Une descente arithmétique
(IMO25 Pb1)
compléments

Marc SAGE

20 août 2025

1 préliminaires, objectif, notations

Énoncé. Pour chaque entier $a \geq 1$, notons a' la somme des trois plus grands diviseurs stricts de a (la somme a' fait sens ssi a n'est ni 1 ni un premier ni le carré d'un premier).

Déterminer les entiers sur lesquels l'application $a \mapsto a'$ peut s'itérer indéfiniment.

Toute référence ultérieure à une application/action/itération/fixité concernera l'application $a \mapsto a'$.

Nous renvoyons aux deux premiers documents pour une résolution compacte ou plus organique dont voici les principaux résultats.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ dont l'image fait sens et dont on note $1 < \boxed{d < \delta < D}$ les quatre plus petits diviseurs[1].

$$\begin{array}{l} \text{En abrégeant } \boxed{\lambda := \frac{1}{d} + \frac{1}{\delta} + \frac{1}{D}}, \text{ on a alors l'égalité } \boxed{n' = \lambda n} \\ \text{et les implications } \left\{ \begin{array}{ccc} 2 \nmid n & \Longrightarrow & 2 \nmid n' < n \\ 6 \nmid n & \Longrightarrow & 6 \nmid n' < n \\ \begin{cases} 6 \mid n \\ 5, 12 \nmid n \end{cases} & \Longrightarrow & n' = n \\ \begin{cases} 6, 5 \mid n \\ 12 \nmid n \end{cases} & \Longrightarrow & n' = 31 \frac{n}{6 \cdot 5} > n \\ 12 \mid n & \Longrightarrow & n' = 13 \frac{n}{12} > n \end{array} \right. , \\ \text{d'où l'équivalence } \lambda = 1 \iff \begin{pmatrix} d \\ \delta \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Objectif. Au-delà du résultat demandé, lequel met fortement en jeu[2] les multiples de 6, nous allons décrire complètement l'évolution des valuations dyadique et tryadique lors d'une itération sur n. Description qui suscitera quelques questions (non résolues) d'images et d'antécédents.

Commençons par un panorama expérimental (itération sur les entiers ≤ 70) permettant d'éprouver les résultats ci-dessus :

$$\begin{array}{lll} 6 \leftrightarrow 6 \quad 18 \leftrightarrow 18 \quad 42 \leftrightarrow 42 \quad 54 \leftrightarrow 54 \quad 66 \leftrightarrow 66 & 58 \to 32 \to 28 \to \boxed{5^2} & \boxed{37} \\ \left. \begin{array}{l} 64 \to 56 \to 50 \to 40 \to 38 \to 22 \to \\ \boxed{7^2} \qquad \left. \begin{array}{l} \underline{\underline{24 \to}} \\ 46 \to \end{array} \right\} 26 \to 16 \to \end{array} \right\} 14 \to 10 \to 8 \to \boxed{7} & \begin{array}{l} \left. \begin{array}{r} \underline{\underline{12 \to}} \\ 69 \to 27 \to \end{array} \right\} \boxed{13} \leftarrow 35 \\ 33 \to 15 \to \boxed{9} \qquad \underline{\underline{30 \to}} \boxed{31} \end{array} & \begin{array}{c} \boxed{41} \\ \boxed{47} \\ \boxed{53} \end{array} \\ 62 \to 34 \to 20 \to \boxed{19} \leftarrow 65 \underline{\underline{\leftarrow 60}} \qquad 44 \to \boxed{37} \leftarrow 63 & \underline{\underline{48 \to}} 52 \to \boxed{43} \qquad 45 \to \boxed{29} & \boxed{61} \\ 68 \to 55 \to \boxed{17} \leftarrow 39 \underline{\underline{\leftarrow 36}} \qquad 51 \to 21 \to \boxed{11} & 57 \to \boxed{23} \qquad 70 \to \boxed{59} & \boxed{67} \end{array} .$$

[1] on renvoie à la section 2 pour une description plus fine de ces diviseurs

[2] les entiers cherchés sont les puissances de 12 multiples du sextuple d'un impair non multiple de 5

Appelons $\boxed{p < q < r}$ les trois plus petits facteurs premiers de n. L'image n' faisant sens, notre n a au moins un facteur premier, donc p fait sens. *Attention* : ce ne sera pas toujours le cas pour q et r !

Noter au passage l'égalité $\boxed{d = p}$.

Notons enfin $\boxed{\binom{v}{w} := \binom{\mathrm{val}_2(n)}{\mathrm{val}_3(n)}}$ et $\boxed{u := \mathrm{val}_p(n)}$ les valuations dy-, tri- et p-adiques de n.

2 description exhaustive des trois plus petits diviseurs d, δ et D

Quatre cas (notés $\Lambda 3$, $\Lambda 2$, $\Lambda 1$ et $\Lambda *$) vont naturellement émerger et structurer les discussions futures.

2.1 discussion suivant p, q, r et u

Abrégeons $\Vdash$ pour « dont les premiers diviseurs $\neq 1$ sont ». Typiquement : $n \Vdash d < \delta < \Delta$.

★ Si q (partant r) ne fait pas sens, alors n est une puissance de p, d'exposant ≥ 3 (toujours car n' fait sens), donc la suite croissante de ses diviseurs commence par $1 < p < p^2 < p^3$, d'où les égalités $\boxed{\delta = p^2}$ et $\boxed{\boxed{D = p^3}}$.
EG : $n = 2^3 \Vdash 2 < 4 < 8$.

★★ Supposons à présent q faisant sens.

1. Supposons $\underline{\underline{u \geq 2}}$.
   (a) Supposons $\underline{q > p^2}$. On a alors l'égalité $\boxed{\delta = p^2}$.
      i. Supposons $u \geq 3$.
         A. Si $q > p^3$, on a alors l'égalité $\boxed{\boxed{D = p^3}}$. EG : $n = 2^3 11 \Vdash 2 < 4 < 8$.
         B. On a sinon (çàd quand $q < p^3$) l'égalité $\boxed{\boxed{D = q}}$. EG : $n = 3^3 11 \Vdash 3 < 9 < 11$.
      ii. Même conclusion quand $u = 2$.
   (b) Supposons $\underline{q < p^2}$. On a alors l'égalité $\boxed{\delta = q}$.
      i. Si r ne fait pas sens ou ne minore pas p^2, on a alors l'égalité $\boxed{\boxed{D = p^2}}$. EG : $n = 3^2 5\,(11) \Vdash 3 < 5 < 9$. Rq : la paire $\begin{Bmatrix}\delta \\ D\end{Bmatrix}$ est la même que celle du précédent cas.
      ii. Sinon, çàd quand on a $r < p^2$, on a alors l'égalité $\boxed{\boxed{D = r}}$. EG : $n = 3^2 5^1 7 \Vdash 3 < 5 < 7$.
2. Supposons à présent $\underline{\underline{u = 1}}$. On a alors l'égalité $\boxed{\delta = q}$.
   (a) Si r fait sens et minore pq, on a alors l'égalité $\boxed{\boxed{D = r}}$. EG : $n = 2^1 5^1 7 \Vdash 2 < 5 < 7$.
   (b) On a sinon l'égalité $\boxed{\boxed{D = pq}}$. EG : $n = 3^1 5 \Vdash 3 < 5 < 10$.

D'après l'arbre ci-dessus, le couple $\binom{\delta}{D}$ peut valoir $\binom{p^2}{p^3}$, $\binom{p^2}{q}$ ou son symétrique $\binom{q}{p^2}$, $\binom{q}{r}$ ou encore $\binom{q}{pq}$.
Il y aura donc **quatre** trios possibles pour $\{d, \delta, D\}$ et autant de fractions λ correspondantes :

$$\left\{\begin{array}{lllllll}
\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} = \frac{1+p+p^2}{p^3} & \text{cas} & \bigstar & \text{ou} & 1\text{(a)iA} & & \\
\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q} = \frac{pq+q+p^2}{p^2 q} & \text{cas} & 1\text{(a)iB} & \text{ou} & 1\text{(a)ii} & \text{ou} & 1\text{(b)i} \\
\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{pq+pr+qr}{pqr} & \text{cas} & 1\text{(b)ii} & \text{ou} & 2\text{a} & & \\
\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{pq} = \frac{p+q+1}{pq} & \text{cas} & 2\text{b} & & & &
\end{array}\right. .$$

2.2 simplifier la fraction λ

Vu l'extranéité deux à deux de p, q, r,

$$\textit{les trois premières fractions } \frac{1+p+p^2}{p^3}, \frac{pq+q+p^2}{p^2q} \textit{ et } \frac{pq+pr+qr}{pqr} \textit{ sont irréductibles.}$$

L'effet des dénominateurs est alors clair :

$$\begin{array}{ccc} \text{cas } \lambda = \frac{1+p+p^2}{p^3} & \longrightarrow & \mathrm{val}_p \text{ baisse de } 3 \\ \text{cas } \lambda = \frac{pq+q+p^2}{p^2q} & \longrightarrow & \left\{\begin{array}{l} \mathrm{val}_p \text{ baisse de } 2 \\ \mathrm{val}_q \text{ baisse de } 1 \end{array}\right. \\ \text{cas } \lambda = \frac{pq+pr+qr}{pqr} & \longrightarrow & \begin{array}{c} \mathrm{val}_p\,,\ \mathrm{val}_q \text{ et } \mathrm{val}_q \\ \text{baissent chacune de } 1 \end{array} \end{array}. \quad \begin{array}{c} \text{(Cela ne préjuge bien sûr} \\ \text{pas de l'augmentation des} \\ \textit{autres} \text{ valuations relatives} \\ \text{aux facteurs premiers} \\ \text{des numérateurs.)} \end{array}$$

Quant à la dernière fraction $\frac{p+q+1}{pq}$, elle ne pourrait (vu son dénominateur) se simplifier que par p ou q. Or, vu son numérateur, elle se simplifie par p ssi $p \mid q+1$, et par q ssi $q \mid p+1$, çàd (se rappeler $p < q$) ssi $q = p+1$, çàd ssi p et q sont deux premiers consécutifs, çàd ssi $\binom{p}{q} = \binom{2}{3}$, ou encore (puisque $D = pq$ dans ce cas) ssi $\lambda = 1$ (ce qui serait franchement visible).

La simplifiabilité par p équivaut à minorer $\mathrm{val}_p\,(p+q+1) \geq 1$: or, pour chaque exposant $e \in \mathbf{N}^*$, imposer $q \equiv p^e - (p+1) \bmod p^{e+1}$ (possible par Dirichlet) livre[3] l'égalité $\mathrm{val}_p\,(p+q+1) = e$. Par ailleurs[4], le premier $q > 2$ étant impair, la somme $q+1$ est paire, donc le numérateur $p+q+1$ aussi quand $p = 2$ – et, quand p n'est pas 2, il lui est étranger, d'où par Dirichlet un premier $q \equiv -2\,[p]$ livrant la nullité de $\mathrm{val}_p\,(\lambda)$ lorsque $n = pq$. **Bref** :

$$\text{cas } \lambda = \frac{p+q+1}{pq} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathrm{val}_p \text{ peut baisser de 1 (ssi } p > 2) \\ \mathrm{val}_p \text{ peut augmenter de n'importe quel naturel} \\ \mathrm{val}_q \text{ reste inchangée (sauf si } \lambda = 1) \end{array}\right.$$

Voici des exemples avec $p = 2$ atteignant les dix premières valuations :

$\boxed{n = 2q}$
$n' = q + 3$
$\mathrm{val}_2\, n' = V$

(l'obèle † repère les V tels que $2^V - 3$ est premier, le choix de q s'imposant alors naturellement)

V	q	$n = 2q$	$n' = q + 3$
1	3	6	$6 = 2^1 3$
2	17	34	$20 = 2^2 5$
3†	5	10	$8 = 2^3$
4†	13	26	$16 = 2^4$
5†	29	58	$32 = 2^5$
6†	61	102	$64 = 2^6$
7	1661	3322	$1664 = 2^7 13$
8	1277	2554	$1280 = 2^8 5$
9†	509	1018	$512 = 2^9$
10†	1021	2042	$1024 = 2^{10}$

.

2.3 synthèse (les quatre cas $\Lambda 3$, $\Lambda 2$, $\Lambda 1$ et $\Lambda *$) : formes possibles pour la fraction λ

Appelons chacun des quatre cas ci-dessus par un Λ (majuscule du nom λ de la fraction) suivi de la variation absolue $|\mathrm{val}_p\,(\lambda)|$ ou bien d'un astérisque marquant l'indétermination de cette dernière :

[3] *sanity check* : les égalités $\equiv$ imposées sur p et q vérifient bien la condition $p \mid q+1$ trouvée pour pouvoir simplifier λ par p.
[4] la lectrice regardera soigneusement en quoi le raisonnement précédent achoppe quand $e = 0$

nom	fraction λ	reconnaissance dans n en termes de p, q, r, u			exemples de n et de $d < \delta < D$
$\boxed{\Lambda 3}$	$\frac{1+p+p^2}{p^3}$	pas de q	ou	$\begin{cases} u \geq 3 \\ p^3 < q \end{cases}$	$n = 2^3\,(11) \quad \Vvdash \quad 2 < 2^2 < 2^3$
$\boxed{\Lambda 2}$	$\frac{pq+q+p^2}{p^2 q}$	$\begin{cases} u \geq 3 \\ p^2 < q < p^3 \end{cases}$ ou $\begin{cases} u = 2 \\ p^2 < q \end{cases}$	ou	$\begin{cases} u \geq 2 \\ q < p^2 \\ \text{pas de } r < p^2 \end{cases}$	$n = 3^{\geq 2}11 \quad \Vvdash \quad 3 < 3^2 < 11$ $n = 3^2 5\,(11) \quad \Vvdash \quad 3 < 5 < 3^2$
$\boxed{\Lambda 1}$	$\frac{pq+pr+qr}{pqr}$	$\begin{cases} u \geq 2 \\ q, r < p^2 \end{cases}$	ou	$\begin{cases} u = 1 \\ r < pq \end{cases}$	$n = 3^2 5^1 7$ $n = 3^1 5^1 7$ $\quad \Vvdash \quad 3 < 5 < 7$
$\boxed{\Lambda *}$	$\frac{p+q+1}{pq}$	$\begin{cases} u = 1 \\ q \text{ fait sens} \\ \text{pas de } r < pq \end{cases}$		• λ simplifiable par p ssi $p \mid q+1$ • λ pas simplifiable par q (sauf si $\lambda = 1$)	$n = 2^1 5\,(11) \quad \Vvdash \quad 2 < 5 < 2^1 5$ $n = 2^1 7\,(17) \quad \Vvdash \quad 2 < 7 < 2^1 7$

La décroissance stricte de u dans les trois premiers cas montre qu'on en sortira toujours : ou bien en changeant de p (nullité de $\mathrm{val}_p(n')$), ou bien en tombant dans le cas $\Lambda *$, lequel pourra suivant la valuation $\mathrm{val}_p(q+1)$ renvoyer à *n'importe quel* cas – et *même changer*[5] de p quand $p \neq 2$.

Voici un bel exemple d'itération combinant les cas $\Lambda 3$, $\Lambda 2$ et $\Lambda *$:

$$\overset{64}{2^6} \underset{\Lambda 3}{\longmapsto} \overset{56}{2^3 7} \underset{\Lambda 2}{\longmapsto} \overset{50}{2^1 5^2} \underset{\Lambda *}{\longmapsto} \overset{40}{2^3 5} \underset{\Lambda 2}{\longmapsto} \overset{38}{2^1 19} \underset{\Lambda *}{\longmapsto} \overset{22}{2^1 11} \underset{\Lambda *}{\longmapsto} \overset{14}{2^1 7} \underset{\Lambda *}{\longmapsto} \overset{10}{2^1 5} \underset{\Lambda *}{\longmapsto} \overset{8}{2^3} \underset{\Lambda 3}{\longmapsto} 7.$$

En voici deux autres, un qui évite $\Lambda *$ en changeant de p, l'autre qui change de p uniquement avec du $\Lambda *$:

$$\overset{374}{2^1 11^1 17} \underset{\Lambda 1}{\longmapsto} \overset{243}{3^5} \underset{\Lambda 3}{\longmapsto} \overset{117}{3^2 13} \underset{\Lambda 2}{\longmapsto} 61 \qquad \overset{581}{7^1 83} \underset{\Lambda *}{\longmapsto} \overset{91}{7^1 13} \underset{\Lambda *}{\longmapsto} \overset{21}{3^1 7} \underset{\Lambda *}{\longmapsto} 11.$$

3 suivi des valuations dy- et try-adiques v et w

3.1 motivation originelle : l'implication $6 \nmid n \Longrightarrow 6 \nmid n'$

Il aurait été très satisfaisant d'obtenir l'implication $3 \nmid n \overset{?}{\Longrightarrow} 3 \nmid n'$ afin de pouvoir dérouler

$$\text{les élégantes implications} \quad 6 \nmid n \Longleftrightarrow \left\{ \text{ou} \begin{array}{c} 2 \nmid n \\ 3 \nmid n \end{array} \right. \overset{?}{\Longrightarrow} \left\{ \text{ou} \begin{array}{c} 2 \nmid n' \\ 3 \nmid n' \end{array} \right. \Longleftrightarrow 6 \nmid n'.$$

Par exemple, l'entier $2^1 5^1 7 = 70$ (cas $\Lambda 1$) est envoyé sur

$$70' = 5^1 7 + 2^1 7 + 2^1 5 = 35 + 14 + 10 = 59 \qquad \text{lequel est non multiple de 3.}$$

Hélas, l'entier $2^1 11^1 17 = 374$ (cas $\Lambda 1$) est quant à lui envoyé sur

$$374' = 11^1 17 + 2^1 17 + 2^1 11 = 187 + 34 + 22 = 243 = 3^4,$$ ce qui fournit un contre-exemple – en fait le plus petit.

Afin d'éclairer cela, suivons les valuations dyadique et tryadique des itérés de n.

Lorsque n est multiple de $12 = 2^2 3$ (cas $\Lambda 2$), alors son image $n' = 13 \frac{n}{12}$ ou bien le reste, ou bien devient impaire (cas $\begin{cases} v = 2 \\ w \geq 1 \end{cases}$) *avec une valuation tryadique arbitraire* ou quitte les multiples de 3 (cas $\begin{cases} v \geq 2 \\ w = 1 \end{cases}$) *avec une valuation dyadique arbitraire*, ou bien reste divisible par 6 mais pas par 12.

Quand n est dans ce dernier cas, çàd si $\begin{cases} 6 \mid n \\ 4 \nmid n \end{cases}$, alors ou bien il est fixe (cas $\Lambda *$) ou bien son image bascule dans les impairs (cas $\Lambda 1$ avec $D = 5$) *avec une valuation tryadique arbitraire.*

Il reste à étudier nos valuations lorsque n n'est plus multiple de 6.

[5] *cf.* partie 2.2

3.2 suivi tant que n est pair de sa valuation dyadique v

Supposons n pair, càd $\boxed{d=2}$, puis imposons $\boxed{3\nmid n}$, le cas n impair étant remis à la section 3.3.

1. Cas $v\geq 2$. On a alors d'une part l'égalité $\delta=4$, d'autre part[6] la non-divisibilité $3\nmid n'$.

   (a) $\boxed{v\geq 3}$ L'entier 8 divise alors n et majore strictement δ, d'où la majoration $D\leq 8$; or la non-divisibilité $3\nmid n$ se propage à D et exclut le cas $D=6$. Notre grand D majorant par ailleurs strictement $\delta=4$, il vaut l'un des trois entiers 5, 7 ou 8, avec pour fraction λ respective $\frac{3\cdot 5+4}{4\cdot 5}=\frac{19}{20}$, $\frac{3\cdot 7+4}{4\cdot 7}=\frac{25}{28}$ ou $\frac{3\cdot 8+4}{4\cdot 8}=\frac{7}{8}$. Synthétisons :

$$\left[\begin{array}{llll} 5\mid n & (D=5) & \longrightarrow & n'=2\frac{n/8}{5}19 \quad (\text{cas }\Lambda 2)\\ \begin{cases}5\nmid n\\ 7\mid n\end{cases} & (D=7) & \longrightarrow & n'=2^1 5^2\frac{n/8}{7} \quad (\text{cas }\Lambda 2)\\ 5,7\nmid n & (D=8) & \longrightarrow & n'=7\frac{n}{8} \quad\quad\ (\text{cas }\Lambda 3)\end{array}\right. .$$

   La décroissance stricte de v va forcer la sortie de ce cas $v\geq 3$, avec un suivi aisé des valuations en jeu[7]. Par exemple, l'image n' sera impaire ssi $\begin{cases}v=3\\ 5,7\nmid n\end{cases}$, càd ssi $\begin{cases}8\mid n\\ 5,7,16\nmid n\end{cases}$ (cas $\Lambda 3$), *e. g.* $8\underset{\Lambda 3}{\mapsto}7$.

   (b) $\boxed{v=2}$ Le diviseur $D=q$ vaut alors le plus petit facteur premier de l'impair $\frac{n}{4}$. En notant $i:=\frac{n}{4q}$, l'entier $\underline{\underline{n=4qi}}$ est alors envoyé (cas $\Lambda 2$) sur $\underline{\underline{n'=(3q+4)\,i}}$, impair en tant que produit d'impairs.

$$\text{L'exemple le plus simple est}\qquad \begin{array}{c}20\\ 2^2 5\end{array}\underset{\text{cas }\Lambda 2}{\mapsto} 10+5+4=19.$$

2. $\boxed{v=1}$ Le diviseur q fait alors sens et l'on peut évoquer un impair i tel que $\boxed{n=2qi}$.

   (a) $\underline{\underline{\text{cas }\Lambda 1}}$ La valuation val_p chute alors de 1, d'où l'imparité de n'.

$$\text{Deux exemples sont}\qquad \begin{array}{c}70\\ 2^1 5^1 7\end{array}\underset{\Lambda 1}{\mapsto}59 \qquad\text{et}\qquad \begin{array}{c}374\\ 2^1 11^1 17\end{array}\underset{\Lambda 1}{\mapsto}\begin{array}{c}243\\ 3^5\end{array}\underset{\Lambda 3}{\mapsto}\begin{array}{c}117\\ 3^2 13\end{array}\underset{\Lambda 2}{\mapsto}61.$$

   La valuation tryadique reste cependant à préciser. Notre fraction λ vaut $\frac{1}{2}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{qr+2(q+r)}{2qr}$ dont le numérateur peut être rendu de valuation tryadique quelconque : en effet, d'une part pour chaque naturel $e\geq 1$ imposer $\begin{cases}q\equiv -1\\ r\equiv 2+3^e\end{cases}\bmod 3^{e+1}$ (légitime par Dirichlet) rend ce numérateur $\equiv 3^e\left[3^{e+1}\right]$, *a fortiori* de valuation tryadique e, d'autre part la non-divisibilité $3\nmid n'$ se propage à q et r et permet[8] de dérouler les équivalences

$$3\mid n' \overset{3\nmid n}{\iff} 3\mid\frac{n'}{n}\iff 3\mid\frac{qr+2(q+r)}{2qr}\overset{3\nmid qr}{\iff} qr+2(q+r)\equiv 0 \bmod 3$$
$$\iff qr-q-r\equiv 0\iff \underbrace{(q-1)}_{\equiv\,0\text{ ou }1}\underbrace{(r-1)}_{\equiv\,0\text{ ou }1}\equiv 1\iff \boxed{\begin{cases}q\equiv -1\,[3]\\ r\equiv -1\,[3]\end{cases}}.$$

   (b) $\underline{\underline{\text{cas }\Lambda *}}$ L'image n' vaut $2\frac{q+3}{2}i$. Itérer sur n revient donc à remplacer le premier q (dont 3 n'est pas diviseur) par le milieu $\frac{q+3}{2}$ (dont 3 n'est pas non plus diviseur). Plusieurs exemples :

$$\begin{array}{c}38\\ 2^1 19\end{array}\mapsto\begin{array}{c}22\\ 2^1 11\end{array}\mapsto\begin{array}{c}14\\ 2^1 7\end{array}\mapsto\begin{array}{c}10\\ 2^1 5\end{array}\mapsto\begin{array}{c}8\\ 2^3\end{array}\qquad \begin{array}{c}50\\ 2^1 5^2\end{array}\mapsto\begin{array}{c}40\\ 2^3 5\end{array}\qquad \begin{array}{c}62\\ 2^1 31\end{array}\mapsto\begin{array}{c}34\\ 2^1 17\end{array}\mapsto\begin{array}{c}20\\ 2^2 5\end{array}$$
$$(\text{uniquement des cas }\Lambda *\text{ avant arrêt})\qquad \begin{array}{c}46\\ 2^1 23\end{array}\mapsto\begin{array}{c}26\\ 2^1 13\end{array}\mapsto\begin{array}{c}16\\ 2^4\end{array}\qquad \begin{array}{c}58\\ 2^1 29\end{array}\mapsto\begin{array}{c}32\\ 2^5\end{array}.$$

   Nous avons déjà observé (*cf.* partie 2.2) que la valuation $u=v$ peut prendre n'importe quelle valeur entière ≥ 1, ce qui permet de renvoyer l'image (paire) dans n'importe lequel des cas ci-dessus – et même $\underline{\underline{\text{réintégrer du 3}}}$ ssi q est de la forme $2QR-3$ pour deux premiers $Q\equiv R\equiv -1\,[3]$ tels

[6] se rappeler l'implication $6\nmid n\Longrightarrow 6\nmid n'$ des préliminaires

[7] la lectrice est invitée à décrire un tel suivi des valuations 2-, 5-, 7- et 19-adiques

[8] *sanity check* : les conditions trouvées pour avoir $3\mid n'$ seront bien sûr compatibles avec les égalités modulaires imposées auparavant pour obtenir n'importe quelle valuation ≥ 1

que $Q < R < 2Q$. Voici trois exemples[9] réintégrant du 3 :

$$\underset{2^1 983}{1966} \underset{\Lambda*}{\longmapsto} \underset{2^1 \boxed{17} 29}{986} \underset{\Lambda 1}{\longmapsto} \underset{\underline{\underline{3^2}} 5^1 13}{585} \underset{\Lambda 2}{\longmapsto} \underset{13^1 29}{377} \underset{\Lambda*}{\longmapsto} 43$$

$$\underset{2^1 3851}{7702} \underset{\Lambda*}{\longmapsto} \underset{2^1 \boxed{41} 47}{3854} \underset{\Lambda 1}{\longmapsto} \underset{\underline{\underline{3^1}} 701}{2103} \underset{\Lambda*}{\longmapsto} \underset{\underline{\underline{3^1}} 5^1 47}{705} \underset{\Lambda*}{\longmapsto} \underset{\underline{\underline{3^2}} 47}{423} \underset{\Lambda 2}{\longmapsto} 197$$

$$\underset{2^1 8363}{16726} \underset{\Lambda*}{\longmapsto} \underset{2^1 \boxed{47} 89}{8366} \underset{\Lambda 1}{\longmapsto} \underset{\underline{\underline{3^4}} 5^1 11}{4455} \underset{\Lambda 2}{\longmapsto} \underset{\underline{\underline{3^2}} 11^1 29}{2871} \underset{\Lambda 2}{\longmapsto} \underset{29^1 53}{1537} \underset{\Lambda*}{\longmapsto} 83.$$

Ces exemples qui basculent dans les impairs nous incitent à aller explorer ces derniers.

Résumé (suivi des valuations 2- et 3-adiques quand n est pair et non multiple[10] de 3)

1. Cas $4 \mid n$. Ni n ni n' ne sont alors multiples de 3.
   (a) cas $8 \mid n$ (cas $\Lambda 3$ ou $\Lambda 2$) : on finit par en sortir, avec un suivi aisé des valuations 2-, 5-, 7- et 19-adique ; (en particulier, l'image n' est impaire ssi $5, 7, 16 \nmid n$)
   (b) cas $8 \nmid n$ (cas $\Lambda 2$) : alors n est de la forme $4qi$ et est envoyé sur l'impair $n' = (3q + 4)\, i$.
2. Cas $4 \nmid n$. Notre n est alors de la forme $n = 2qi$ avec i impair et $3 \nmid qi$.
   (a) (cas $\Lambda 1$) L'image n' est impaire et de valuation tryadique quelconque – même nulle. *Petit bonus* :
   $$\text{l'équivalence } 3 \mid n' \iff \begin{cases} q \equiv -1\,[3] \\ r \equiv -1\,[3] \end{cases}.$$
   (b) (cas $\Lambda*$) L'image $n' = 2\frac{q+3}{2} i$ est non divisible par 3 et de valuation dyadique quelconque ≥ 1. (Cette image réintégrera par ailleurs du 3 lors de l'itération suivante ssi q est de la forme $2QR - 3$ pour deux premiers $Q \equiv R \equiv -1\,[3]$ tels que $Q < R < 2Q$.)

3.3 suivi quand n est impair de sa valuation tryadique w

Regardons à présent la valuation tryadique lorsque n est impair.

Remarque dispensable. Si cette valuation ne s'annule jamais, alors les itérés de n s'arrêtent ssi l'un d'eux vaut 3 ou 3^2 : le premier cas est exclu (chaque itéré majore 6) mais le second est réalisé quand $n = 15 \mapsto 9$ (et c'est le seul antécédent[11]). La valuation w doit donc s'annuler à moins que les itérations finissent sur $\cdots \mapsto 15 \mapsto 9$. (*Question ouverte* : trouver les façons de terminer ainsi, à l'instar de $9 \leftarrow 15 \leftarrow 33 \leftarrow 57 \leftarrow 249 \leftarrow \cdots$.)

Le suivi de w est analogue à celui de v – avec cependant quelques différences.

1. $\boxed{\text{cas } w \geq 2}$ Selon que chaque premier $< 3^3$ divise ou non n, on obtient pour λ les fractions, $\frac{13}{3^3}$ (cas $\Lambda 3$), $\frac{4q+9}{3^2 q}$ (cas $\Lambda 2$) ou $\frac{71}{3^1 5^1 7}$ (cas $\Lambda 1$), donc w diminue toujours de 3, 2 ou 1, avec un suivi clair des autres premiers en jeu (13, 71 et les facteurs[12] de $4q + 27$).
2. $\boxed{\text{cas } w = 1}$ Alors q fait sens et diffère de $p = 3$.
   (a) (cas $\Lambda 1$) Le premier r divise $j := \frac{n}{3q}$ et n'est pas 3, d'où
   $$\text{les égalités } \bmod 3 : n' = qr + 3\left(j + q\frac{j}{r}\right) = qr \neq 0.$$

---

[9] on a cherché dans les premiers $\equiv -1\,[3]$ deux éléments Q et R tels que $\left\{ \begin{array}{c} Q < R < 2Q \\ 2QR - 3 \text{ premier} \end{array} \right.$ (choisir $Q \in \{11, 23, 39\}$ échoue)

[10] le cas $6 \mid n$ a déjà été rappelé en fin de partie 3.1 et le cas n impair fait l'objet de la partie 3.3 suivante

[11] Les triplets strictement croissants d'entiers ≥ 1 de somme 9 sont $(1, 2, 6)$, $(1, 3, 5)$ et $(2, 3, 4)$. Le premier ne convient pas (sinon le diviseur $3 \mid 6 \mid n$ devrait appaître entre D et δ), le dernier non plus (sinon n serait multiple de d et δ, çàd de 6, d'où $D = 3$). Le second ne peut provenir que d'un produit de deux premiers (signature $d = 1$ avec $D \neq \delta^2$) qui sont alors d et δ.

[12] la lectrice est invitée à lister ces facteurs premiers

(b) (cas $\Lambda *$) Le numérateur de $\lambda = \frac{q+4}{3q}$ peut prendre n'importe quelle valuation tryadique, même nulle[13], ce qui doit arrêter notre espoir de contrôler davantage w.

3. $\boxed{\text{cas } w = 0}$ Contrairement à l'imparité qui était conservée, on pourra faire apparaître du 3 *ex nihilo*. Par exemple, (cas $\Lambda 3$) le numérateur $1 + p + p^2$ sera nul $\bmod 3$ quand $p \equiv 1\,[3]$,

$$e.\ g. \quad \overset{343}{7^3} \underset{\Lambda 3}{\mapsto} \overset{57}{\underline{\underline{3^1}}19} \underset{\Lambda *}{\mapsto} 23.$$

De même, (cas $\Lambda 2$) le numérateur $p^2 + pq + q$ sera multiple de 3 si $p \equiv q \equiv 1\,[3]$,

$$e.\ g. \quad \overset{637}{7^2 13} \underset{\Lambda 2}{\mapsto} \overset{153}{\underline{\underline{3^2}}17} \underset{\Lambda 2}{\mapsto} \overset{77}{7^1 11} \underset{\Lambda *}{\mapsto} 19,$$

(cas $\Lambda 1$) le numérateur $pq + pr + qr$ sera divisible par 3 dès que p, q, r valent $1 \bmod 3$,

$$e.\ g. \quad \overset{1729}{7^1 13^1 19} \underset{\Lambda 1}{\mapsto} \overset{471}{\underline{\underline{3^1}}157} \underset{\Lambda *}{\mapsto} \overset{161}{7^1 23} \underset{\Lambda *}{\mapsto} 31$$

et (cas $\Lambda *$) le numérateur $p + q + 1$ s'annulera $\bmod 3$ pour $p \equiv q \equiv 1\,[3]$,

$$e.\ g. \quad \overset{91}{7^1 13} \underset{\Lambda *}{\mapsto} \overset{21}{\underline{\underline{3^1}}7} \underset{\Lambda *}{\mapsto} 11.$$

Nous laissons à la lectrice le soin d'établir les équivalences suivantes, autrement illustrées :

$$\begin{pmatrix} \text{contexte :} \\ 2, 3 \nmid n' \end{pmatrix} \quad \begin{array}{llcll}
\text{cas } \Lambda 3 & 3 \mid n' & \iff & p \equiv 1\,[3] & \overset{343}{13^3} \mapsto \overset{183}{\underline{\underline{3^1}}61} \underset{\Lambda *}{\mapsto} \overset{65}{\underline{\underline{3^1}}23} \underset{\Lambda *}{\mapsto} \overset{27}{\underline{\underline{3^3}}} \underset{\Lambda 3}{\mapsto} 13 \\
\text{cas } \Lambda 2 & 3 \mid n' & \iff & p \equiv q \equiv 1\,[3] & \overset{931}{7^2 19} \mapsto \overset{185}{\underline{\underline{3^1}}67} \underset{\Lambda *}{\mapsto} 71 \\
\text{cas } \Lambda 1 & 3 \mid n' & \iff & p \equiv q \equiv r\,[3] & \overset{935}{5^1 11^1 17} \mapsto \overset{327}{\underline{\underline{3^1}}109} \underset{\Lambda *}{\mapsto} 113 \\
\text{cas } \Lambda * & 3 \mid n' & \iff & p \equiv q \equiv 1\,[3] & \overset{133}{7^1 19} \mapsto \overset{27}{\underline{\underline{3^3}}} \underset{\Lambda 3}{\mapsto} 13
\end{array}$$

Les apparitions et disparitions de facteurs 3 dans tous les exemples précédents gagneront les lumières des équivalences ci-dessus.

Au-delà la possibilité de faire apparaître du 3, *à quel point* pouvons-nous le faire ?

Par exemple, dans le cas $\Lambda 3$, même si l'image n' est multiple de 3, elle sera (exercice !) toujours $\equiv 3\,[9]$ et ne pourra donc atteindre aucune valuation tryadique supérieure.

En revanche, dans le cas $\Lambda *$, imposer à e naturel fixé les égalités $\begin{cases} p \equiv -2 \\ q \equiv 1 + 3^e \end{cases} \bmod 3^{e+1}$ rend le numérateur $p+q+1 \equiv 3^e \left[3^{e+1}\right]$. De même, imposer dans les cas $\Lambda 1$ et $\Lambda 2$ les égalités $\begin{cases} p \equiv (r \equiv) - 2 \\ q \equiv 1 + 3^{\frac{3^e - 1}{2}} \end{cases} \bmod 3^{e+1}$ livre encore un numérateur $\equiv 3^e \left[3^{e+1}\right]$. *Bref* : n'importe quelle[14] valuation tryadique est possible !

Résumé (suivi de la valuations tryadique quand n est impair)

1. $\boxed{\text{cas } w \geq 2}$ On finit par en sortir, avec un suivi aisé des valuations relatives à certains premiers < 100.
2. $\boxed{\text{cas } w = 1}$ Alors $n = 3qi$ pour un certain impair i non multiple de 3 ;
   (a) (cas $\Lambda 1$) L'image n' n'est pas multiple de 3 ;
   (b) (cas $\Lambda *$) L'image $n' = (q + 4)\, i$ peut prendre n'importe quelle valuation tryadique – zéro inclu.
3. $\boxed{\text{cas } w = 0}$ Excepté le cas $\Lambda 3$ où n' peut être divisible par 3 mais jamais par 9, la valuation tryadique de n' peut être rendue arbitraire. *Équivalences bonus* :

$$\begin{pmatrix} \text{contexte :} \\ 2, 3 \nmid n' \end{pmatrix} \quad \begin{array}{llcl}
\text{cas } \Lambda 3 & 3 \mid n & \iff & p \equiv 1\,[3] \\
\text{cas } \Lambda 2 & 3 \mid n & \iff & p \equiv q \equiv 1\,[3] \\
\text{cas } \Lambda 1 & 3 \mid n & \iff & p \equiv q \equiv r\,[3] \\
\text{cas } \Lambda * & 3 \mid n & \iff & p \equiv q \equiv 1\,[3]
\end{array}$$

La dernière observation – faire sortir de nulle part un multiple de 3 – amène aux questions de surjectivité.

[13] *cf.* partie 2.2 pour imposer une valuation ≥ 1 (le cas d'une valuation nulle équivaut trivialement à $q \not\equiv -1\,[3]$)

[14] une dernière fois, un *sanity check* s'impose entre les égalités modulaires équivalant à la divisibilité $3 \mid n'$ et celles imposées pour obtenir une valuation tryadique arbitraire

4 injectivité et surjectivité

Notre exploration livre immédiatement *la non-injectivité de l'application* $a \mapsto a'$ au vu des contre-exemples :

$$\begin{array}{ccc} 12 \to & \boxed{13} & \leftarrow 27 \\ & \uparrow & \\ & 35 & \end{array} \qquad \begin{array}{c} 16 \to \boxed{14} \leftarrow 22 \\ 20 \to \boxed{19} \leftarrow 65 \\ 44 \to \boxed{37} \leftarrow 63 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 24 \to \boxed{26} \leftarrow 46 \\ 39 \to \boxed{17} \leftarrow 55 \end{array} .$$

Montrons à présent que *l'application* $a \mapsto a'$ *atteint un multiple de chaque impair.*

Preuve. Soit i un impair, soient $p < q < r$ premiers tels que $\begin{cases} p = q = 2\,[i] \\ r = -1\,[i] \end{cases}$ (permis par DIRICHLET) ; on a alors mod i les égalités $(pqr)' = pq + qr + pr = 4 - 2 - 2 = 0$. ✓

Par exemple, quand $i = 3$, on retrouve l'exemple $\overset{935}{5^1 11^1 17} \underset{\Lambda 3}{\mapsto} 3^1 109$ ci-dessus (il y avait bien sûr plus simple, *e. g.* $\overset{24}{2^3 3} \underset{\Lambda 2}{\mapsto} \overset{21}{3^1 7}$).

Un fait amusant vient renforcer cette "surjectivité partielle" : en admettant la conjecture de GOLDBACH, chaque impair > 6 s'écrit $p+q+1$ pour certains premiers p et q, donc – pourvu que l'on puisse[15] imposer $p \neq q$ – est l'image de pq (cas $\Lambda *$). La lectrice est invitée à expliciter elle-même de telles décompositions pour les impairs < 70.

Montrons enfin *la non-surjectivité de l'application* $a \mapsto a'$.

Preuve. Soit par l'absurde a un antécédent[16] de 12 et notons v sa valuation dyadique. La stabilité des impairs nous livre déjà la parité $v \geq 1$.

Supposons ensuite $v \geq 2$. Alors 3 ne divise pas a, sinon 12 le diviserait et son image serait multiple de 13. Si $v \geq 3$, alors l'image a' est multiple de 19, 5^2 ou 7 (cas $\Lambda 3$ ou $\Lambda 2$ avec $\begin{pmatrix} p \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $D \in \{5, 7, 8\}$). On a donc $v = 2$, mais alors l'image a' est divisible par $3q + 4 > 13$ (cas $\Lambda 2$ avec $\begin{cases} p = 2 \\ q > 3 \end{cases}$).

On peut donc imposer $v = 1$. Alors 3 ne divise toujours pas a, lequel serait sinon multiple de 6 donc d'image ou bien multiple de 31 (cas $5 \mid a$) ou bien fixe (d'où l'absurde fixité de 12). Le cas $\Lambda 1$ entraîne alors la nullité de $a' \bmod 2$ et celui $\Lambda *$ celle $\bmod 3$. ✓

Généralisations. On aurait pu aller beaucoup plus vite en listant les sept suites strictement croissantes de trois entiers ≥ 1 de somme 12 et en les excluant une par une. Toutefois, la preuve ci-dessus s'adapte aisément pour montrer que l'image ne contient ni $\underline{\underline{2^e 3}}$ (sauf si $e = 1$) ni aucun multiple de 6 (non fixe) sans diviseur $\equiv 1\,[6]$ (autre que 1), à l'instar de $\underline{\underline{24}}, \underline{\underline{36}}, \underline{\underline{48}}, \underline{\underline{60}}$.

On montrerait également que l'application $a \mapsto a'$ évite chaque pair de la forme $2^{e \geq 1}\pi$ où π est un premier $\begin{cases} > 9 \\ \neq 31 \end{cases}$ ne pouvant s'écrire $3q + 4$ pour un premier $q \geq 3$ (conditions vérifiées si $\begin{cases} \pi \equiv -1\,[6] \\ \pi > 9 \end{cases}$) et tel que ni $2^e\pi - 3$ ni $2^e - 3$ n'est premier. De tels pairs sont $\underline{\underline{58}} = 2^1 29$ ou $\underline{\underline{68}} = 2^2 17$ (l'exposant 2 est minimal car $2^1 17 = 62'$) ou encore $\underline{\underline{\underline{1408}}} = 2^7 11$ (l'exposant 7 est minimal[17]).

Question ouverte : *décrire l'image de l'application* $a \mapsto a'$ *ainsi que les antécédents de chaque image.*

---

[15] les impairs de la forme $2p + 1$ (pour p premier) devront être atteints d'une autre manière – la question est ouverte !

[16] D'après notre expérimentation, ce 12 est le plus petit non atteint. (Les autres pairs < 70 non atteints dans notre exploration sont $44 = (2^1 41)'$ et $46 = (2^1 43)'$, ainsi que $12, 24, 36, 48, 58, 60$ et 68 qui ne seront pas atteignables.)

[17] on a en effet les égalités $2^1 11 = 22 = (2^1 19)'$, $2^2 11 = 44 = (2^1 41)'$, $2^3 11 = 88 = (2^1 5^1 11)'$, $2^4 11 = 176 = (2^1 173)'$, $2^5 11 = 352 = (2^1 349)'$ et $2^6 11 = 704 = (2^1 701)'$