b = 4$, on a alors les égalités $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{c} = \frac{3c+4}{4c}$ dont le numérateur $1 + 3(c+1)$ n'est pas multiple de $3 \checkmark$. (exemple : $n = 2^4 \mapsto 2^{17}$)

(b) Supposons $4 \nmid n$, çàd $\frac{n}{2}$ impair : alors b est un facteur (premier) de l'impair $\frac{n}{2}$ et la divisibilité $2b \mid n$ livre (avec la minoration $2b > b$) la majoration $c \leq 2b$.

i. Si $c = 2b$, on a alors $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{2b} = \frac{3+b}{2b}$: notre n n'étant pas multiple de 3, le diviseur b non plus, donc le numérateur $3 + b$ non plus \checkmark . (exemple : $n = 2^{15} \mapsto 2^3$)

ii. Si $c < 2b$, alors c est un facteur (premier) de l'impair $i := \frac{n}{2b}$: l'imparité de bi livre alors celle de $bi + 2(i + b \frac{i}{c}) = n' \checkmark$. (exemple : $n = 2^{11} 1^4 17 \mapsto 3^4$)