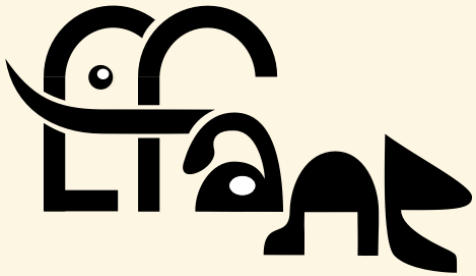
À quoi sert la cryptologie ? — Petit panorama des mathématiques de la cryptologie

2018/10/18 — Lycée Montaigne, Bordeaux

Damien Robert

Équipe LFANT, Inria Bordeaux Sud-Ouest



Parcours

- Prépa au Lycée du Parc à Lyon ;
- Normale sup Paris ;
- Thèse à Inria Nancy ;
- Postdoc à Microsoft Research, Redmond ;
- Chercheur à Inria Bordeaux.

$\Rightarrow$ Algorithmes en théorie des nombres et géométrie algébrique, applications en cryptologie.

Cryptologie à clé publique

Cryptologie :

- Chiffrement ;
- Authenticité ;
- Intégrité.

Applications :

- Militaires ;
- Vie privée ;
- Communications (internet, téléphones…)
- Commerce électronique…

Contexte Historique

- Riche histoire ; chiffrement de messages depuis l'antiquité au moins ;
- Principale application auparavant militaire ;
- Dorénavant la cryptologie joue un rôle essentiel pour garantir la sécurité des communications ;
- Cryptanalyse : déchiffrement d'Énigma par le groupe Ultra (Secret) à Blentchey Park lors de la seconde guerre mondiale ;
- À la fin de la guerre, vente des machines Énigma capturées par les alliés à d'autres pays.

Exemple (Cryptanalyse d'Énigma)

- $\mathrm{enigma}(c) = \mathrm{plug}^{-1} \circ \mathrm{rotor}_1^{-1} \circ \mathrm{rotor}_2^{-1} \circ \mathrm{rotor}_3^{-1} \circ \mathrm{reflector} \circ \mathrm{rotor}_3 \circ \mathrm{rotor}_2 \circ \mathrm{rotor}_1 \circ \mathrm{plug}(c)$.
- Les rotors bougent à chaque étape.
- Le réflecteur transpose une lettre avec une lettre distincte.

$\Rightarrow$ Permutation sans point fixe !

Contexte Historique

- Riche histoire ; chiffrement de messages depuis l'antiquité au moins ;
- Principale application auparavant militaire ;
- Dorénavant la cryptologie joue un rôle essentiel pour garantir la sécurité des communications ;
- Cryptanalyse : déchiffrement d'Énigma par le groupe Ultra (Secret) à Blentchey Park lors de la seconde guerre mondiale ;
- À la fin de la guerre, vente des machines Énigma capturées par les alliés à d'autres pays.

Exemple (Cryptanalyse d'Énigma)

- $\mathrm{enigma}(c) = \mathrm{plug}^{-1} \circ \mathrm{rotor}_1^{-1} \circ \mathrm{rotor}_2^{-1} \circ \mathrm{rotor}_3^{-1} \circ \mathrm{reflector} \circ \mathrm{rotor}_3 \circ \mathrm{rotor}_2 \circ \mathrm{rotor}_1 \circ \mathrm{plug}(c)$.
- Les rotors bougent à chaque étape.
- Le réflecteur transpose une lettre avec une lettre distincte.

$\Rightarrow$ Permutation sans point fixe !

Protocoles cryptographiques

- Briques de base (primitives), s'appuyant sur des objets mathématiques
- Ces primitives sont combinées pour former des algorithmes/modes opératoires (algorithme de chiffrement, algorithme de signature)
- Ces modes opératoires sont combinés pour former des protocoles (protocole de session TLS, protocole de vote)
- Ces protocoles sont implémentés en logiciel ou matériel
- Puis ils sont utilisés.

Example : De RSA à un algorithme de chiffrement

- RSA permet de chiffrer un message m d'une certaine taille k : $m \longmapsto E(m)$;
- Comment chiffrer un message de longueur arbitraire ?
- Idée naturelle : découper m en messages $m_1 \| m_2 \ldots \| m_d$ de taille k, et poser $E(m) = E(m_1) \| E(m_2) \ldots \| E(m_d)$;
- Problème : RSA est malléable. $E(m \times m') = E(m) \times E(m')$.

$\Rightarrow$ A partir de plusieurs chiffrés on peut en produire plein d'autres ;

- La solution est de chiffrer les blocs m_i avec du padding : $E(m_i \oplus G(r) \| r \oplus H(m_i \oplus G(r))$ où r est aléatoire et H et G sont deux fonctions de hachage (on a une preuve de sécurité).

Example : De RSA à un algorithme de chiffrement

- RSA permet de chiffrer un message m d'une certaine taille k : $m \longmapsto E(m)$;
- Comment chiffrer un message de longueur arbitraire ?
- Idée naturelle : découper m en messages $m_1 \| m_2 \ldots \| m_d$ de taille k, et poser $E(m) = E(m_1) \| E(m_2) \ldots \| E(m_d)$;
- Problème : RSA est malléable. $E(m \times m') = E(m) \times E(m')$.

$\Rightarrow$ A partir de plusieurs chiffrés on peut en produire plein d'autres ;

- La solution est de chiffrer les blocs m_i avec du padding : $E(m_i \oplus G(r) \| r \oplus H(m_i \oplus G(r))$ où r est aléatoire et H et G sont deux fonctions de hachage (on a une preuve de sécurité).

Example : intégrité et chiffrement

- Comment combiner les deux briques de base que sont le chiffrement (Encrypt) et l'intégrité (MAC Message Authentification Code) ;
- Encrypt then MAC ?
- MAC then Encrypt ?
- Encrypt + Mac ?

Example : intégrité et chiffrement

- Comment combiner les deux briques de base que sont le chiffrement (Encrypt) et l'intégrité (MAC Message Authentification Code) ;
- Encrypt then MAC ?
- MAC then Encrypt ?
- Encrypt + Mac ?

Attaques

- Attaques sur les briques de base (très rare) ;
- Attaques sur l'empilement des briques en algorithmes ou protocoles ;
- Attaques sur l'implémentation ;
- Attaques sur l'exécution.

Sécurité

- Briques de base : repose sur des problèmes mathématiques bien identifiés et très étudiés (difficulté de la factorisation, logarithme discret dans les courbes elliptiques)
- Preuves de sécurité sur les algorithmes et protocoles : si un attaquant peut attaquer le protocole (avec une certaine probabilité p en temps T), alors il peut attaquer une brique de base (avec une certaine probabilité p' en temps T')

Sécurité ?

- Erreur dans les preuves
- Preuves justes mais modèle incorrect
- Modèle correct mais utilisé dans un autre contexte
- Réductions de sécurités inefficaces
- Bugs dans les programmes
- Attaques physiques (par canaux cachés) : mesure des impulsions électromagnétiques, du bruit, du temps de calcul, des cache miss

Attaques sur TLS

SSL (Secure Sockets Layer) / TLS (Transport Layer Security)

- Protocole : Renegociation attack / Version rollback attack
- BEAST (attaque sur le mode Cipher Block Chaining)
- CRIME and BREACH (attaque sur la compression)
- Downgrade attack : FREAK (export grade cryptography), Logjam (gros précalculs)
- Bugs : Heartbleed (buffer overflow), BERserk, goto fail
- Certificats mal formés

Mitiger la perte des clés privées : perfect foward secrecy via un échange de clés éphémères par Diffie-Hellman.

Sécurité !

Preuves formelles

- Des protocoles
- Des implémentations
- Des compilateurs (voir « Reflections on Trusting Trust» de Ken Thomson)
- Du matériel

Implémentation

- En temps constant ;
- Sans branches ;
- Faites par des experts (librairies opensource comme NaCl)

Ne jamais concevoir son propre système cryptographique ad hoc ou sa propre implémentation à moins d'être un expert.

Quelques applications cryptographiques modernes

- Chiffrement de groupe ;
- Mise en gage ;
- Partage de secret ;
- Preuves sans divulgation de connaissance ;
- Certificats anonymes ;
- Transfert inconscient ;
- Signature de cercle ;
- Calcul multipartite sécurisé ;
- Chiffrement fonctionnel ;
- Obfuscation ;

Exemple (Partage de secret)

- Comment partager un secret entre n personnes de telle sorte que m personnes parmis les n puissent le reconstituer ?
- Un pôlynôme de degré d est entièrement déterminer par sa valeur en $d+1$ points distincts.
- Le secret est un polynôme P de degré $m-1$, chaque personne i connaît la valeur $P(i)$.

Quelques applications cryptographiques modernes

- Chiffrement de groupe ;
- Mise en gage ;
- Partage de secret ;
- Preuves sans divulgation de connaissance ;
- Certificats anonymes ;
- Transfert inconscient ;
- Signature de cercle ;
- Calcul multipartite sécurisé ;
- Chiffrement fonctionnel ;
- Obfuscation ;

Exemple (Partage de secret)

- Comment partager un secret entre n personnes de telle sorte que m personnes parmis les n puissent le reconstituer ?
- Un pôlynôme de degré d est entièrement déterminer par sa valeur en $d+1$ points distincts.
- Le secret est un polynôme P de degré $m-1$, chaque personne i connaît la valeur $P(i)$.

Applications cryptographiques : Bitcoin

- Monnaie électronique décentralisée
- Fichier de transaction public (blockchain)
- Signature des transactions par une courbe elliptique
- La vérification de la blockchain (et validation des nouvelles transactions) fabrique de nouveaux bitcoins.

Applications cryptographiques : Vote électronique Belenios

- Confidentialité du vote (partage de secret)
- Résultats corrects (preuves Zero-Knowledge)
- Validation (et confidentialité) de la liste des électeurs

L'essor du cloud computing

- Chiffrement homomorphe : l'utilisateur fournit au nuage un message chiffré $f_K(m)$ et un programme P, et le nuage renvoie $f_K(P(m))$.
  Le nuage n'a rien appris sur la donnée m, ni sur le résultat !
- L'utilisateur fournit au nuage un message chiffré $f_K(m)$ et le chiffrement $f_K(P)$ d'un programme P, et le nuage renvoie $f_K(P(m))$.
  Le nuage ne sait pas ce qu'il a calculé !

$\Rightarrow$ Une version faible utilise les couplages de courbes elliptiques ;

$\Rightarrow$ La version complète utilise des réseaux, en particulier des réseaux d'idéaux dans des corps de nombres ;

☹ Encore très lent.

Cryptographie post-quantique

- RSA (basé sur la factorisation) et les courbes elliptiques sont vulnérables aux ordinateurs quantiques ;
- Problématique pour des secrets à très long terme (50 ans) : secrets défense
- Conception de nouveaux protocoles résistant aux ordinateurs quantiques
- Diffie-Helmann : échange de clé par des opérations dans un groupe.
  Diffie-Helmann post-quantique : échange de clé par des opérations dans un graphe.

Chiffrement

Alice (Sophie Germain) 

veut écrire

à Bob (Carl Friedrich Gauss)

Chiffrement à clé secrète

Alice 

m=QUARTIQUE

clé secrète de chiffrement $K = +3$

$c = f_K(m)$

c =TXDUWLTXH est envoyé

à Bob 

c =TXDUWLTXH

clé secrète de déchiffrement $K' = -K = -3$

$m = f_K{}^{(-1)}(c) = f_{K'}(c)$

Chiffrement à clé secrète

Alice 

m=QUARTIQUE

clé secrète de chiffrement $K = +3$

$c = f_K(m)$

c =TXDUWLTXH est envoyé

à Bob

c =TXDUWLTXH

clé secrète de déchiffrement $K' = -K = -3$

$m = f_K{}^{(-1)}(c) = f_{K'}(c)$

Chiffrement à clé secrète

Alice 

m=QUARTIQUE

clé secrète de chiffrement $K = +3$

$c = f_K(m)$

c =TXDUWLTXH est envoyé

à Bob 

c =TXDUWLTXH

clé secrète de déchiffrement $K' = -K = -3$

$m = f_K{}^{(-1)}(c) = f_{K'}(c)$

Chiffrement à clé secrète

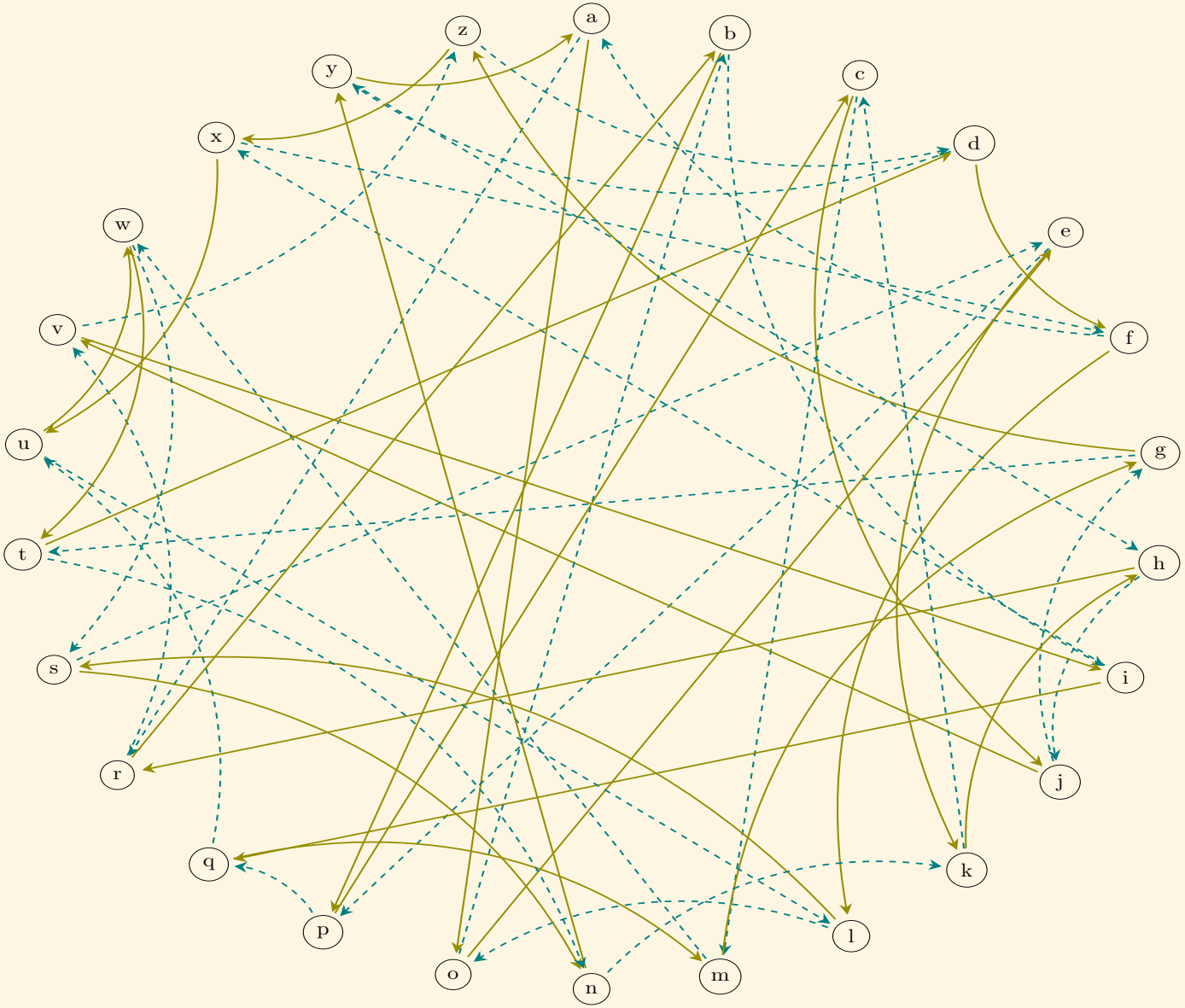
- Trois étapes : création et distribution de clés, chiffrement, déchiffrement
- Avantages : simple, rapide, bien connu
- Fragilités : attaques statistiques, gestion de clés
- Le chiffrement de Vernam (One Time Pad) est inconditionnellement sûr, quelle que soit la puissance de calcul de l'adversaire (Attention : nécessite une clé secrète de même taille que le message envoyé) ;
- Notion de théorie de l'information (Shannon) ;
- Très compliqué et coûteux à mettre en place correctement.

Comment transmettre la clé secrète de manière sécurisée ?

Échange de clé

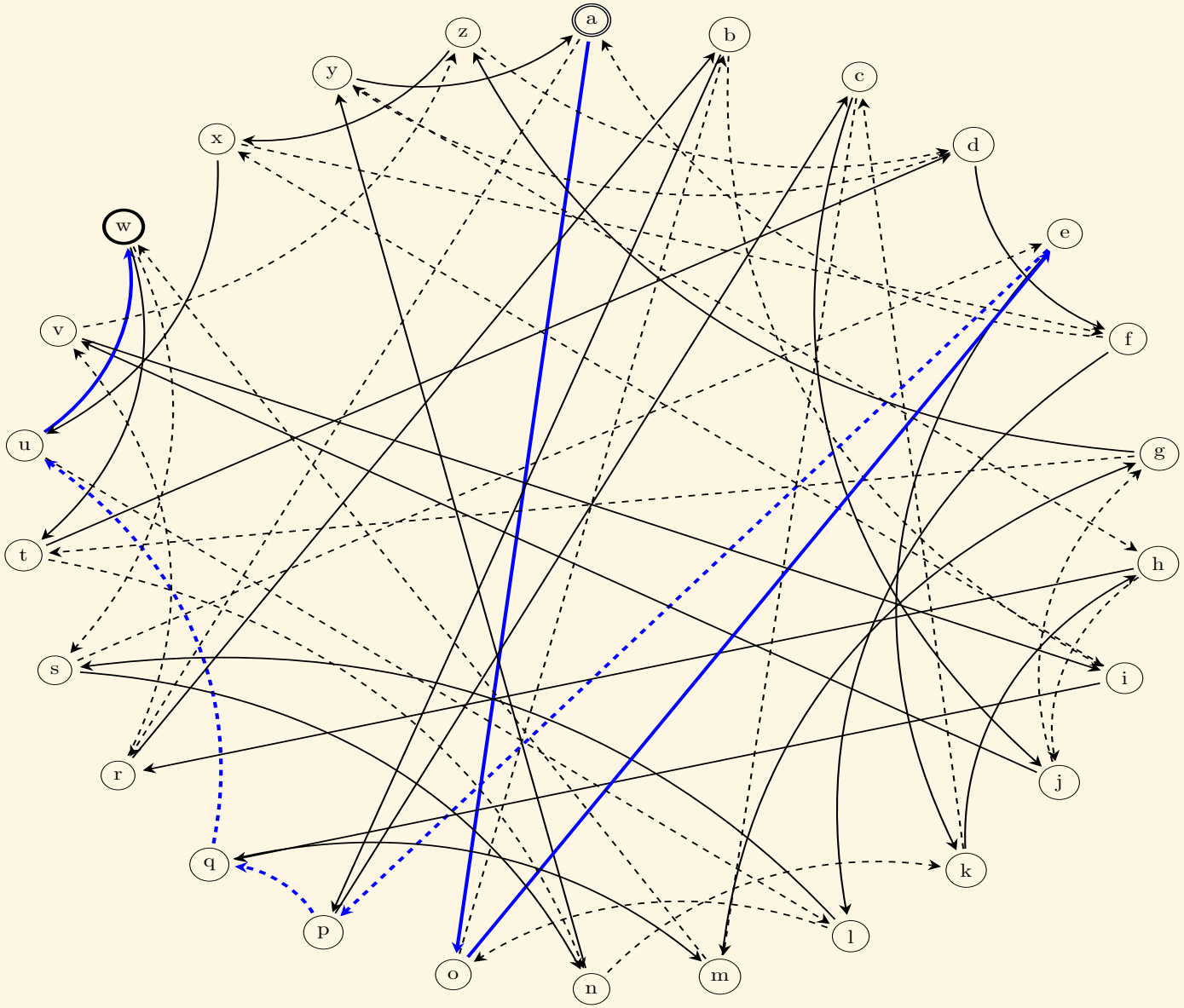
- Échanger une clé secrète commune à travers un canal public ;
- Proposé par Diffie et Hellman en 1976 ;
- Utilise des groupes ;
- Version moderne post-quantique : utilise des graphes.

Échange de clé par graphe



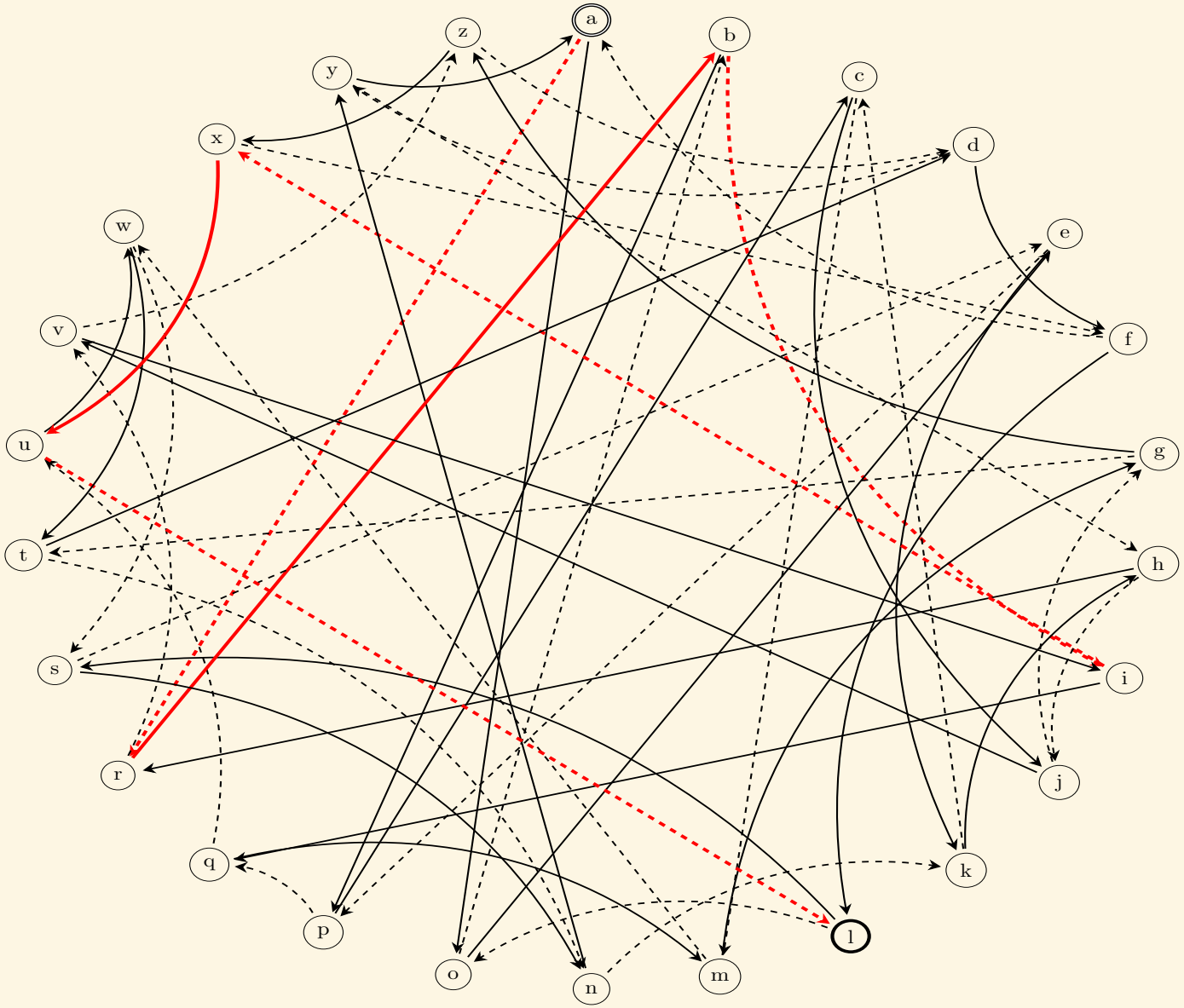
Échange de clé par graphe

Alice part de 'a', suit le chemin 001110, et tombe sur 'w'.



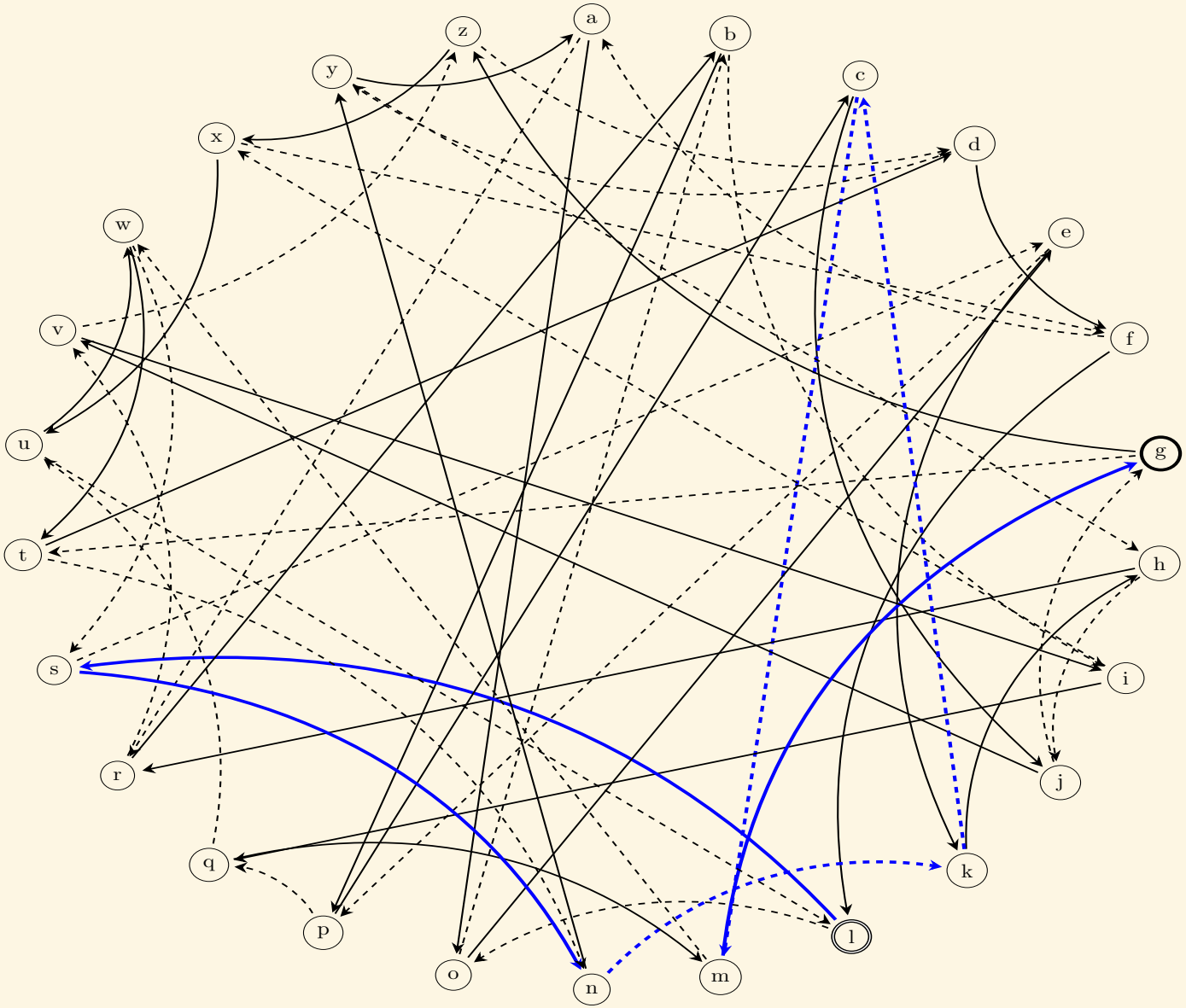
Échange de clé par graphe

Bob part de 'a', suit le chemin 101101, et tombe sur 'l'.



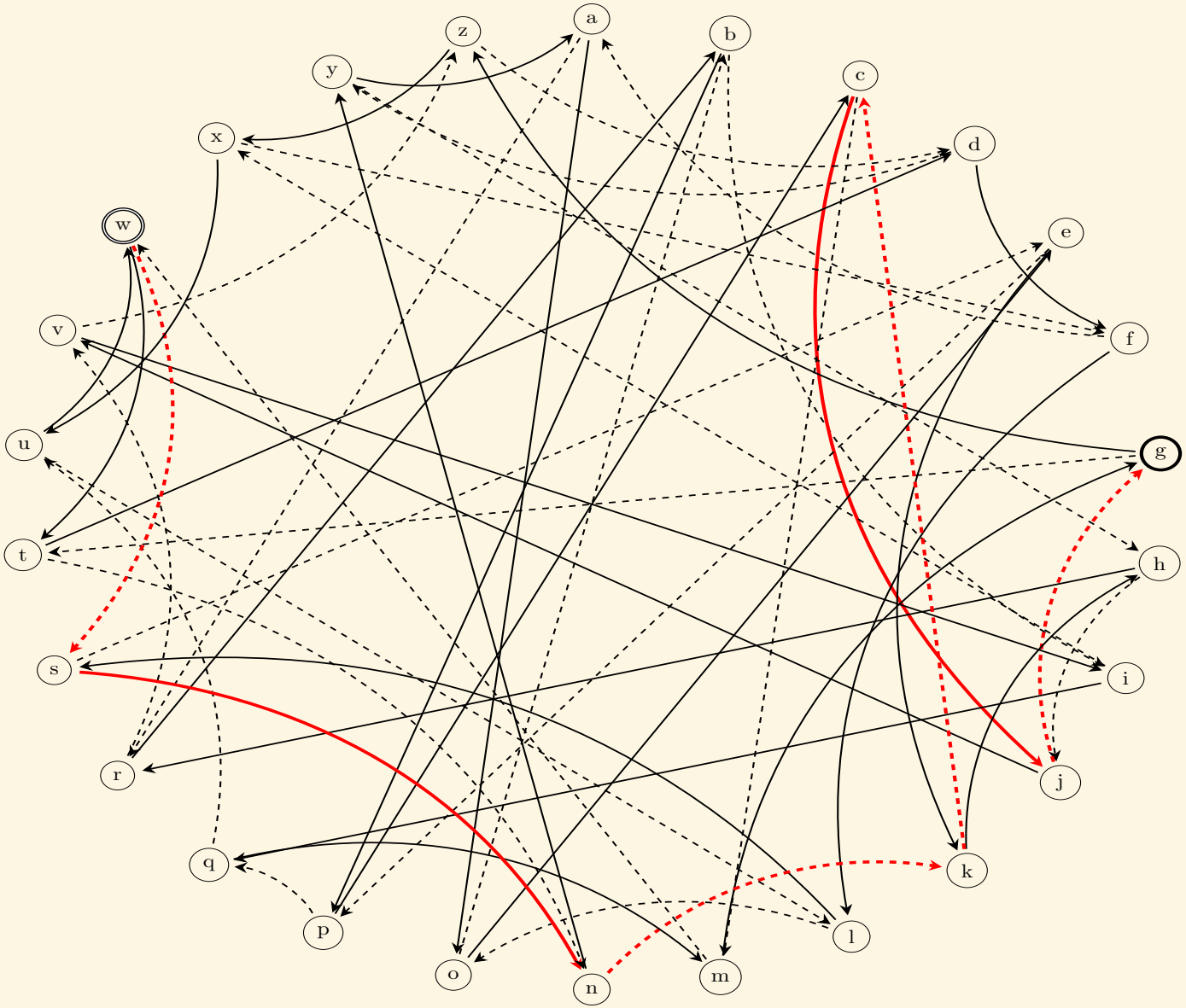
Échange de clé par graphe

Alice part de ‘l’, suit le chemin 001110, et obtient ‘g’.



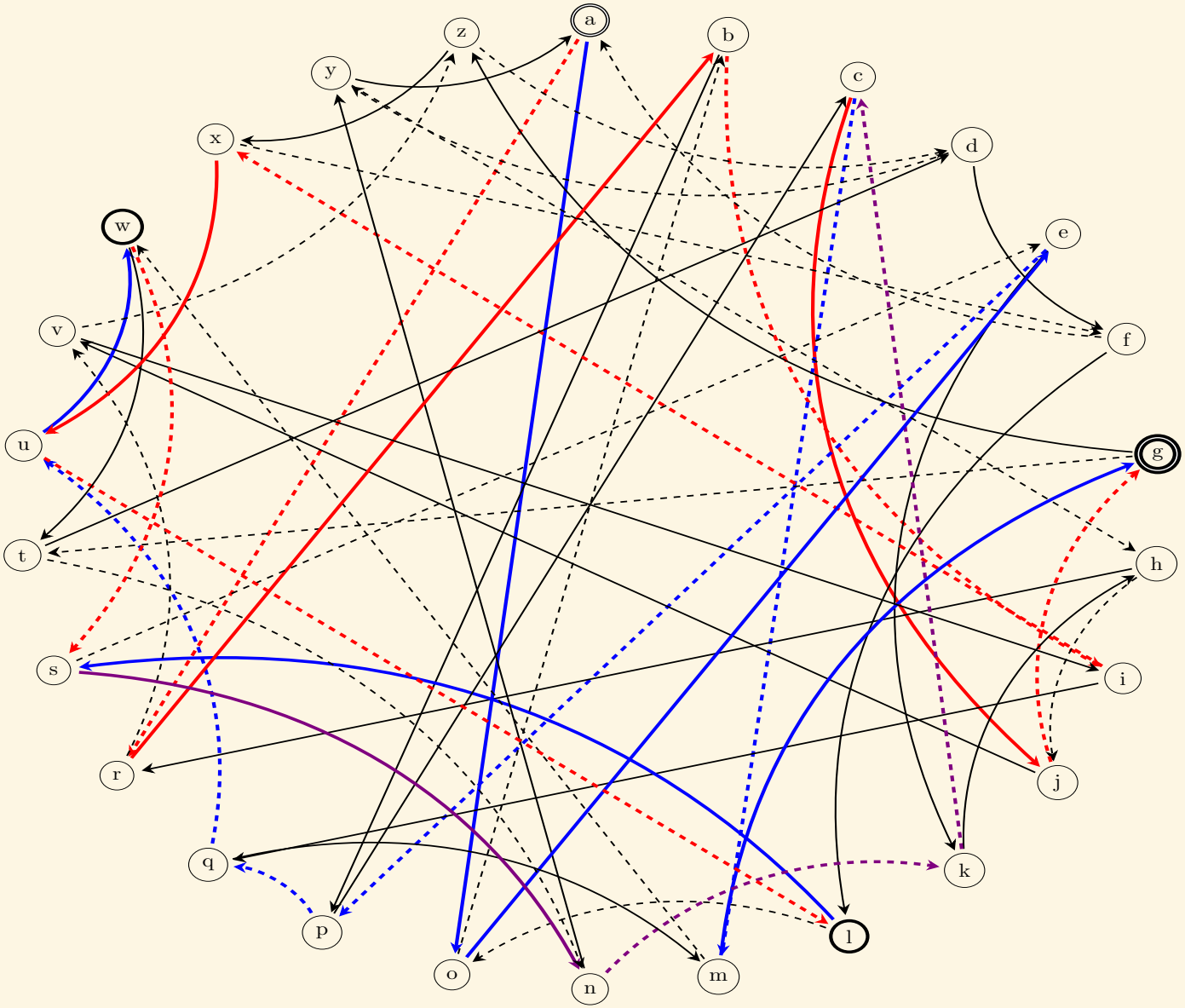
Échange de clé par graphe

Bob part de ‘w’, suit le chemin 101101, et obtient ‘g’.



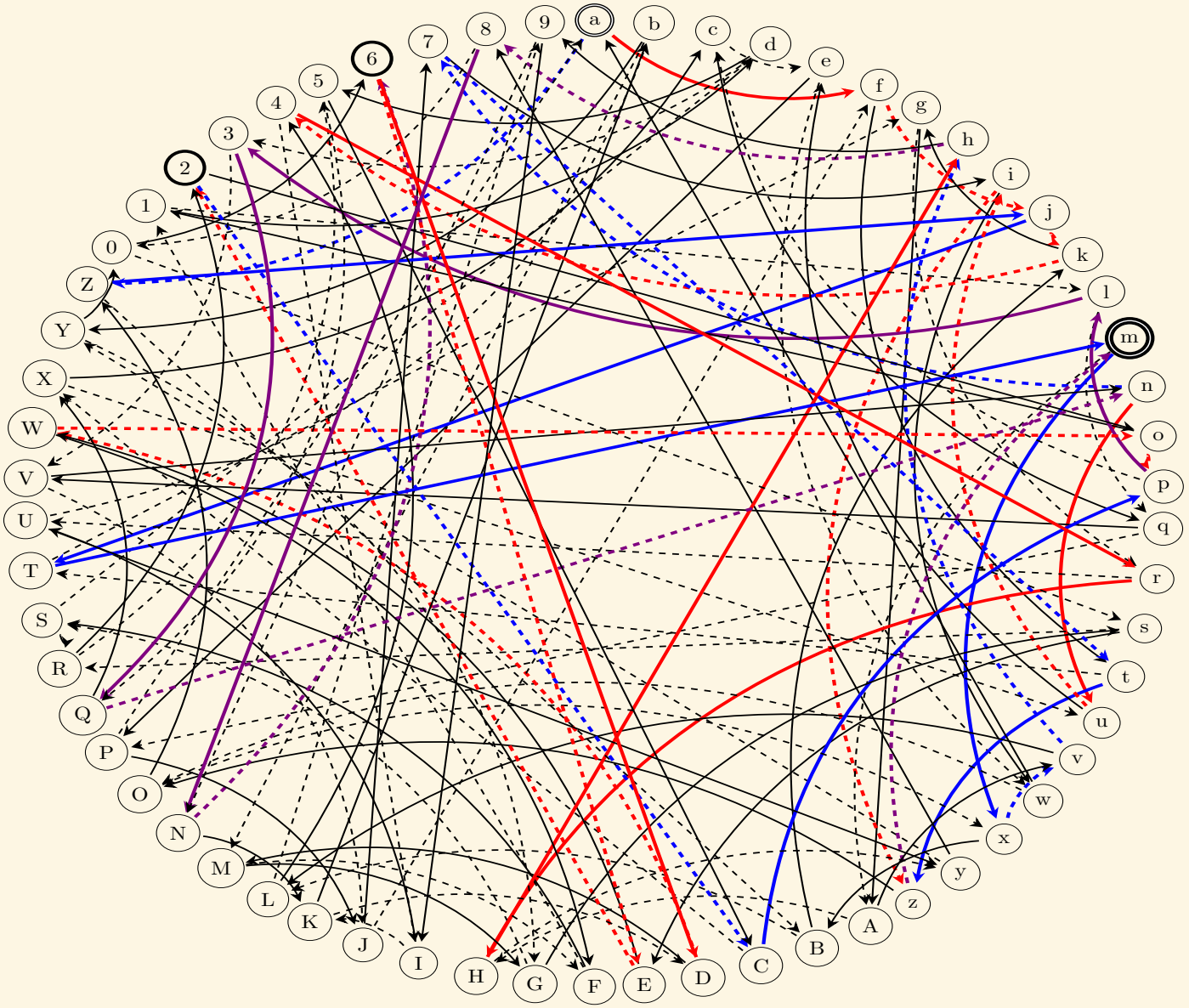
Échange de clé par graphe

L'échange de clé complet



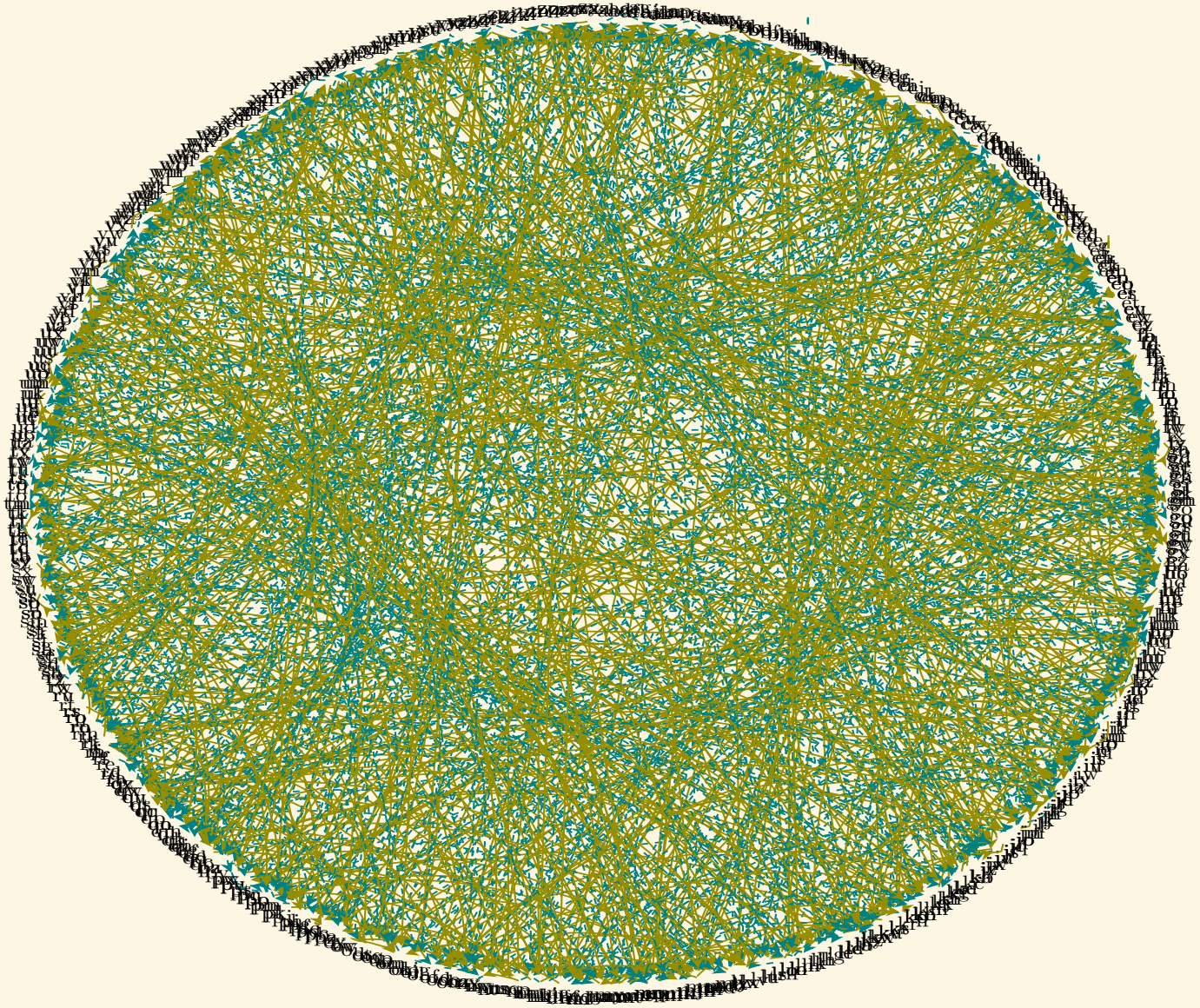
Échange de clé par graphe

Graphe plug grand (62 noeuds)



Échange de clé par graphe

Graphe encore plus grand (676 noeuds)



Échange de clé par graphe

Taille cryptographique :

- Pour une sécurité de 2^{128} bits, il faut un arbre avec $n = 2^{256}$ noeuds (attaque en $\sqrt{n}$: on cherche un chemin en partant du point de départ et d'arrivée à la fois.)
- Il faut aussi que les arrêtes mélanges bien le graphe : en $\log(n)$ étapes on arrive sur un noeud « uniforme » (graphe de Ramanujan).
- Le graphe ne tient pas en mémoire...Il faut un algorithme qui à partir d'un noeud donne ses voisins.

Chiffrement à clé publique

Alice veut envoyer m à Bob.

Elle trouve la clé publique de chiffrement K_{Bob}^{pub} dans l'annuaire.

Elle calcule $c = f_{K_{Bob}^{pub}}(m)$

c est envoyé

à Bob 

c

qui utilise sa clé secrète de déchiffrement K_{Bob}^{sec}

$m = f_{K_{Bob}^{pub}}{}^{(-1)}(c) = g_{K_{Bob}^{sec}}(c)$

Chiffrement à clé publique

Alice veut envoyer m à Bob.

Elle trouve la clé publique de chiffrement K_{Bob}^{pub} dans l'annuaire.

Elle calcule $c = f_{K_{Bob}^{pub}}(m)$

c est envoyé

à Bob

c

qui utilise sa clé secrète de déchiffrement K_{Bob}^{sec}

$m = f_{K_{Bob}^{pub}}{}^{(-1)}(c) = g_{K_{Bob}^{sec}}(c)$

Chiffrement à clé publique

Alice veut envoyer m à Bob.
Elle trouve la clé publique de chiffrement K_{Bob}^{pub} dans l'annuaire.
Elle calcule $c = f_{K_{Bob}^{pub}}(m)$

c est envoyé

à Bob

c

qui utilise sa clé secrète de déchiffrement K_{Bob}^{sec}
$m = f_{K_{Bob}^{pub}}{}^{(-1)}(c) = g_{K_{Bob}^{sec}}(c)$

Chiffrement à clé publique

- Trois étapes : création et publication de clés, chiffrement, déchiffrement
- Avantages : gestion de clé simplifiée, solidité mathématique
- Permet de faire des signatures, du chiffrement de groupe...
- Fragilités : plus lent, plus compliqué à implémenter

En pratique on combine les deux chiffrements : clé publique pour échanger une clé de session (secrète) qui servira à chiffrer à la volée.

Comment savoir quelle clé publique utiliser pour communiquer avec un utilisateur donné ?

Comment faire ?

- Situations asymétriques : l'un saît l'autre pas.
- Celui qui connaît le secret a un avantage (il peut déchiffrer, il peut se prouver).
- Mesurer cet avantage : théorie de la complexité algorithmique.
- S'appuyer sur des problèmes difficiles.

La thèse de Turing-Church

Alan Turing

Alonzo Church

Tests de primalité

Savoir si un entier P est premier.

Pierre de Fermat

Agrawal, Kayal et Saxena

$$T = n^{6+\varepsilon(n)}$$

où n est le nombre de chiffres décimaux de P.

Factorisation

Théorème fondamental de l'arithmétique.

Euclide

Carl Friedrich Gauss

$N = \prod_{1 \leq i \leq I} p_i^{e_i}$.

Factorisation

Hendrik Lenstra

Brigitte Vallée

Factoriser un entier N prend un temps $T = \exp(\sqrt{n})$ où n est le nombre de chiffres décimaux de n. (Algorithme heuristique : $T = \exp(n^{1/3})$)

Asymétrie

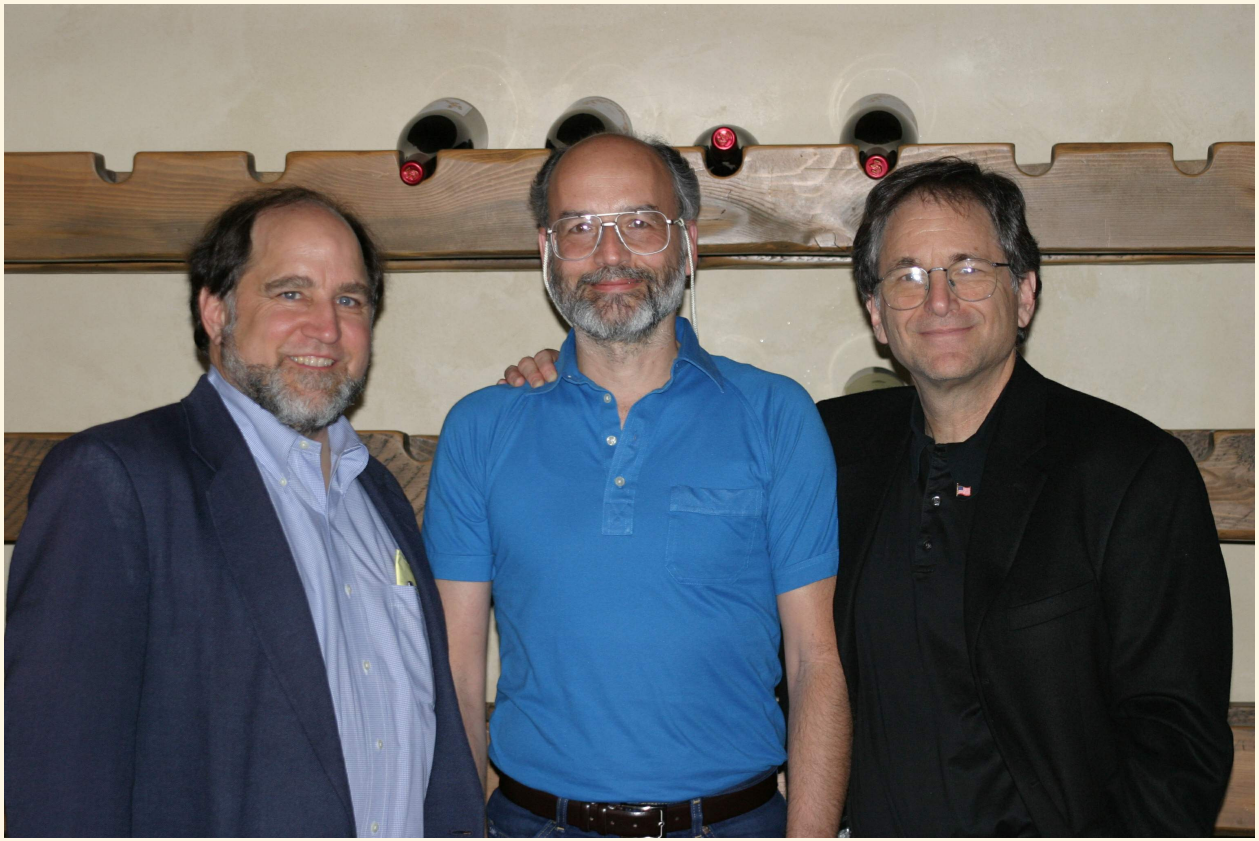
$$(p,q) \longrightarrow N = pq$$

$$(p,q) \longleftarrow N = pq$$

Asymétrie

- En décembre 2009, Thorsten Kleinjung et une dizaine de collègues ont factorisé un nombre de 232 décimales.
- *The sieving, which was done on many hundreds of machines, took almost two years.*
- Calculer le produit de deux nombres de 116 décimales prend 8 millionièmes de secondes sur mon ordinateur portable.

Protocole RSA



Rivest, Shamir et Adleman

Protocole RSA

- Soit $N = pq$ un produit de deux grands nombres premiers ;
- Soit e premier à $\varphi(N) = (p-1)(q-1)$ et d l'inverse de e modulo $\varphi(N)$;
- Chiffrement : $x \longmapsto x^e \mod N$;
- Déchiffrement : $x \longmapsto x^d \mod N$;

Théorème (Petit théorème de Fermat)

$x^{\#(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} = 1 \mod N.$

Exponentielle et logarithme discrets

$p = 7$ un nombre premier et $b = 5 \bmod 7$

x	b^x
1	$5 \bmod 7$
2	$4 \bmod 7$
3	$6 \bmod 7$
4	$2 \bmod 7$
5	$3 \bmod 7$
6	$1 \bmod 7$
7	$5 \bmod 7$

$y = b^x$	$x = \log_b(y)$
1	$0 \bmod 6$
2	$4 \bmod 6$
3	$5 \bmod 6$
4	$2 \bmod 6$
5	$1 \bmod 6$
6	$3 \bmod 6$

$\exp_b : \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ $\qquad$ $log_b : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \to \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$

Exponentielle et logarithme discret : coûts algorithmiques

- Calcul de b^x : $O(\log x)$ multiplications :
  - $b^{2x} = (b^2)^x$
  - $b^{2x+1} = b^{2x} \times b$
- Calcul de $\log_b(g)$ (méthode générique) : $O(\sqrt{\ell})$ opérations, où ℓ est le plus grand facteur premier de $\sqrt{\ell}$ (restes Chinois + relevé de Hensel + pas de bébés pas de géants) ;
- Calcul de $\log_b(g)$ (en utilisant la structure de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*$ pour travailler sur des bases de facteurs de nombres friables, comme pour les algorithmes de factorisation) : $\exp(p^{1/3})$.

Exponentielle et logarithme discret : coûts algorithmiques

- Calcul de b^x : $O(\log x)$ multiplications :
  - $b^{2x} = (b^2)^x$
  - $b^{2x+1} = b^{2x} \times b$
- Calcul de $\log_b(g)$ (méthode générique) : $O(\sqrt{\ell})$ opérations, où ℓ est le plus grand facteur premier de $\sqrt{\ell}$ (restes Chinois + relevé de Hensel + pas de bébés pas de géants) ;
- Calcul de $\log_b(g)$ (en utilisant la structure de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*$ pour travailler sur des bases de facteurs de nombres friables, comme pour les algorithmes de factorisation) : $\exp(p^{1/3})$.

Échange de clé de Diffie Hellmann et chiffrement El Gamal

Alice et Bob veulent échanger une clé commune via un canal non sécurisé.

- On part de $g \mod p$;
- Alice choisit $a \mod p-1$ et envoie $g^a \mod p$;
- Bob choisit $b \mod p-1$ et envoie $g^b \mod p$;
- Le clé commune est $g^{ab} = (g^a)^b = (g^b)^a \mod p$.

Remarque

Cas particulier d'échange de clé sur les graphes : les noeuds sont les g^i, et on a deux types d'arrêtes : $g^i \mapsto g^{i+1}$ et $g^i \mapsto g^{2i}$.

Chiffrement :

- Clé publique d'Alice : (g, g^a), Clé secrète d'Alice : a.
- Chiffrement : Bob choisit un r aléatoire, et envoie $(g^r, m \times g^{ar})$;
- Déchiffrement : Alice calcule g^{ar} ce qui lui permet de retrouver m.

Remarque

S'étend à n'importe quel groupe cyclique $G = < g >$.

Échange de clé de Diffie Hellmann et chiffrement El Gamal

Alice et Bob veulent échanger une clé commune via un canal non sécurisé.

- On part de $g \mod p$;
- Alice choisit $a \mod p-1$ et envoie $g^a \mod p$;
- Bob choisit $b \mod p-1$ et envoie $g^b \mod p$;
- Le clé commune est $g^{ab}=(g^a)^b=(g^b)^a \mod p$.

Remarque

Cas particulier d'échange de clé sur les graphes : les noeuds sont les g^i, et on a deux types d'arrêtes : $g^i \longmapsto g^{i+1}$ et $g^i \longmapsto g^{2i}$.

Chiffrement :

- Clé publique d'Alice : (g, g^a), Clé secrète d'Alice : a.
- Chiffrement : Bob choisit un r aléatoire, et envoie $(g^r, m \times g^{ar})$;
- Déchiffrement : Alice calcule g^{ar} ce qui lui permet de retrouver m.

Remarque

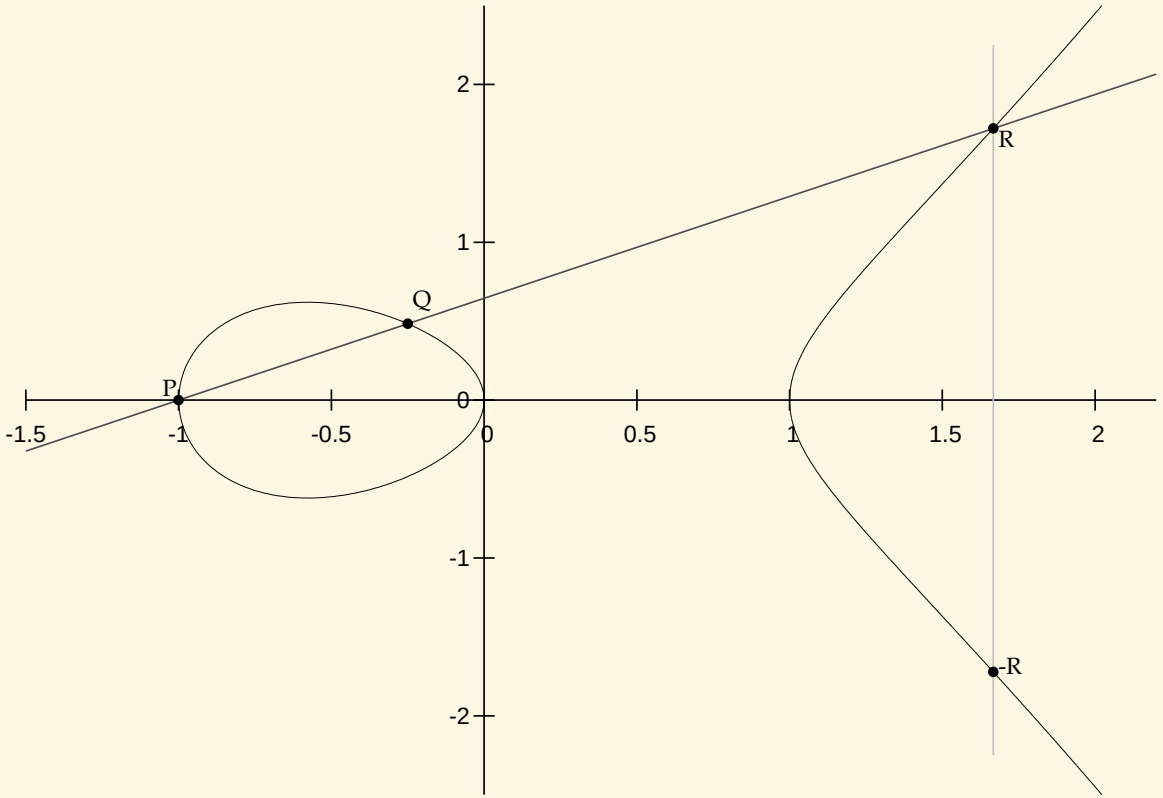
S'étend à n'importe quel groupe cyclique $G=<g>$.

Les courbes elliptiques

Définition ($\mathrm{char}\, k \neq 2,3$)

Une courbe elliptique est une courbe plane d'équation

$$y^2 = x^3 + ax + b \qquad 4a^3 + 27b^2 \neq 0.$$



Exponentiation :

$$(\ell, P) \mapsto \ell P$$

Logarithme discret :

$$(P, \ell P) \mapsto \ell$$

Utilisation des courbes elliptiques

Exemple (ECC 160 bits)

- E courbe elliptique $y^2 = x^3 + x + 333$ sur $\mathbb{F}_{1461501637330902918203684832716283019655932542983}$
- Clé publique :

$$P = (136996248758078877499219958849896155834136208629 6,$$
$$407160203592982096299905031630798490942043935021);$$
$$Q = (695697562436343265984113032286189105569389589 80,$$
$$112620361166019022170844963967766792502441296839 5);$$

- Clé secrète : ℓ tel que $Q = \ell P$.

- Utilisées par la NSA ;
- Utilisées dans les passeports biométriques Européens.
- Plus rapide, compact et puissant (couplages) que RSA.

ECC contre RSA pour 128 bits de sécurité

- ECC (Curve25519) 256 bits :

```
AAAAC3NzaC1lZDI1NTE5AAAAIMoNrNYhU7CY1Xs6v4Nm1V6oRHs/FEE8P+XaZ0PcxPzz
```

- RSA 3248 bits :

```
MIIHRgIBAAKCAZcAvlGW+b5L2tmqb5bUJMrfLHgr2jga/Q/8IJ5QJqeSsB7xLVT/
ODN3KNSPxyjaHmDNdDTwgsikZvPYeyZWWFLP0B0vgwDqQugUGHVfg4c73ZolqZk6
1nA45XZGHUPt98p4+ghPag5JyvAVsf1cF/VlttBHbu/noyIAC4F3tHP81nn+lOnB
eilEALbdmvGTTZ5jcRrt4IDT5a4IeI9yTe0aVdTsUJ6990hpKrVzyTOu1eoxp5eV
KQ7aIX6es9Xjnr8widZunM8rqhBW9EMmLqabnXZItPQoV3rUAnwKzDLV7E56viJk
S2xU5+95IctYu/RTTbf3wTxnkDOqxId0MONHyBJsukXgYKxVB1fWhBKZ4tWui1gw
UCIiKTqLml2zJhLn4WovaxrvvTx0082S0xncEfYDXYu4xbRnJn+ZsTTguqufwC1M
U4MYRdWy7uj+H1EmIGul69Fw9NkuCitWI9dFpcDtSP+/1eEN7wc2FlxhDIRwer0F
6I1P4StWn1uQyHzsTLVdcP+rqA1AsvbWBCKL4ravEO2CEQIDAQABAoIBllWt5YoJ
YZzk4RXbkSX/LvmWICfdmkjTKW6F1w+P4TnotCr0WPG0ObDoANJoUcnbSqNGMgCu
01SF8q9+UuDwZx4KBZm0j8IPOPzJ2nYcK5dYDhyMHzDq1LJ4zJfgPQGQ5WWq2BWm
2RHDhADdTth6YZArs/z9hAqtA9gqMPnMPcdQpIvlsHSOn06zBJD8sJQA+kOxG+Y2
GS8NakLcUVlDpNd/Q+QHkv4AW1ge2EF8QvmKtU/9rekOBqWNm2Tapd6RtAhZwPJX
UhD9yiesTF6rjZ1ZcMGXUaN5Rt0zD3D4zowRz2JLtCe4GkiJmtc3waN6hu1IaIqz
boI11evqnbatqnC4rCq8sf21yZqaLUIbwH4lW2G3K8xMJNh3iy8cgHTYneNYa+/d
7xyNWlMO9SKlHsyaPcWv98BdD+At0x/6R6YPYkeR+qXJ9ETGFKW4U6iNbBQXOMbh
kZb1Ry8vfMH8vsYIzh8Edg6aq00ScU57KiDS/Gc8KuqI6vmf2leCdCa487kVCgw6
cGXQ2bLZGYBiMZFfOOlpCQECgcwA5ZUh3/8yS0duNhsDz3sgC2u40HwHUbxuSOUa
a5t4CoUY9iuF7b7qhBEcvdLgIOiXA5xo+r4p0xgbLvDUTsRR1mrDM2+wRcjjwXcW
pFaMFRl2Rr72yLUC7N0WNcoUshrNL4X/1j8T4WLRcannpXcor+/kn1rwdLEbRCC+
zRTAdJlgMPt4kwJeHtE9Mzw2/O3GX3MeLvzvJklzvpCGw20N/2Yqjs++V5hXoHPs
21y6y6/FV097dvFctf7NahS04JsjubfnjOMx89AUNZsCgcwA1DfabCGJSCkmQ+mg
2q9lDPJz6r29wmBtYyT20oZ2kd4QBHrOp0t59yG4bvdRqcZG/Dr5LjuVDWMPyetV
dksK7hVYQz2B7Nzy7W3waPVrhA0N4fqbIFGxih5QiSFG7/oroZ8PdZDcfVRKroh1
/JJ7rIz/ZBQCLRS5t7/G2B0kBDOMMM+02wR60CTmxUhmgvsoDZWRp5KKha5PSvZa
WAu2CN3mXNK72RLF3RFUvuhNYnkOEj5Oau1RaGgpZoB0JTKYI9nffbe8up+DV8MC
gcwA18be28Ti5FXyg+/IGQ3EBHfucCTiTDQqA2Ew/8pTfK+z0kr9yYISsKXUuaSk
+skghkhPcrugW8LgabH4GT/zGu+lH4btyekSBxeCtFqTtpED1WJOWD2ozi7NXSjd
YrhF+VCcMCWA7ekOqSHjkmT4XMO/wPab4VFEKzgLnHzQlcZB3ke7/4/OHnDScIE7
vWVNeRCdYdRggT+wBX+Y6bxp142Smj8uyu1oDmpmR5ZUCnTdqT4O8K/RT0x4jCeC
CUhGv5rVillO7bS4CdkCgctXvnQwCzmwvVrV744TfTuhu8lTwHnqGWaA/LKU3wW9
T/x9ba1uHFXkaWvRba61LIcDGPsYM4hwTYokqYnfbC2rvOWOf6rtnXlP1An3y6lV
ovQfgDeNiFmIyvnviPPEm0JZA+QnburLYwOx4DgwYvyBnpal8WPo8c3L/J4hkwLm
Pc30DJ0xhUumLevAnCvOcjvgSfw8NenSVfzw+KToDIeKaP0rWfJTUWDAA79vY6tD
UNwRjPNtYIwtSAv+FpRvINko0ZeHamW9H+D1cwKBy2euc93qruYDtFej/biGSA5D
```

Identification par mot de passe

Alice
mot de passe d'Alice BELOTE

BELOTE est envoyé

à Bob
mot de passe de Bob REBELOTE

REBELOTE est envoyé à Alice

Identification par mot de passe

- Alice et Bob doivent convenir d'un mot de passe secret partagé (question secrète)
- Avantage : simple
- Fragilités : risque de réutilisation e.g. par un tiers, gestion de mots de passe

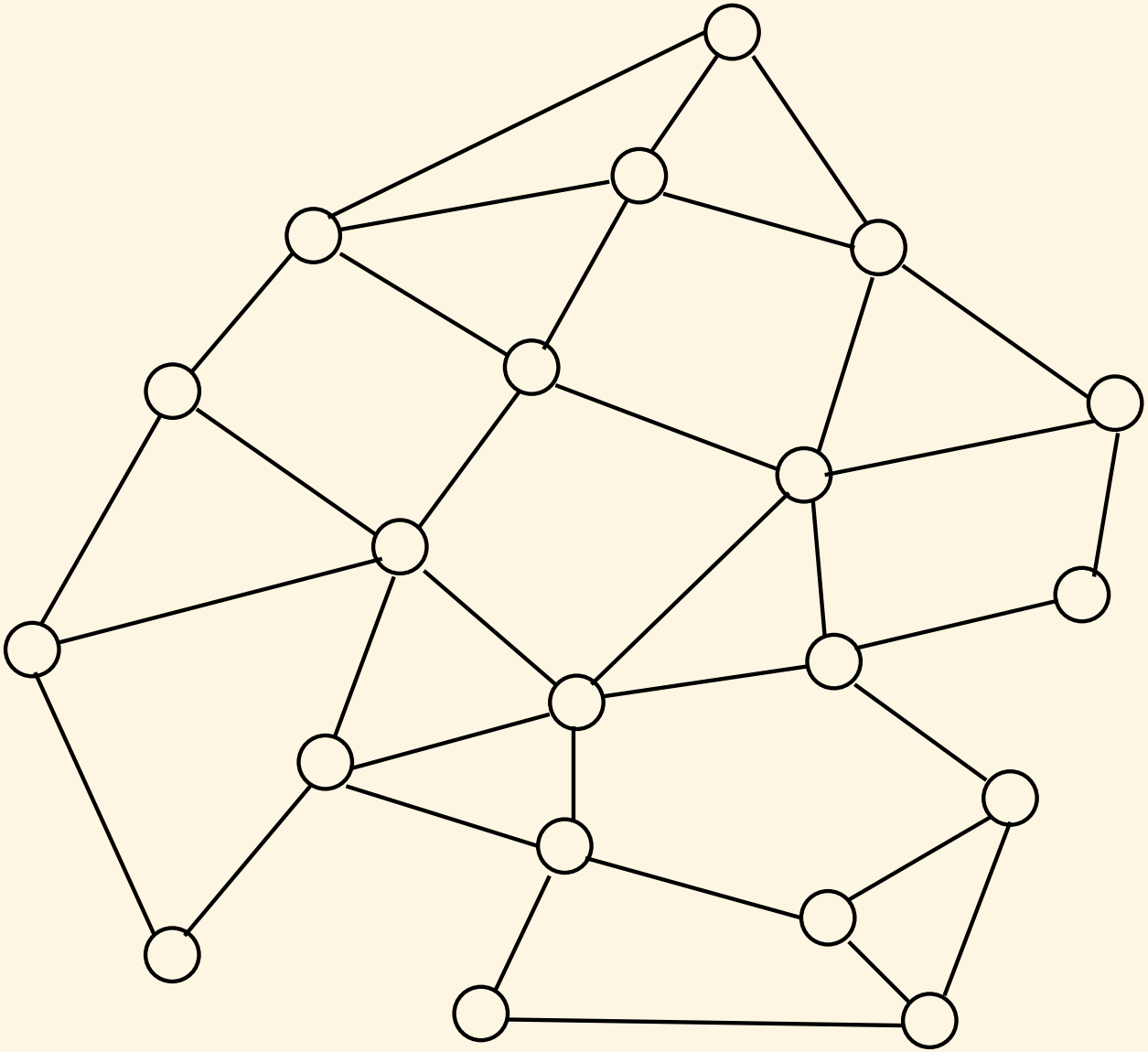
Identification sans divulgation de connaissance

Alice connaît un secret S_{Alice}

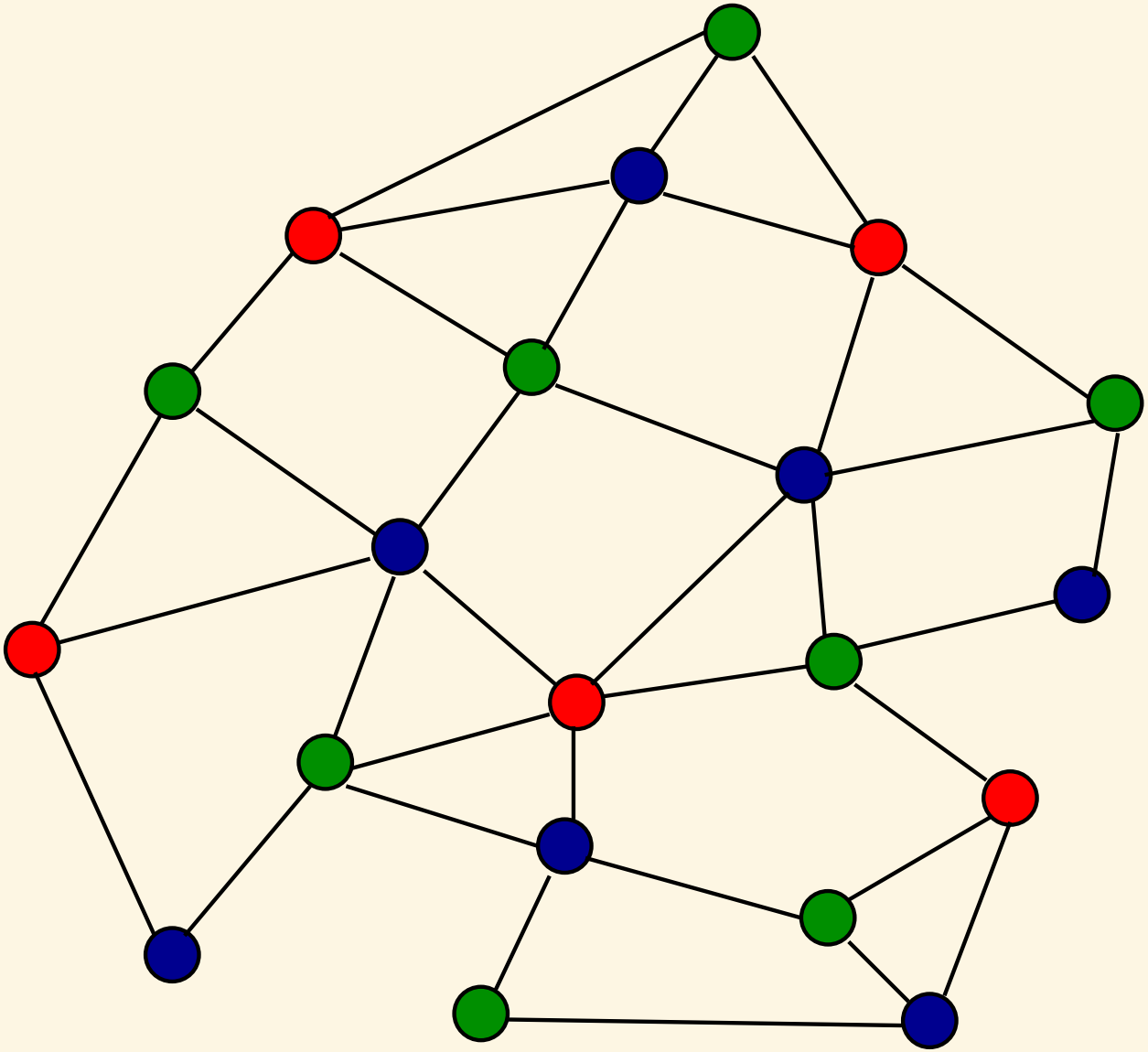
Bob interroge Alice et se convainc qu'elle connaît bien le secret.

À la fin de l'échange, Bob n'a rien appris sur ce secret !

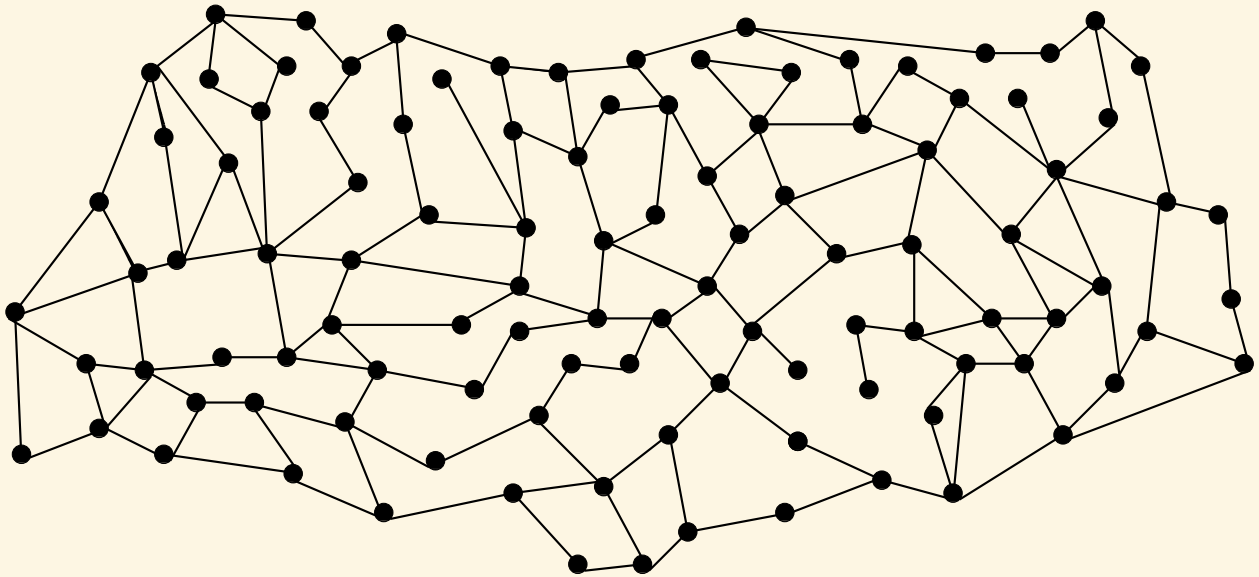
Coloriage de graphe



Coloriage de graphe



Coloriage de graphe

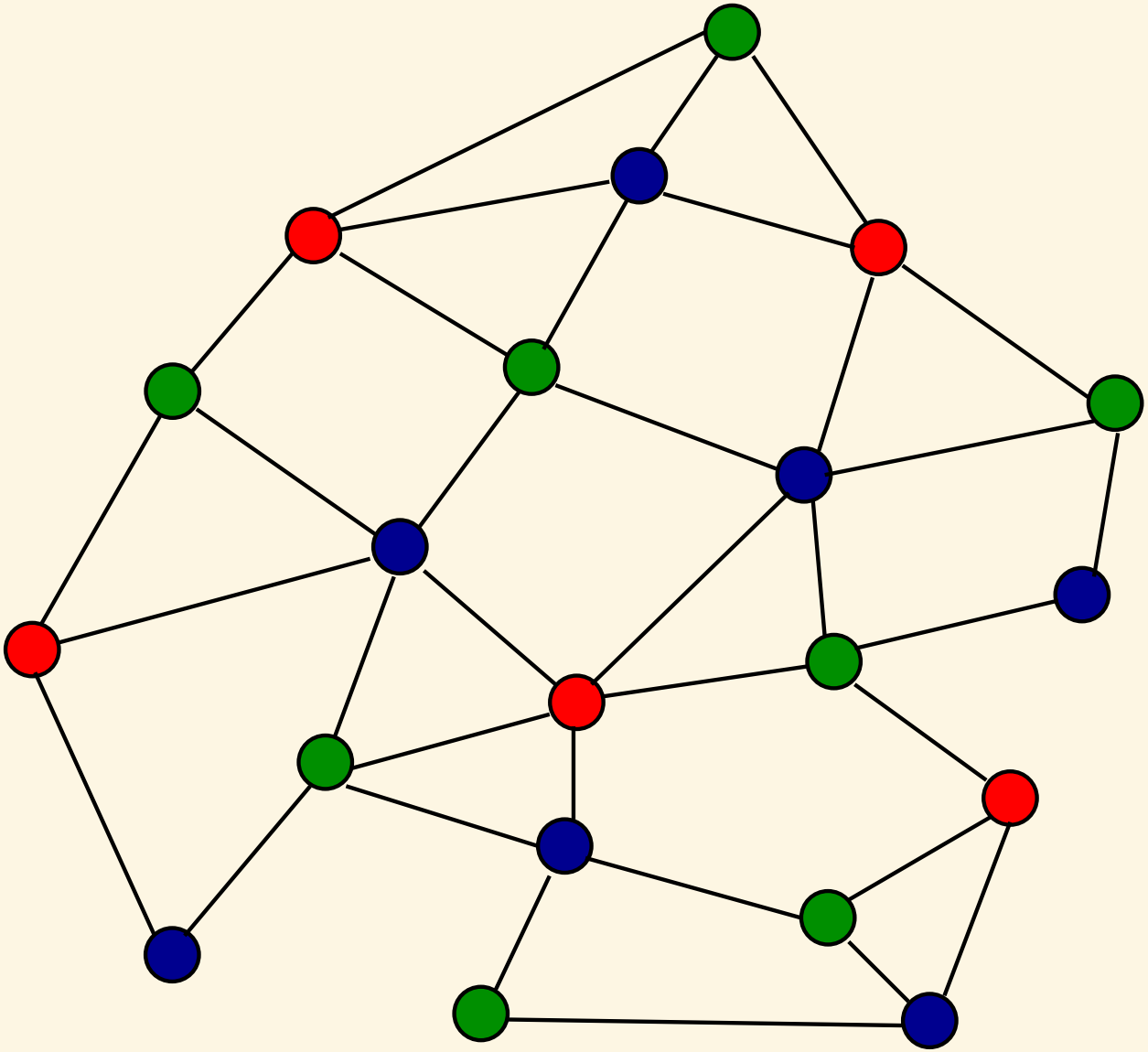


Zero Knowledge Proofs

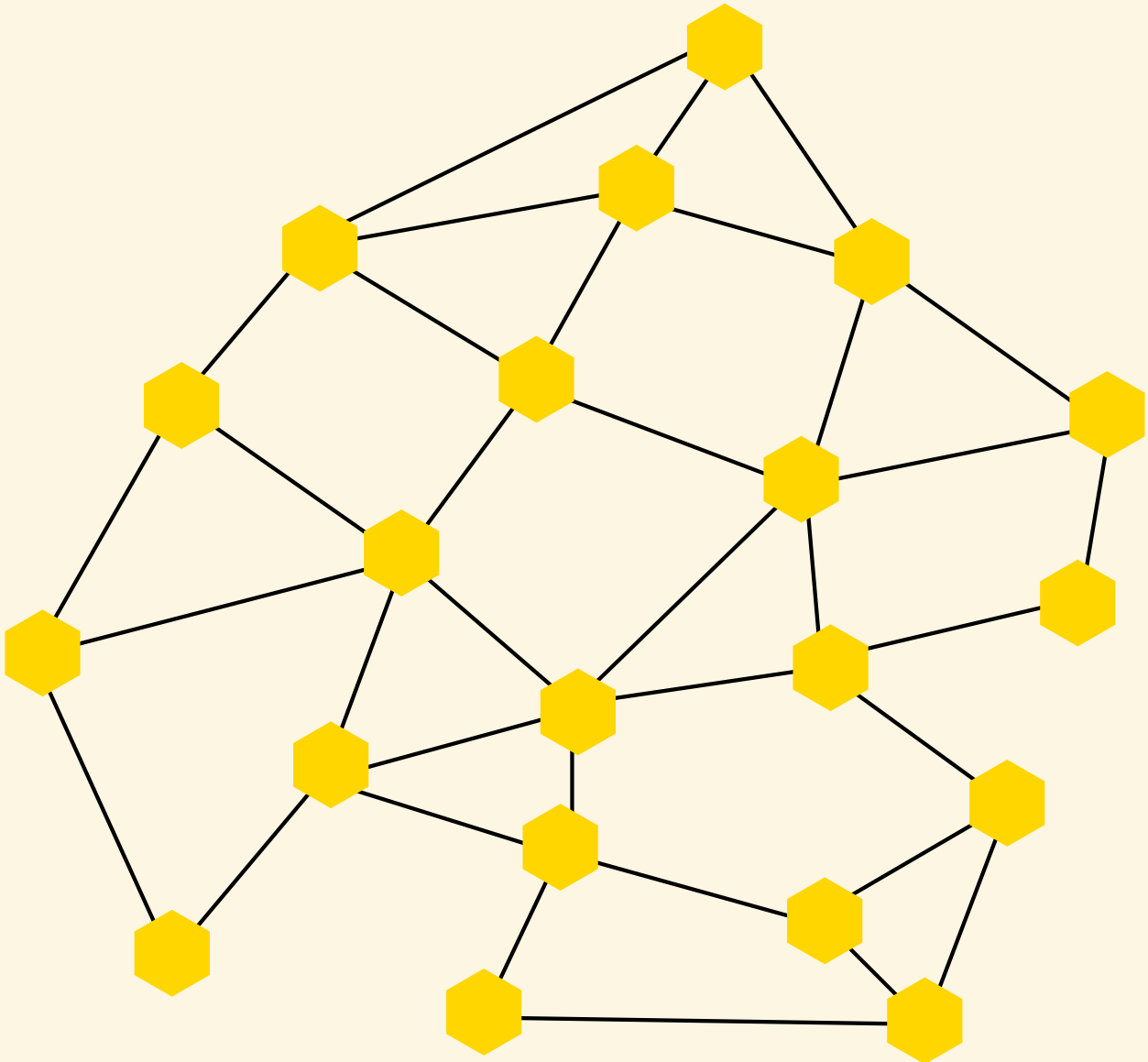
Shafi Goldwasser (1981)

Oded Goldreich (1991)

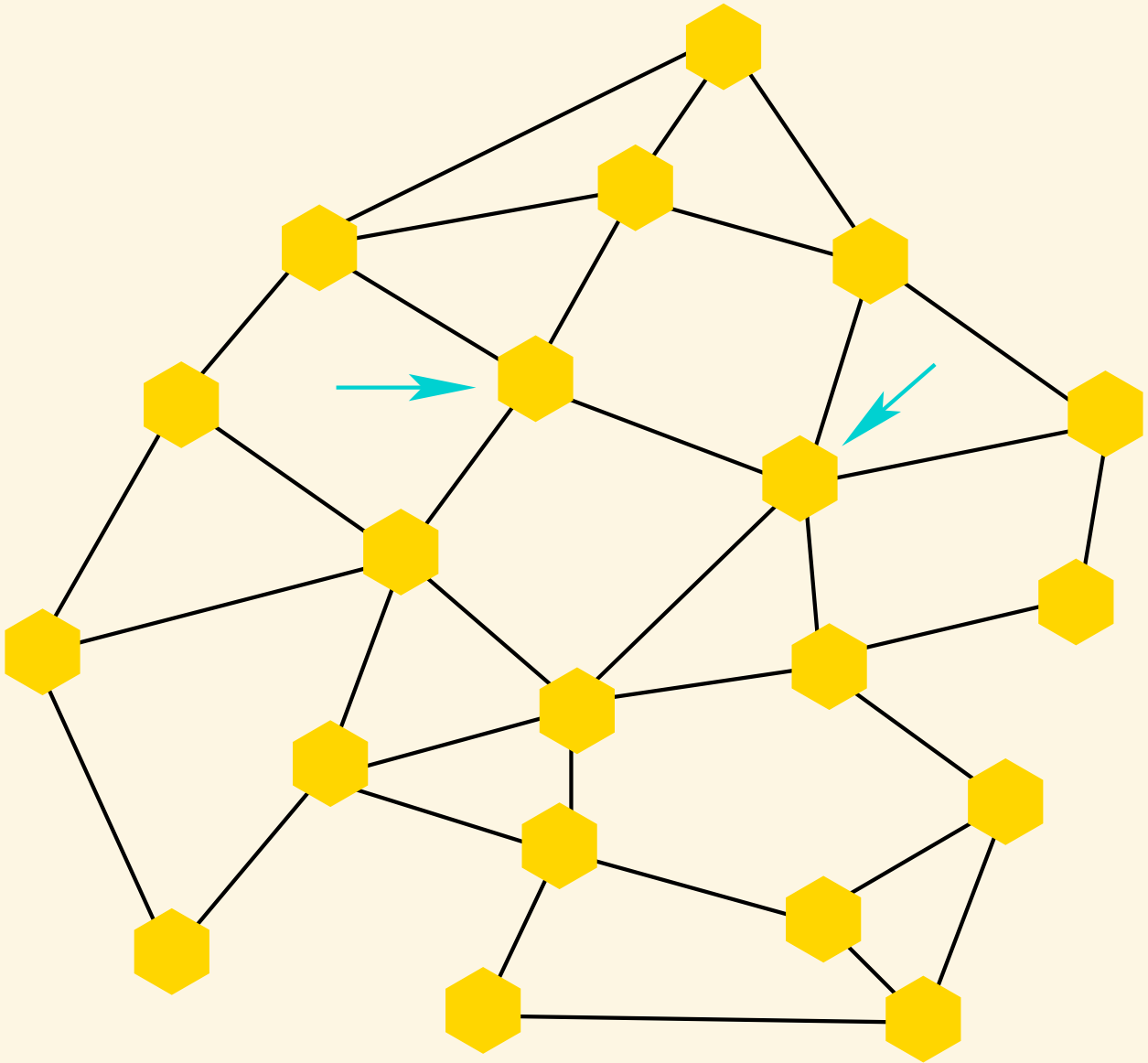
Le coloriage d'Alice (secret)



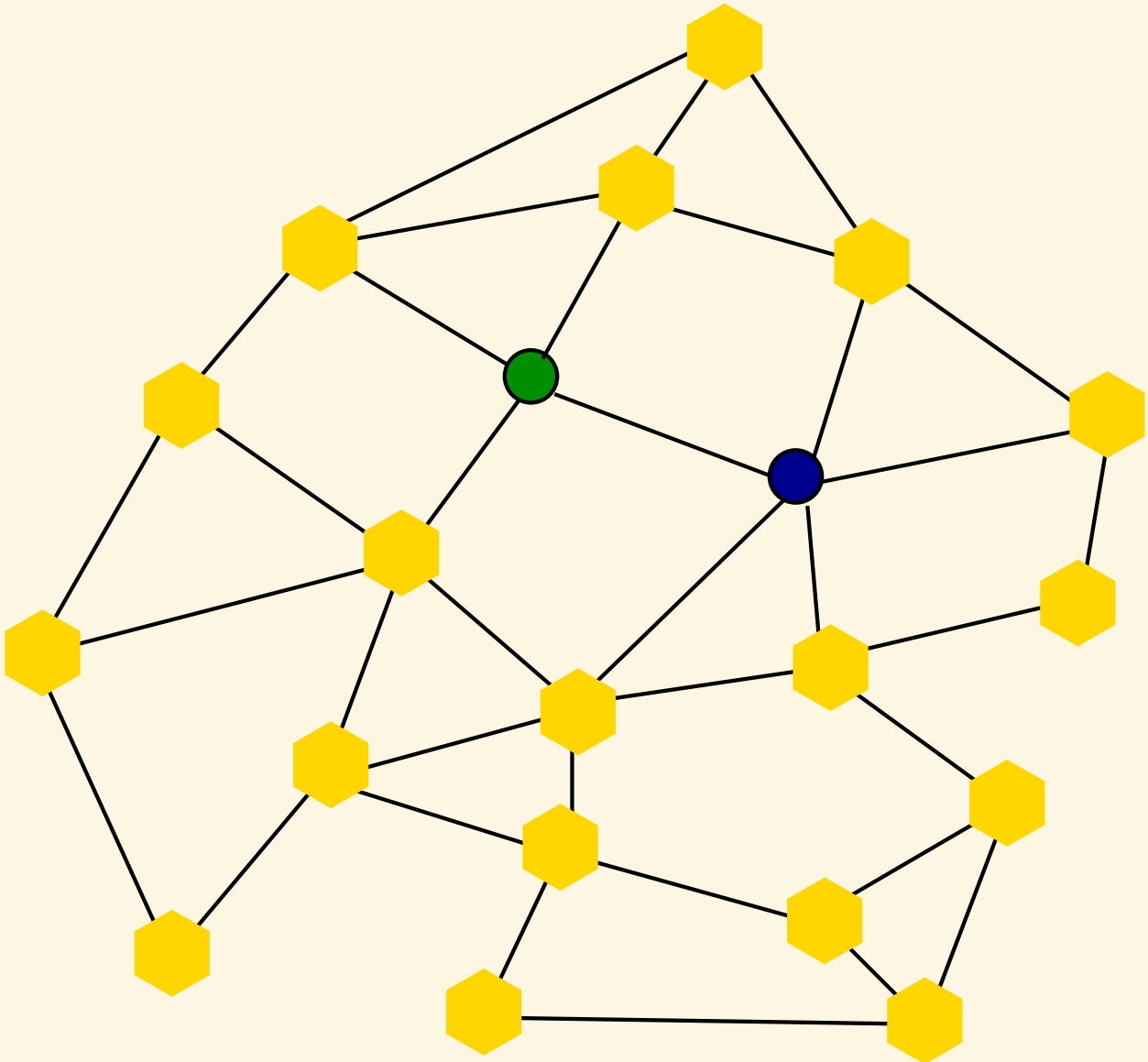
Le coloriage d'Alice caché



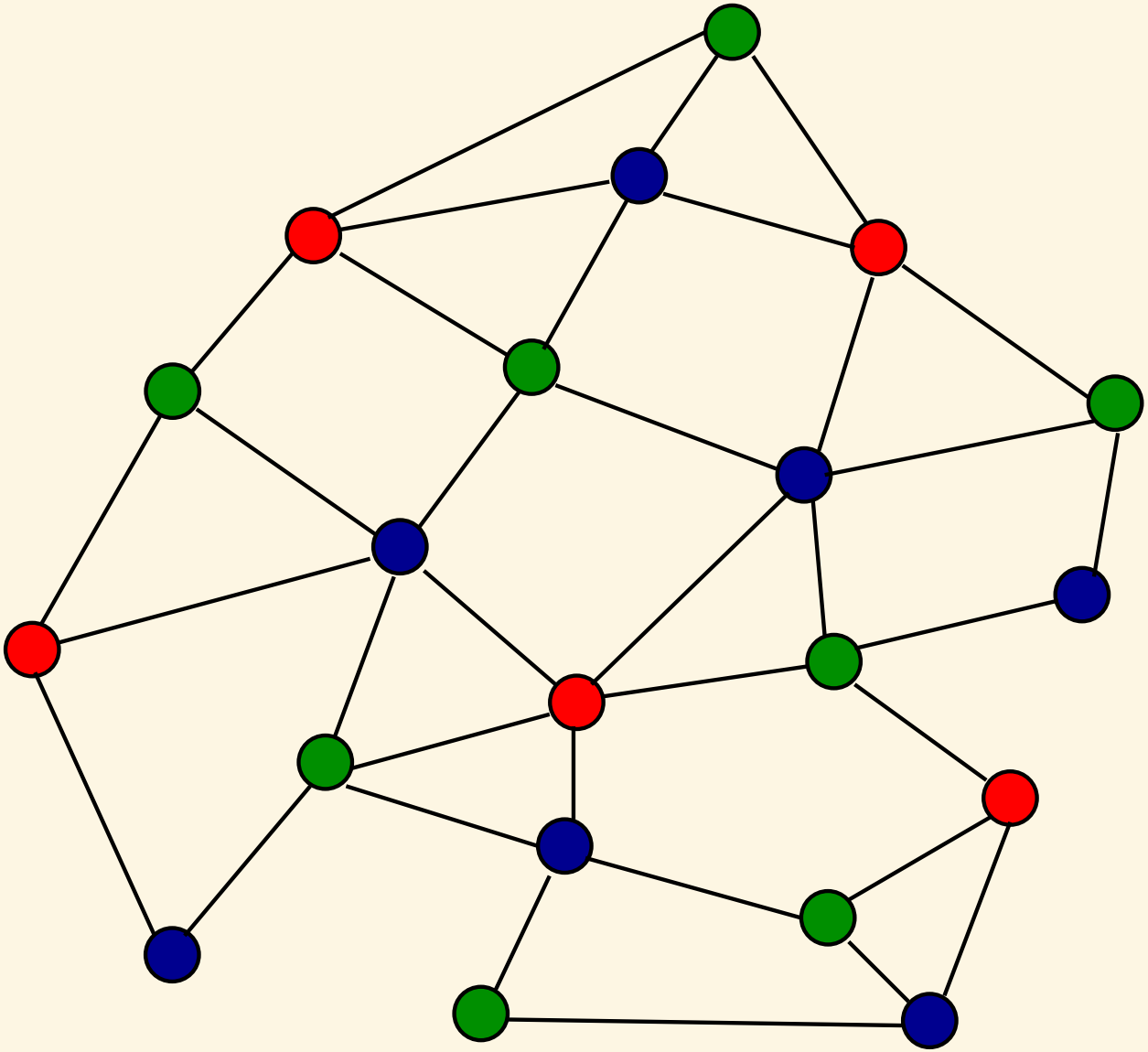
La question de Bob



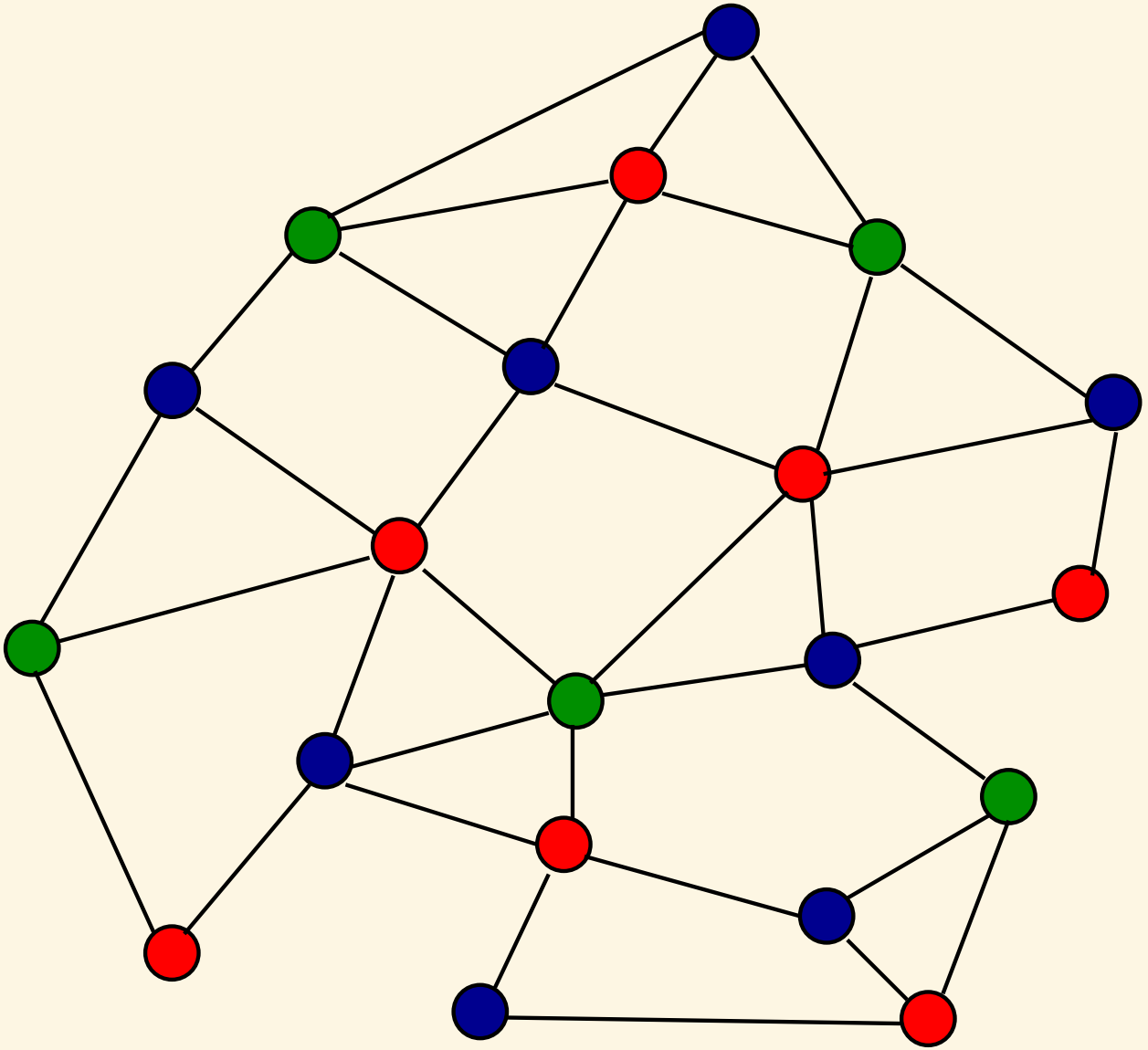
Dévoilement



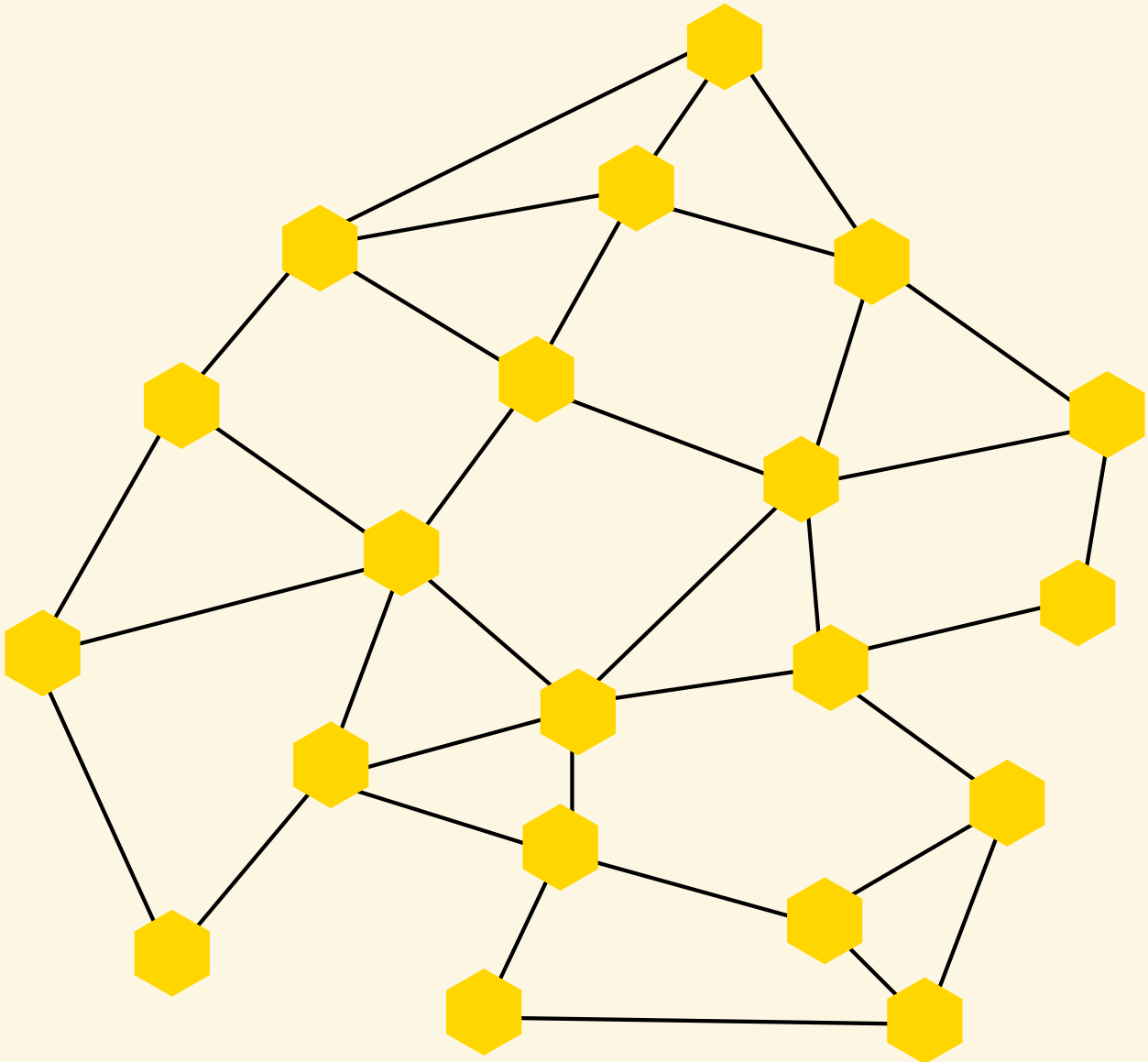
Le coloriage d'Alice (secret)



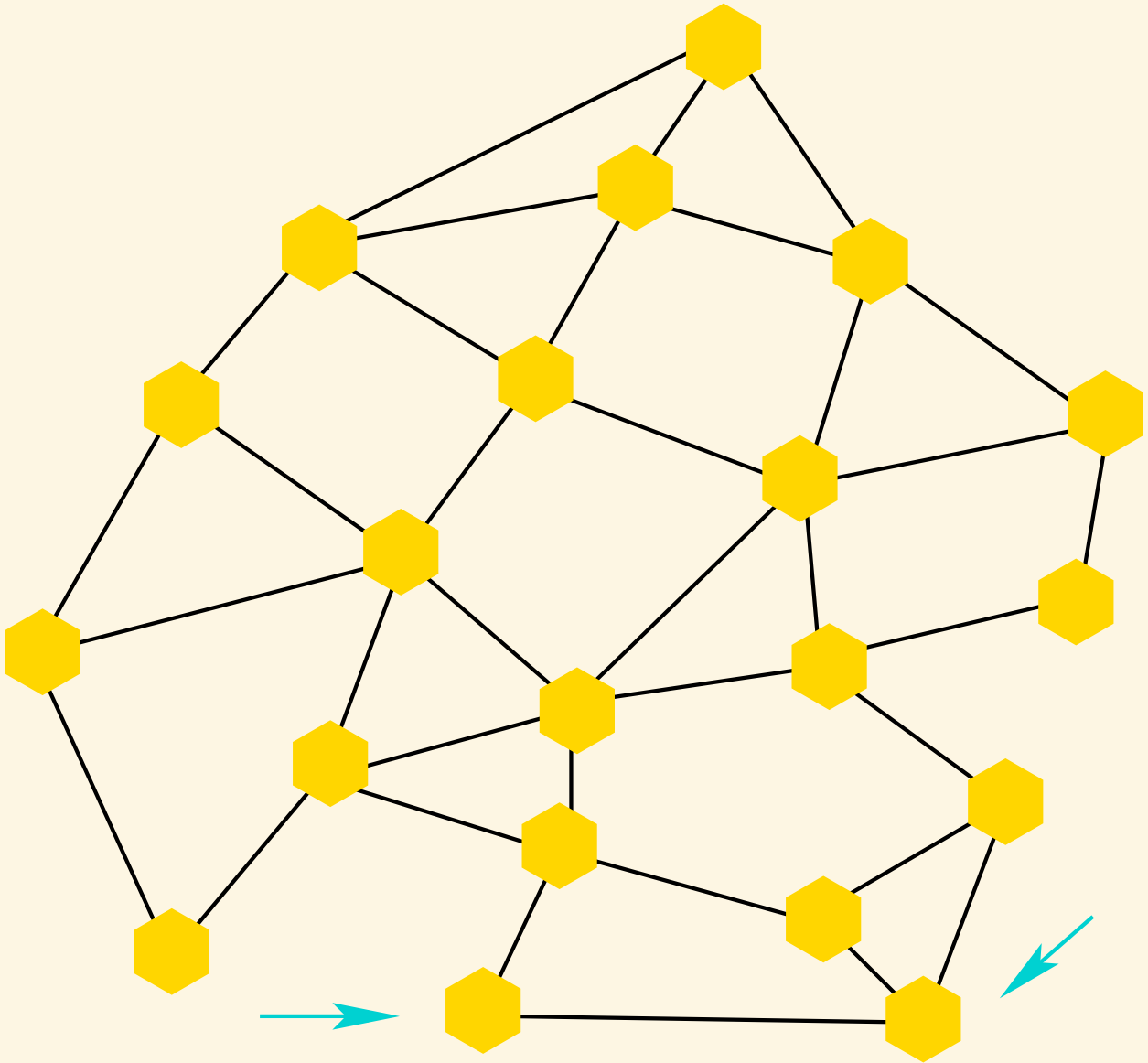
Le coloriage d'Alice permuté



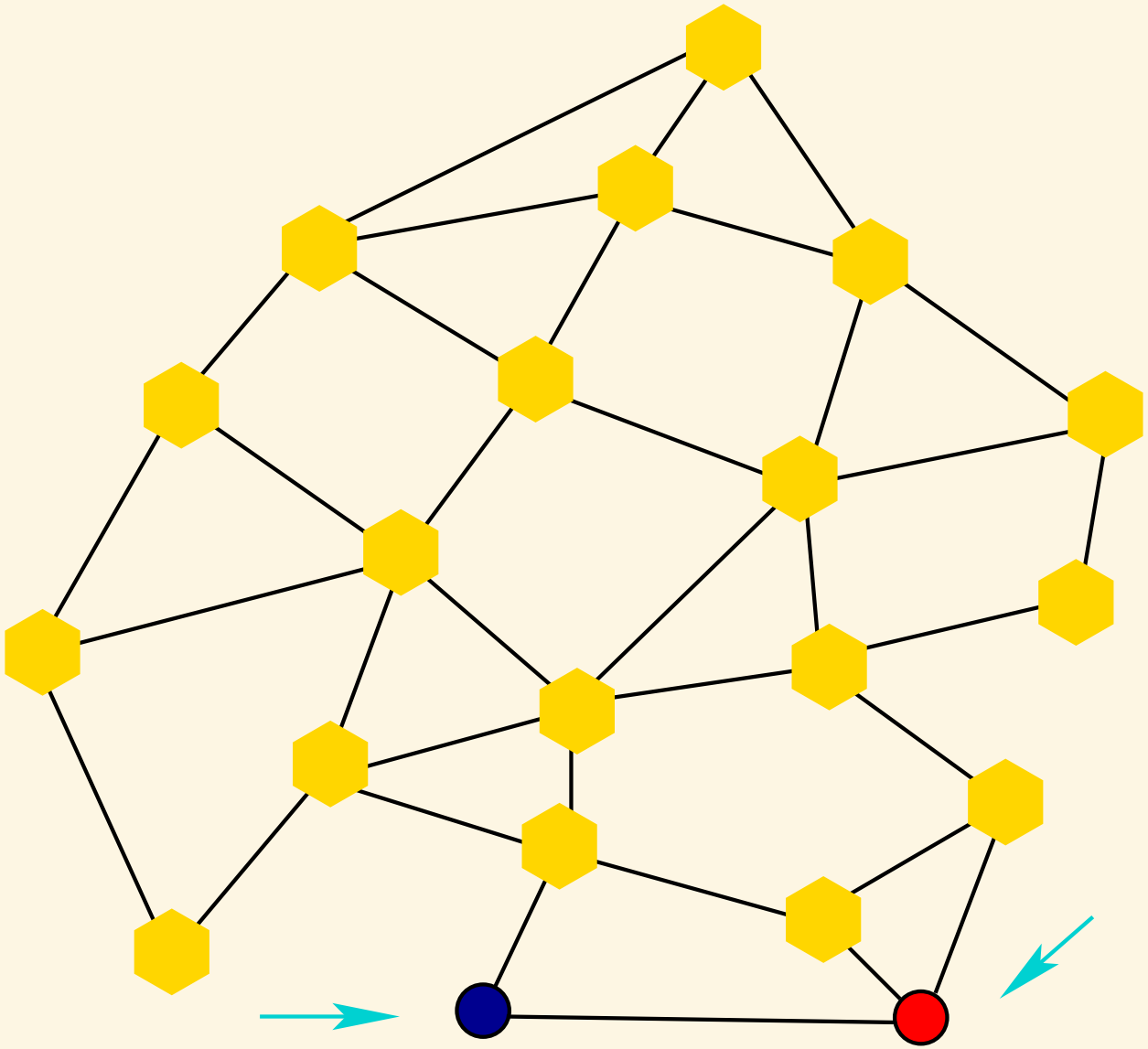
Le coloriage d'Alice caché



La deuxième question de Bob



Dévoilement



Carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

- Soit $p > 2$ un nombre premier. $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*, \times)$ est un groupe cyclique d'ordre $p-1$;
- Il y a $(p-1)/2$ carrés et $(p-1)/2$ non carrés ;
- Si $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*$ alors x est un carré si et seulement si $x^{\frac{p-1}{2}} = 1$.
- Il existe des algorithmes efficaces pour calculer des racines carrés.

Démonstration.

- Comme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps, l'équation $X^2 - a$ a au plus deux solutions. On vérifie qu'il y a deux solutions distinctes si a est un carré (non nul), et 0 sinon. Il y a donc $(p-1)/2$ carrés non nuls. (Plus rapide : $x \to x^2$ est un morphisme du groupe multiplicatif de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et de noyau ± 1.)
- Par le petit théorème de Fermat $x^{p-1} = 1$ pour $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*$. Ainsi, si $y = x^2$ est un carré, $y^{\frac{p-1}{2}} = 1$. Donc les carrés sont solutions de $X^{\frac{p-1}{2}} = 1$, or il y a au plus $(p-1)/2$ solutions, donc toutes les solutions sont des carrés.

□

Carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

- Soit $p > 2$ un nombre premier. $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*, \times)$ est un groupe cyclique d'ordre $p-1$;
- Il y a $(p-1)/2$ carrés et $(p-1)/2$ non carrés ;
- Si $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*$ alors x est un carré si et seulement si $x^{\frac{p-1}{2}} = 1$.
- Il existe des algorithmes efficaces pour calculer des racines carrés.

Démonstration.

- Comme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps, l'équation $X^2 - a$ a au plus deux solutions. On vérifie qu'il y a deux solutions distinctes si a est un carré (non nul), et 0 sinon. Il y a donc $(p-1)/2$ carrés non nuls. (Plus rapide : $x \to x^2$ est un morphisme du groupe multiplicatif de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et de noyau ± 1.)
- Par le petit théorème de Fermat $x^{p-1} = 1$ pour $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*$. Ainsi, si $y = x^2$ est un carré, $y^{\frac{p-1}{2}} = 1$. Donc les carrés sont solutions de $X^{\frac{p-1}{2}} = 1$, or il y a au plus $(p-1)/2$ solutions, donc toutes les solutions sont des carrés.

□

Symbole de Legendre

- Symbole de Legendre :

$$\left(\frac{x}{p}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \bmod p \\ 1 & \text{si } x \text{ est un carré} \\ -1 & \text{si } x \text{ n'est pas un carré} \end{cases}$$

- $\left(\frac{x}{p}\right) = x^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$;
- Multiplicativité : $\left(\frac{xy}{p}\right) = \left(\frac{x}{p}\right)\left(\frac{y}{p}\right)$;
- Réciprocité quadratique (p, q premiers > 2) :

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}.$$

Carrés dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

- Soit $n = pq$ un nombre RSA, par le théorème chinois :

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^*, \times) = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^*, \times);$$

- Il y a donc 4 racines carrés de -1 : qui correspondent via l'isomorphisme à

$$(1,1), (-1,-1), (1,-1), (-1,1).$$

- Si on connaît la factorisation de n, on peut calculer des racines carrés en ce ramenant aux racines carrés modulo p et modulo q.
- Réciproquement, savoir calculer des racines carrés permet de factoriser n. (Preuve : si x_1 et x_2 sont deux racines carrés de y, alors il y a une chance sur deux que le pgcd de $x_1 - x_2$ et de n donne p ou q).

Symbole de Jacobi

- Symbole de Jacobi : si n est impair, le symbole de Jacobi est l'extension du symbole de Legendre par multiplicativité de l'argument du bas :

$$\left(\frac{x}{n_1 n_2}\right)=\left(\frac{x}{n_1}\right)\left(\frac{x}{n_2}\right);$$

- Réciprocité quadratique générale :

$$\left(\frac{m}{n}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n}{m}\right) \quad (m \text{ et } n \text{ impairs et premiers})$$

avec les équations supplémentaires $\left(\frac{-1}{n}\right)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}$, $\left(\frac{2}{n}\right)=(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$;

$\Rightarrow$ Le symbole de Jacobi peut être calculé en temps polynomial ;

- Test de primalité : si $\left(\frac{x}{n}\right)\neq x^{\frac{n-1}{2}}$ alors n n'est pas premier (et réciproquement si n n'est pas premier alors au moins la moitié des x premiers à n seront des témoins de non primalité).

Pile ou face

- Soit $n = pq$ un nombre RSA, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^*, \times) = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^*, \times)$;
- $\left(\frac{x}{n}\right) = \left(\frac{x}{p}\right)\left(\frac{x}{q}\right)$ donc si x est premier à n, $\left(\frac{x}{n}\right) = 1$ quand x est un carré modulo n (=carré modulo p et carré modulo q) ou quand x n'est un carré ni modulo p ni modulo q ;
- Calcul de $\left(\frac{x}{n}\right)$: temps polynomial ;
- Décider si x est un vrai carré (et calculer la racine carré) ou un faux carré : factorisation de n
- $x \longmapsto x^2$ est une fonction à sens unique !

Pile ou face :

- Bob choisit $n = pq$ et envoie x tel que $\left(\frac{x}{n}\right) = 1$;
- Alice répond "vrai carré" ou "faux carré" ;
- Bob envoie p et q pour qu'Alice puisse vérifier si elle avait raison ou non.

Identification sans divulgation d'informations

- Clé secrète d'Alice : p, q, s mod $n = pq$;
- Clé publique d'Alice : $n = pq$, $r = s^2$;

Identification Zero Knowledge :

- Alice choisit u mod n aléatoirement, calcule $z = u^2$ et envoie $t = zr = u^2 s^2$ à Bob ;
- Bob choisit soit
  - De vérifier z : il demande u à Alice et vérifie que $z = u^2$;
  - De vérifier t : il demande us à Alice et vérifie que $t = (us)^2$.
- Un usurpateur va produire soit un faux u soit un faux t et a une chance sur deux de se faire attraper.
- Bob va demander plusieurs tours de vérification (par exemple 30) Si Alice donne toujours la bonne réponse, soit elle connaît le secret, soit elle est très chanceuse (probabilité $1/2^{30}$).

Identification sans divulgation d'informations

- Clé secrète d'Alice : p, q, s mod $n = pq$;
- Clé publique d'Alice : $n = pq$, $r = s^2$;

Identification Zero Knowledge :

- Alice choisit u mod n aléatoirement, calcule $z = u^2$ et envoie $t = zr = u^2 s^2$ à Bob ;
- Bob choisit soit
  - De vérifier z : il demande u à Alice et vérifie que $z = u^2$;
  - De vérifier t : il demande us à Alice et vérifie que $t = (us)^2$.
- Un usurpateur va produire soit un faux u soit un faux t et a une chance sur deux de se faire attraper.
- Bob va demander plusieurs tours de vérification (par exemple 30) Si Alice donne toujours la bonne réponse, soit elle connaît le secret, soit elle est très chanceuse (probabilité $1/2^{30}$).

Algorithmes quantiques : calcul de période

Période

Soit $f : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to X$ une fonction périodique de période r. But : trouver r.

Algorithme classique pour trouver r : $O(N)$. Algorithme quantique : $O(\log N^2)$.

Démonstration.

- Transformée de Fourier rapide quantique pour calculer $\hat{f}$ (en supperposition)
- Une mesure de l'état de $\hat{f}$ donne un multiple $\lambda . r$
- On recommence pour trouver différents multiples $\lambda_i . r$, puis on prend leur pgcd ; avec une grande probabilité on trouve r.

□

- Application : factorisation en temps polynomial.
- Preuve : si $x \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$, et que son ordre est k (pair), alors $x^{k/2}$ est une racine carré de x, donc on peut calculer des racines carrés en temps polynomial, donc factoriser N en temps polynomial.

Algorithmes quantiques : calcul de période

Période

Soit $f : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to X$ une fonction périodique de période r. But : trouver r.

Algorithme classique pour trouver r : $O(N)$. Algorithme quantique : $O(\log N^2)$.

Démonstration.

- Transformée de Fourier rapide quantique pour calculer $\hat{f}$ (en supperposition)
- Une mesure de l'état de $\hat{f}$ donne un multiple $\lambda . r$
- On recommence pour trouver différents multiples $\lambda_i . r$, puis on prend leur pgcd ; avec une grande probabilité on trouve r.

□

- Application : factorisation en temps polynomial.
- Preuve : si $x \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$, et que son ordre est k (pair), alors $x^{k/2}$ est une racine carré de x, donc on peut calculer des racines carrés en temps polynomial, donc factoriser N en temps polynomial.

Algorithmes quantiques : le sous-groupe caché

- Généralisation : le problème du sous-groupe caché :

$$f : G \to X$$

But : retrouver le plus grand sous-groupe H tel que

$$f : G \to G/H \to X$$

- Algorithme quantique pour résoudre le HSP sur un groupe abélien fini en temps polynomial. (Si G est cyclique il s'agit de trouver une période, pour un groupe abélien celà revient à trouver plusieurs périodes indépendantes.)
- Utilise la transformée de Fourier (rapide) multidimensionnelle ($\hat{G}$: groupe des caractères de G).
- Casse le logarithme discret : si $h = g^x$, alors $(n, m) \mapsto h^n g^{-m}$ a pour périodes $<(1, x)>$.

Étendre l'échange de clé de Diffie-Helmann

- Si G est un groupe abélien agissant sur X.
- On fixe un point base $x \in X$.
- Alice choisit un secret $a \in G$ et envoie $a.x$;
- Bob choisit un secret $b \in G$ et envoie $b.x$;
- La clé commune est $ab.x = ba.x \in X$.

Exemple

Échange de clé sur le graphe de Cayley d'un groupe abélien.

Algorithmes quantiques : le problème du décalage caché

- G agit sur X, f, g deux fonctions $X \to Y$ telles que

$$\exists s \in G \mid \forall x \in X, f(x) = g(s.x).$$

- But : retrouver s.

- Algorithme quantique polynomial si G est cyclique ;
- Algorithme quantique sous-exponentiel si G est abélien ;
- Pas d'algorithmes sous-exponentiels connus si G n'est pas abélien ;

$\Rightarrow$ Échange de clé post-quantique : Graphe d'isogénies de courbes elliptiques supersingulières.

- Le graphe correspondant est un graphe de Ramanujan sur lequel agit un groupoïde non commutatif.