

Une descente arithmétique (IMO25 Pb1) résolution “organique”

Marc SAGE

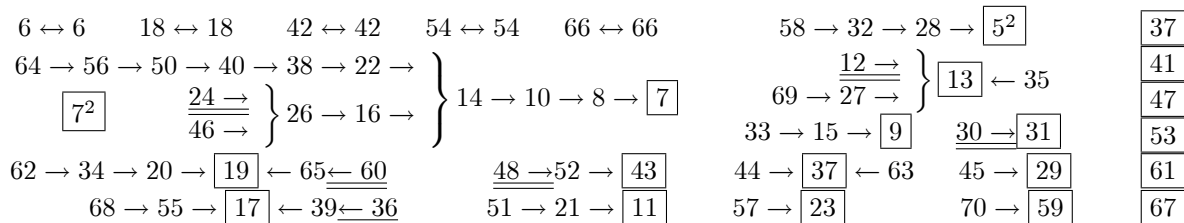
8 août 2025

Énoncé. Pour chaque entier $a \geq 1$, notons a' la somme des trois plus grands diviseurs stricts de a (la somme a' fait sens ssi a n'est ni un premier ni le carré d'un premier).

Déterminer les entiers sur lesquels l'application $a \mapsto a'$ peut s'itérer indéfiniment.

Toute référence ultérieure à une application/action/itération/fixité concernera l'application $a \mapsto a'$.

Expérience. Jouons! et partons à l'exploration des itérations des entiers, par exemple jusqu'à 70 :



À l'exception de quelques points fixes (6,18,42,54,66) les itérations s'arrêtent sur (le carré d'un premier), après une décroissance stricte parfois précédée de quelques discrets sursauts croissants (depuis 12,24,30,48,60). On notera que les multiples de 6 sont au rendez-vous dans nos parenthèses... Regardons-y de plus près.

Formalisation. Soit $n \in \mathbf{N}$ tels que n' fait sens et notons $1 < d < \delta < D$ ses quatre plus petits diviseurs.

$$\text{On alors l'égalité } n' = \frac{n}{d} + \frac{n}{\delta} + \frac{n}{D} = \lambda n \quad \text{où} \quad \lambda := \frac{1}{d} + \frac{1}{\delta} + \frac{1}{D}.$$

L'intuition première est de “flairer” la minoration $\lambda < 1$, laquelle sera “fréquente”, ce qui fera de la suite des itérés $(n, n', n'', n''', \dots)$ “probablement” une descente infinie – et limitera d'autant les valeurs initiales possibles.

Discussion et premier résultat. Précisons cette intuition en cherchant à maximiser λ , çàd à “minimiser” les diviseurs d, δ, D . Observer avant tout les minorations $d > 1$, çàd $d \geq 2$, puis $\delta > d \geq 2$, d'où $\delta \geq 3$, et de même $D \geq 4$. Par ailleurs, si les diviseurs d et δ sont étrangers, alors leur produit divise n et majore strictement chacun d'eux, donc est un candidat potentiel pour D . Bref, on a les comparaisons

$$D \leq d\delta \quad \text{si } d \text{ et } \delta \text{ sont étrangers,} \quad d \geq 2, \quad \delta \geq 3 \quad \text{et} \quad D \geq 4.$$

La discussion de cas s'en trouve simplifiée et livre les comparaisons suivantes portant sur λ et 1 (on encadrera les cas $\lambda \geq 1$ allant à l'encontre de notre intuition) :

$$\left[\begin{array}{l} \text{si } d = 2 : \left[\begin{array}{l} \text{si } \delta = 3 : \left[\begin{array}{l} \text{si } D = 4, \text{ alors } \lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6+4+3}{12} = \frac{13}{12} \boxed{> 1}; \\ \text{si } D = 5, \text{ alors } \lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{15+10+6}{30} = \frac{31}{30} \boxed{> 1}; \\ \text{si } D = 6, \text{ alors } \lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{6+4+2}{12} = \frac{12}{12} \boxed{=} 1; \end{array} \right. \\ \text{si } \delta \geq 4 : \text{ utiliser alors } D > \delta \geq 4 \text{ donne } \lambda < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1; \end{array} \right. \\ \text{si } d \geq 3, \text{ utiliser alors } \left\{ \begin{array}{l} \delta \geq 3 \\ D > 3 \end{array} \right. \text{ donne } \lambda < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1. \end{array} \right.$$

(vu l'extranéité de δ et d , on peut majorer $D \leq \delta d = 6$)

Une remarque déjà : la dernière ligne ci-dessus (cas $d > 2$) correspond à l'imparité de n , de laquelle découle l'imparité de chacun de ses diviseurs, d'où celle de chaque somme d'un nombre *impair* de tels diviseurs – en particulier de n' . L'imparité sera donc préservée par itération et (vu alors la majoration $\lambda < 1$) nous enfermera dans une descente infinie, confortant notre intuition première :

$$n \text{ impair} \implies n > n' > n'' > \dots > \begin{matrix} \text{(le carré d')} \\ \text{un premier} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \text{Nous dirons plus généralement d'un} \\ \text{entier ayant un itéré impair qu'il } \mathbf{chute}^1. \end{matrix}$$

Reprise de la discussion – conjecture. Reprenons les observations ci-dessus et synthétisons-les d'une autre façon, en vue de les exprimer *du point de vue de notre n de départ* :

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} d = 2 \\ \delta = 3 \end{array} \right. \longrightarrow \left[\begin{array}{l} D = 4 \longrightarrow \boxed{\lambda = \frac{13}{12}} \\ D = 5 \longrightarrow \boxed{\lambda = \frac{31}{30}} \\ D = 6 \longrightarrow \boxed{\lambda = 1} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} d = 2 \\ \delta \geq 4 \end{array} \right. \text{ ou } d \geq 3 \longrightarrow \lambda < 1 \end{array} \right. , \quad \text{\textcircled{à}} \quad \begin{array}{l} \text{synthèse du point de vue de } n \\ 12 \mid n \longrightarrow \boxed{\lambda = \frac{13}{2 \cdot 6}} \\ \left\{ \begin{array}{l} 12 \nmid n \\ 6 \mid n \end{array} \right. \longrightarrow \left[\begin{array}{l} 5 \mid n \longrightarrow \boxed{\lambda = \frac{31}{5 \cdot 6}} \\ 5 \nmid n \longrightarrow \boxed{\lambda = 1} \end{array} \right. \\ 6 \nmid n \longrightarrow \lambda < 1 \end{array} .$$

Nous sommes à présent en mesure de décrire l'itération sur n . (*Spoiler* : la décroissance de la valuation 6-adique² va précéder celle des itérés, ce qui vient raffiner notre intuition première.)

Notons N l'exposant de la plus grande puissance de 12 divisant n , appelons a, b, c les exposants resp. des facteurs premiers 2, 3, 5 dans la décomposition de $\frac{n}{12^N}$ et notons enfin $i := \frac{n}{12^N 2^a 3^b 5^c}$. Observer alors

$$\text{l'égalité } n = 12^N 2^a 3^b 5^c i, \quad \text{la disjonction } \left\{ \begin{array}{l} a \leq 1 \\ b = 0 \end{array} \right. \text{ (sinon } 12 \mid \frac{n}{12^N}), \quad \begin{array}{l} \text{l'imparité de } i, \text{ lequel} \\ \text{ne divise ni 3 ni 5.} \end{array}$$

Décrivons enfin l'itération sur n à l'aide des quatre lignes de notre synthèse.

1. Tant que $12 \mid n$, agir sur n transforme un 12 en 13 (première ligne). Par conséquent, quitte à remplacer n par son N -ième itéré, on peut
2. supposer $\underline{N = 0}$. Ensuite,
 - (a) si $6 \mid n$, çàd si $\left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b \geq 1 \end{array} \right.$, on a alors :
 - i. ou bien $c = 0$ (troisième ligne) et la fixité $n' = n$;
 - ii. ou bien $c \geq 1$ (deuxième ligne) et l'égalité $n' = \frac{31}{15} \frac{n}{2}$, d'où l'imparité de n' et la chute de n ;
 - (b) si $6 \nmid n$ (quatrième & dernière ligne), çàd si $ab = 0$, on a alors $n' < n$. Montrons par ailleurs que *l'on va rester enfermé dans ce cas*, ce qui conduira à la chute des non-multiples de 6, généralisant ainsi celle des impairs.

Par conséquent, sous réserve d'avoir établi l'implication $\boxed{6 \nmid n \xrightarrow{?} 6 \nmid n'}$, nous pouvons décrire :

Synthèse de l'itération :

après élimination des puissances de 12

(ce qui fait croître par autant de facteurs $\frac{13}{12}$),

ou bien on tombe sur un point fixe, çàd quand $\binom{a}{c} = \binom{1}{0}$ et $b \geq 1$,

ou bien s'amorce une décroissance stricte $n > n' > n'' > n''' > \dots$
(après un éventuel unique gonflement de facteur $\frac{31}{30}$).

Conclusion :

on peut itérer indéfiniment l'application $a \mapsto a'$ sur l'entier n ssi ce dernier est une puissance de 12 multipliée par le sextuple d'un impair non multiple de 5.

¹on ne pourra donc pas itérer sur un tel entier sans s'écraser – ladite chute – sur (le carré d')un premier

²nous avons vu les multiples de 6 en vadrouille, ce pour quoi nous faisons apparaître les facteurs 6 dans la fraction λ

Preuve de l'implication $\boxed{6 \nmid n \stackrel{?}{\implies} 6 \nmid n'}$. Supposons $6 \nmid n$ et montrons que 2 ou 3 ne divise pas n' .

Le cas $2 \nmid n'$ étant vérifié dès que n est impair, nous imposerons n pair, çàd $\underline{d=2}$ et $\underline{3 \nmid n}$.

1. Si $4 \mid n$, çàd si $\delta = 4$, on a alors $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{D} = \frac{1+3(D+1)}{4D}$ dont le numérateur n'est pas multiple de 3. ✓
2. Supposons $4 \nmid n$, çàd $\frac{n}{2}$ impair : alors δ est un facteur (premier) de l'impair $\frac{n}{2}$. En abrégeant $\Delta := 2\delta$, les minoration et divisibilité $\delta < \Delta \mid n$ permettent de majorer $D \leq \Delta$.
 - (a) Si $D < \Delta$, alors D est un facteur (premier) de l'impair $j := \frac{n}{\Delta}$, donc est impair comme j (et δ), d'où l'imparité de $\delta j + 2(j + \delta \frac{j}{D}) = n'$. ✓
 - (b) Si $D = \Delta$, on a alors $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\Delta} = \frac{3+\delta}{\Delta}$: notre n n'étant pas multiple de 3, le diviseur δ non plus, donc le numérateur $3 + \delta$ non plus. ✓

Ouverture. Vu l'implication $2 \nmid n \implies 2 \nmid n'$, nous pourrions (en vue d'établir celle ci-dessus $6 \nmid n \stackrel{?}{\implies} 6 \nmid n'$) être séduits par celle $3 \nmid n \stackrel{?}{\implies} 3 \nmid n'$, laquelle est hélas réfutée par le contre-exemple $374' = 3^4$.

Trouver ce dernier et – plus généralement – suivre précisément les valuations di- et tri-adiques ont motivé la rédaction des compléments. On y explorera davantage d'exemples, aidé d'une classification plus serrée permettant le suivi recherché, lequel viendra préciser des questions de surjectivité (*spoiler* : 12 est le plus petit entier non atteint).