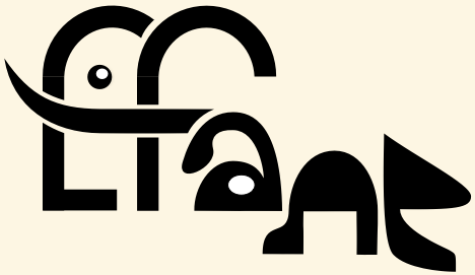
À quoi sert la cryptologie ? — Petit panorama des mathématiques de la cryptologie

2018/05/18 — Inria Alkindi, Bordeaux

Damien Robert

Équipe LFANT, Inria Bordeaux Sud-Ouest



Cryptologie à clé publique

Cryptologie :

- Chiffrement ;
- Authenticité ;
- Intégrité.

Applications :

- Militaires ;
- Vie privée ;
- Communications (internet, téléphones…)
- Commerce électronique…

Contexte Historique

- Riche histoire ; chiffrement de messages depuis l'antiquité au moins ;
- Principale application auparavant militaire ;
- Dorénavant la cryptologie joue un rôle essentiel pour garantir la sécurité des communications ;
- Cryptanalyse : déchiffrement d'Énigma par le groupe Ultra (Secret) à Blentchey Park lors de la seconde guerre mondiale ;
- À la fin de la guerre, vente des machines Énigma capturées par les alliés à d'autres pays.

Protocoles cryptographiques

- Briques de base (primitives), s'appuyant sur des objets mathématiques
- Ces primitives sont combinées pour former des algorithmes/modes opératoires (algorithme de chiffrement, algorithme de signature)
- Ces modes opératoires sont combinés pour former des protocoles (protocole de session TLS, protocole de vote)
- Ces protocoles sont implémentés en logiciel ou matériel
- Puis ils sont utilisés.

Example : De RSA à un algorithme de chiffrement

- RSA permet de chiffrer un message m d'une certaine taille k : $m \longmapsto E(m)$;
- Comment chiffrer un message de longueur arbitraire ?
- Idée naturelle : découper m en messages $m_1 \| m_2 \ldots \| m_d$ de taille k, et poser $E(m) = E(m_1) \| E(m_2) \ldots \| E(m_d)$;
- Problème : RSA est malléable. $E(m \times m') = E(m) \times E(m')$.

$\Rightarrow$ A partir de plusieurs chiffrés on peut en produire plein d'autres ;

- La solution est de chiffrer les blocs m_i avec du padding : $E(m_i \oplus G(r) \| r \oplus H(m_i \oplus G(r))$ où r est aléatoire et H et G sont deux fonctions de hachage (on a une preuve de sécurité).

Example : De RSA à un algorithme de chiffrement

- RSA permet de chiffrer un message m d'une certaine taille k : $m \longmapsto E(m)$;
- Comment chiffrer un message de longueur arbitraire ?
- Idée naturelle : découper m en messages $m_1 \| m_2 \ldots \| m_d$ de taille k, et poser $E(m) = E(m_1) \| E(m_2) \ldots \| E(m_d)$;
- Problème : RSA est malléable. $E(m \times m') = E(m) \times E(m')$.

$\Rightarrow$ A partir de plusieurs chiffrés on peut en produire plein d'autres ;

- La solution est de chiffrer les blocs m_i avec du padding : $E(m_i \oplus G(r) \| r \oplus H(m_i \oplus G(r))$ où r est aléatoire et H et G sont deux fonctions de hachage (on a une preuve de sécurité).

Example : intégrité et chiffrement

- Comment combiner les deux briques de base que sont le chiffrement (Encrypt) et l'intégrité (MAC Message Authentification Code) ;
- Encrypt then MAC ?
- MAC then Encrypt ?
- Encrypt + Mac ?

Example : intégrité et chiffrement

- Comment combiner les deux briques de base que sont le chiffrement (Encrypt) et l'intégrité (MAC Message Authentification Code) ;
- Encrypt then MAC ?
- MAC then Encrypt ?
- Encrypt + Mac ?

Attaques

- Attaques sur les briques de base (très rare) ;
- Attaques sur l'empilement des briques en algorithmes ou protocoles ;
- Attaques sur l'implémentation ;
- Attaques sur l'exécution.

Sécurité

- Briques de base : repose sur des problèmes mathématiques bien identifiés et très étudiés (difficulté de la factorisation, logarithme discret dans les courbes elliptiques)
- Preuves de sécurité sur les algorithmes et protocoles : si un attaquant peut attaquer le protocole (avec une certaine probabilité p en temps T), alors il peut attaquer une brique de base (avec une certaine probabilité p' en temps T')

Sécurité ?

- Erreur dans les preuves
- Preuves justes mais modèle incorrect
- Modèle correct mais utilisé dans un autre contexte
- Réductions de sécurités inefficaces
- Bugs dans les programmes
- Attaques physiques (par canaux cachés) : mesure des impulsions électromagnétiques, du bruit, du temps de calcul, des cache miss

Attaques sur TLS

SSL (Secure Sockets Layer) / TLS (Transport Layer Security)

- Protocole : Renegociation attack / Version rollback attack
- BEAST (attaque sur le mode Cipher Block Chaining)
- CRIME and BREACH (attaque sur la compression)
- Downgrade attack : FREAK (export grade cryptography), Logjam (gros précalculs)
- Bugs : Heartbleed (buffer overflow), BERserk, goto fail
- Certificats mal formés

Mitiger la perte des clés privées : perfect foward secrecy via un échange de clés éphémères par Diffie-Hellman .

Sécurité !

Preuves formelles

- Des protocoles
- Des implémentations
- Des compilateurs (voir « Reflections on Trusting Trust» de Ken Thomson)
- Du matériel

Implémentation

- En temps constant ;
- Sans branches ;
- Faites par des experts (librairies opensource comme NaCl)

Ne jamais concevoir son propre système cryptographique ad hoc ou sa propre implémentation à moins d'être un expert.

Quelques applications cryptographiques modernes

- Chiffrement de groupe ;
- Mise en gage ;
- Partage de secret ;
- Preuves sans divulgation de connaissance ;
- Certificats anonymes ;
- Transfert inconscient ;
- Signature de cercle ;
- Calcul multipartite sécurisé ;
- Chiffrement fonctionnel ;
- Obfuscation ;

Applications cryptographiques : Bitcoin

- Monnaie électronique décentralisée
- Fichier de transaction public (blockchain)
- Signature des transactions par une courbe elliptique
- La vérification de la blockchain (et validation des nouvelles transactions) fabrique de nouveaux bitcoins.

Applications cryptographiques : Vote électronique Belenios

- Confidentialité du vote (partage de secret)
- Résultats corrects (preuves Zero-Knowledge)
- Validation (et confidentialité) de la liste des électeurs

L'essor du cloud computing

- Chiffrement homomorphe : l'utilisateur fournit au nuage un message chiffré $f_K(m)$ et un programme P, et le nuage renvoie $f_K(P(m))$.
  Le nuage n'a rien appris sur la donnée m, ni sur le résultat !
- L'utilisateur fournit au nuage un message chiffré $f_K(m)$ et le chiffrement $f_K(P)$ d'un programme P, et le nuage renvoie $f_K(P(m))$.
  Le nuage ne sait pas ce qu'il a calculé !

$\Rightarrow$ Une version faible utilise les couplages de courbes elliptiques ;

$\Rightarrow$ La version complète utilise des réseaux, en particulier des réseaux d'idéaux dans des corps de nombres ;

☹ Encore très lent.

Cryptographie post-quantique

- RSA (basé sur la factorisation) et les courbes elliptiques sont vulnérables aux ordinateurs quantiques ;
- Problématique pour des secrets à très long terme (50 ans) : secrets défense
- Conception de nouveaux protocoles résistant aux ordinateurs quantiques
- Diffie-Helmann : échange de clé par des opérations dans un groupe.
  Diffie-Helmann post-quantique : échange de clé par des opérations dans un graphe.

Chiffrement

Alice (Sophie Germain) 

veut écrire

à Bob (Carl Friedrich Gauss)

Chiffrement à clé secrète

Alice 

m=QUARTIQUE

clé secrète de chiffrement $K = +3$

$c = f_K(m)$

c =TXDUWLTXH est envoyé

à Bob 

c =TXDUWLTXH

clé secrète de déchiffrement $K' = -K = -3$

$m = f_K{}^{(-1)}(c) = f_{K'}(c)$

Chiffrement à clé secrète

Alice 

m=QUARTIQUE

clé secrète de chiffrement $K = +3$

$c = f_K(m)$

c =TXDUWLTXH est envoyé

à Bob

c =TXDUWLTXH

clé secrète de déchiffrement $K' = -K = -3$

$m = f_K{}^{(-1)}(c) = f_{K'}(c)$

Chiffrement à clé secrète

Alice 

m=QUARTIQUE

clé secrète de chiffrement $K = +3$

$c = f_K(m)$

c =TXDUWLTXH est envoyé

à Bob 

c =TXDUWLTXH

clé secrète de déchiffrement $K' = -K = -3$

$m = f_K{}^{(-1)}(c) = f_{K'}(c)$

Chiffrement à clé secrète

- Trois étapes : création et distribution de clés, chiffrement, déchiffrement
- Boîte mail, consultation de compte en banque, ...
- Avantages : simple, rapide, bien connu
- Fragilités : attaques statistiques, gestion de clés

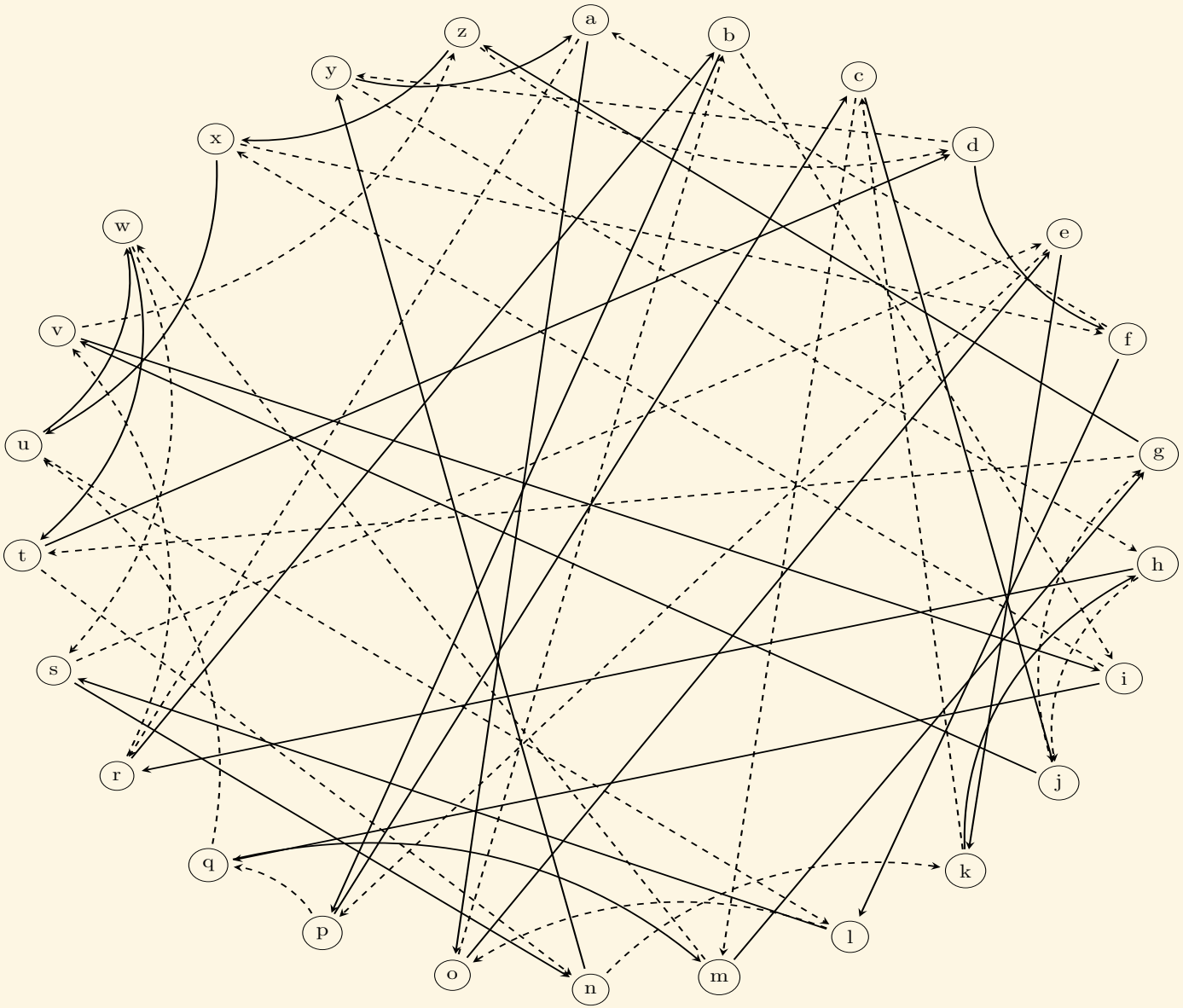
- Le chiffrement de Vernam (One Time Pad) est inconditionnellement sûr, quelle que soit la puissance de calcul de l'adversaire (Attention : nécessite une clé secrète de même taille que le message envoyé) ;
- Notion de théorie de l'information (Shannon) ;
- Très compliqué et coûteux à mettre en place correctement.

Comment transmettre la clé secrète de manière sécurisée ?

Échange de clé

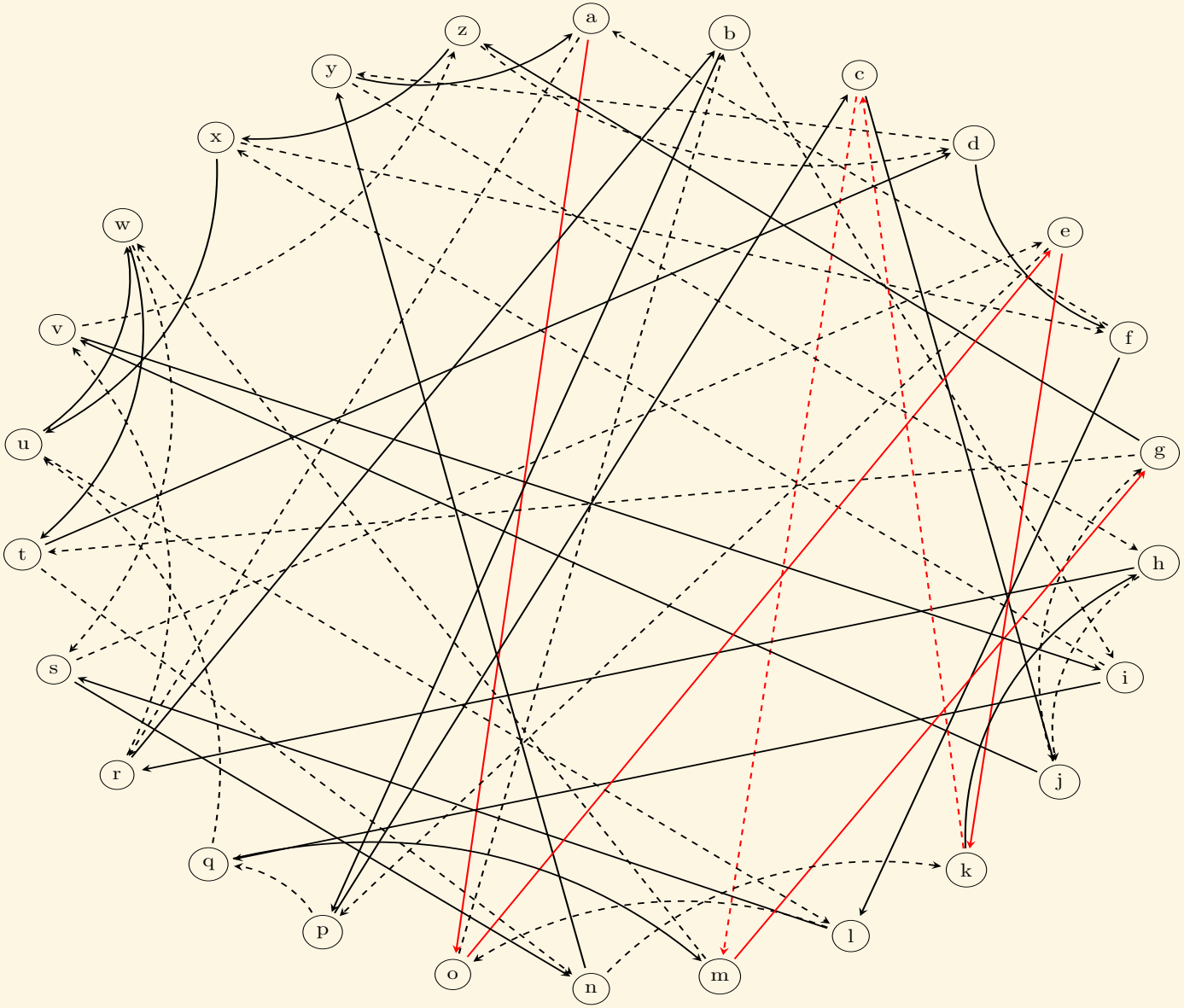
- Échanger une clé secrète commune à travers un canal public ;
- Proposé par Diffie et Hellman en 1976 ;
- Utilise des groupes ;
- Version moderne post-quantique : utilise des graphes.

Échange de clé par graphe



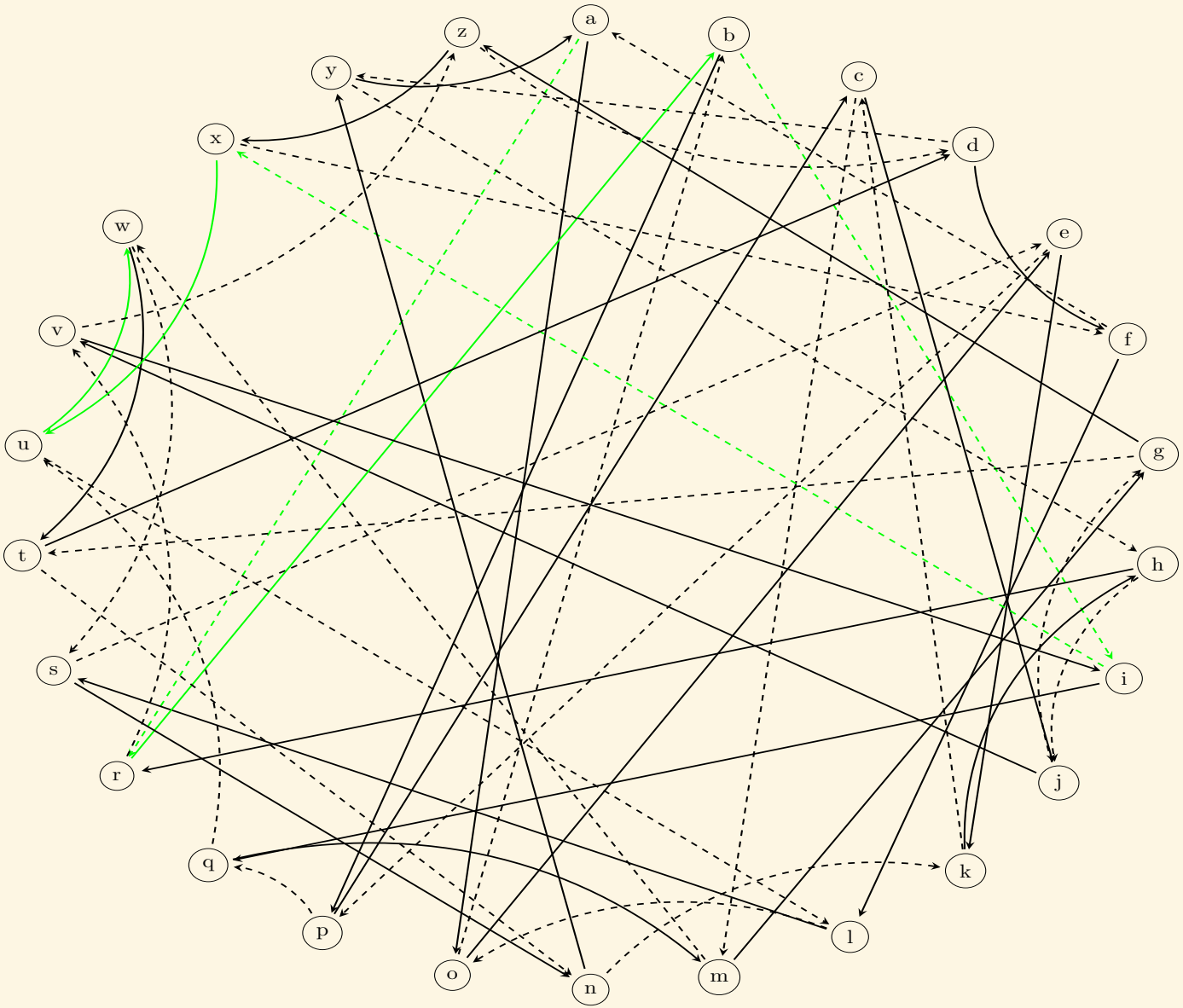
Échange de clé par graphe

Alice part de 'a', suit le chemin 000110, et tombe sur 'g'.



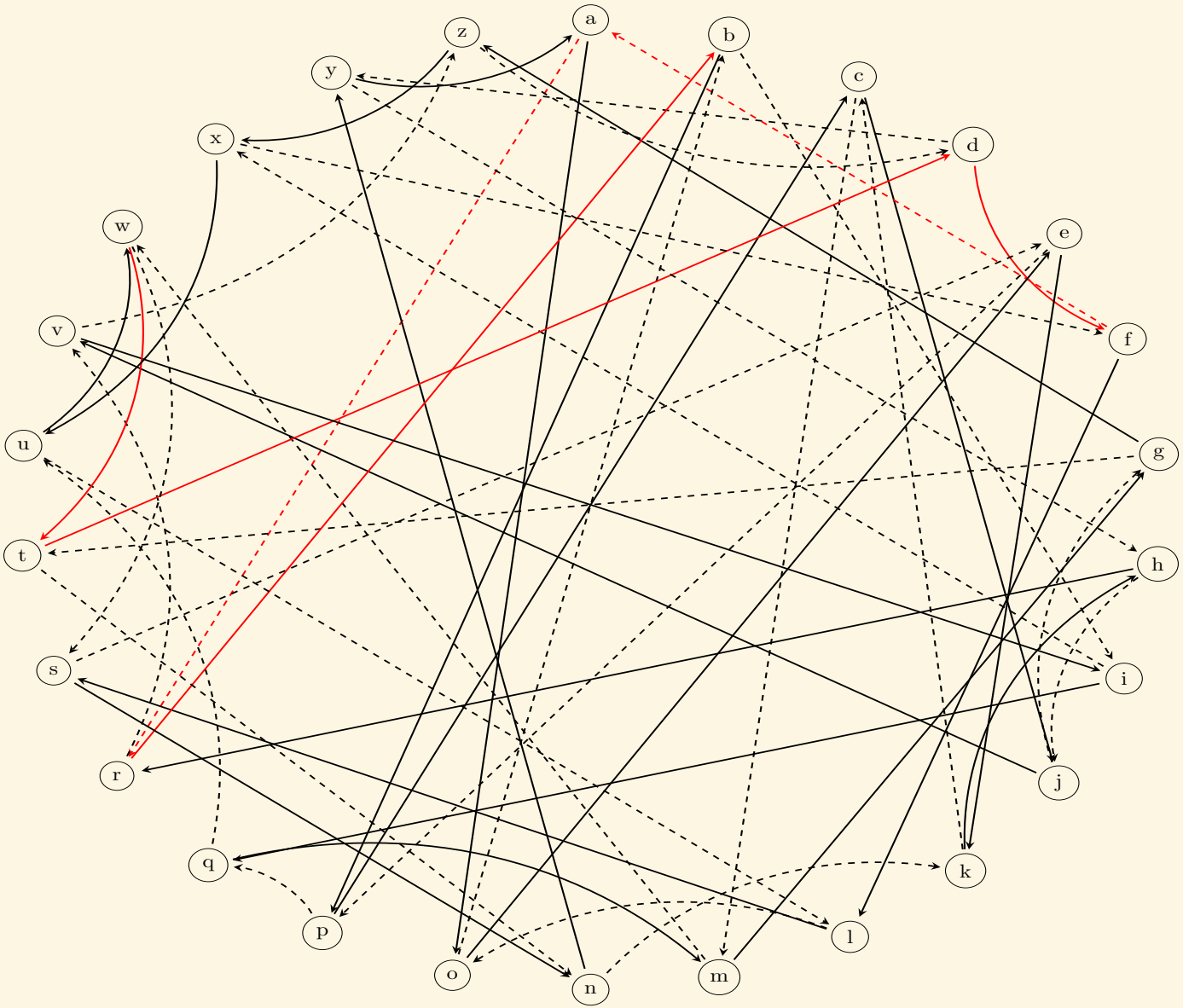
Échange de clé par graphe

Bob part de 'a', suit le chemin 101100, et tombe sur 'w'.



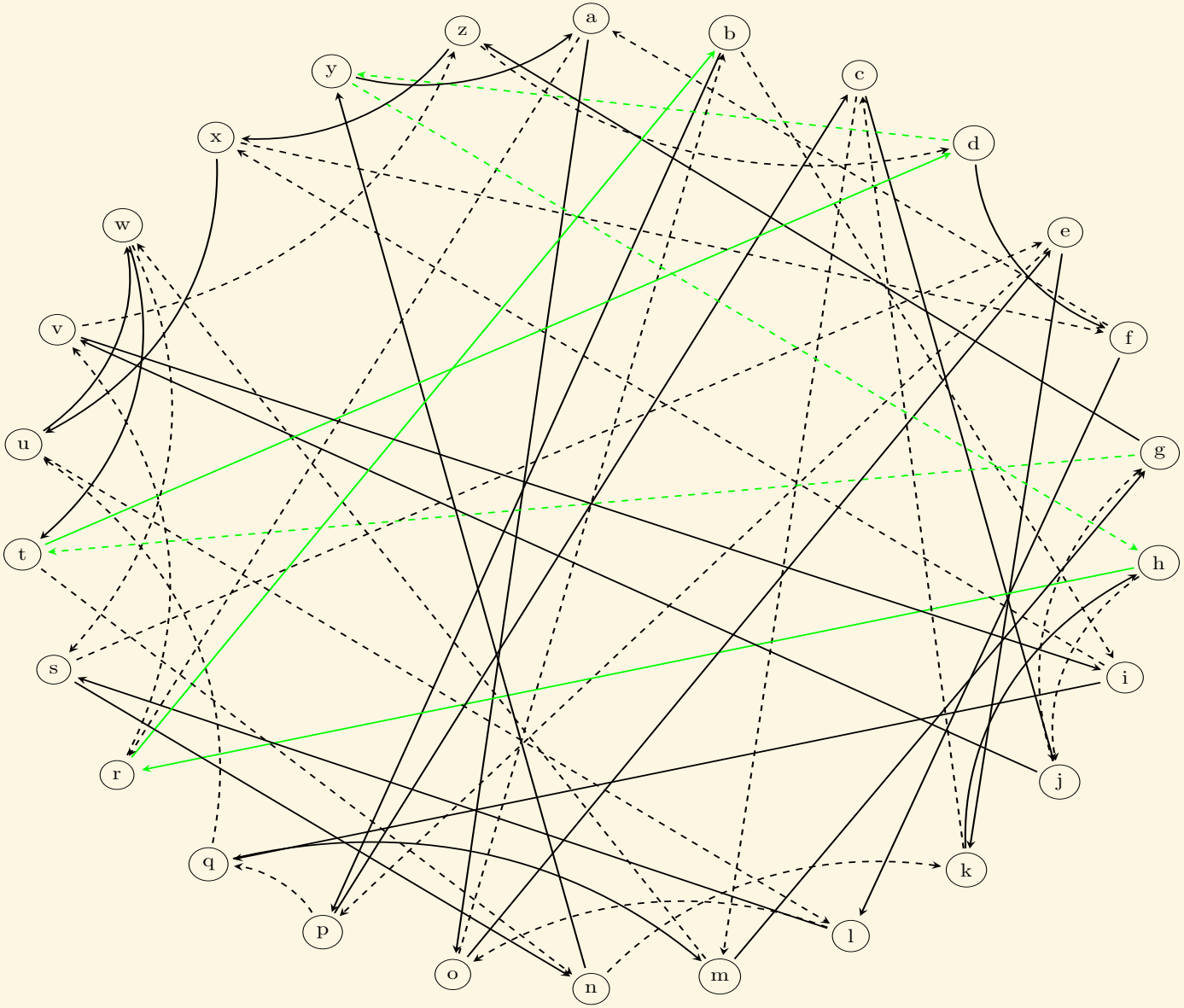
Échange de clé par graphe

Alice part de 'w', suit le chemin 000110, et tombe sur 'b'.



Échange de clé par graphe

Bob part de 'g', suit le chemin 101100, et tombe sur 'b'.



Chiffrement à clé publique

Alice veut envoyer m à Bob.

Elle trouve la clé publique de chiffrement K_{Bob}^{pub} dans l'annuaire.

Elle calcule $c = f_{K_{Bob}^{pub}}(m)$

c est envoyé

à Bob 

c

qui utilise sa clé secrète de déchiffrement K_{Bob}^{sec}

$m = f_{K_{Bob}^{pub}}{}^{(-1)}(c) = g_{K_{Bob}^{sec}}(c)$

Chiffrement à clé publique

Alice veut envoyer m à Bob.

Elle trouve la clé publique de chiffrement K_{Bob}^{pub} dans l'annuaire.

Elle calcule $c = f_{K_{Bob}^{pub}}(m)$

c est envoyé

à Bob

c

qui utilise sa clé secrète de déchiffrement K_{Bob}^{sec}

$m = f_{K_{Bob}^{pub}}{}^{(-1)}(c) = g_{K_{Bob}^{sec}}(c)$

Chiffrement à clé publique

Alice veut envoyer m à Bob.

Elle trouve la clé publique de chiffrement K_{Bob}^{pub} dans l'annuaire.

Elle calcule $c = f_{K_{Bob}^{pub}}(m)$

c est envoyé

à Bob

c

qui utilise sa clé secrète de déchiffrement K_{Bob}^{sec}

$m = f_{K_{Bob}^{pub}}{}^{(-1)}(c) = g_{K_{Bob}^{sec}}(c)$

Chiffrement à clé publique

- Trois étapes : création et publication de clés, chiffrement, déchiffrement
- Avantages : gestion de clé simplifiée, solidité mathématique
- Permet de faire des signatures, du chiffrement de groupe...
- Fragilités : plus lent, plus compliqué à implémenter

En pratique on combine les deux chiffrements : clé publique pour échanger une clé de session (secrète) qui servira à chiffrer à la volée.

Comment savoir quelle clé publique utiliser pour communiquer avec un utilisateur donné ?

Comment faire ?

- Situations asymétriques : l'un saît l'autre pas.
- Celui qui connaît le secret a un avantage (il peut déchiffrer, il peut se prouver).
- Mesurer cet avantage : théorie de la complexité algorithmique.
- S'appuyer sur des problèmes difficiles.

La thèse de Turing-Church

Alan Turing

Alonzo Church

Tests de primalité

Savoir si un entier P est premier.

Pierre de Fermat

Agrawal, Kayal et Saxena

$$T = n^{6+\varepsilon(n)}$$

où n est le nombre de chiffres décimaux de P.

Factorisation

Théorème fondamental de l'arithmétique.

Euclide

Carl Friedrich Gauss

$N = \prod_{1 \leq i \leq I} p_i^{e_i}$.

Factorisation

Hendrik Lenstra

Brigitte Vallée

Factoriser un entier N prend un temps $T = \exp(\sqrt{n})$ où n est le nombre de chiffres décimaux de n.

Asymétrie

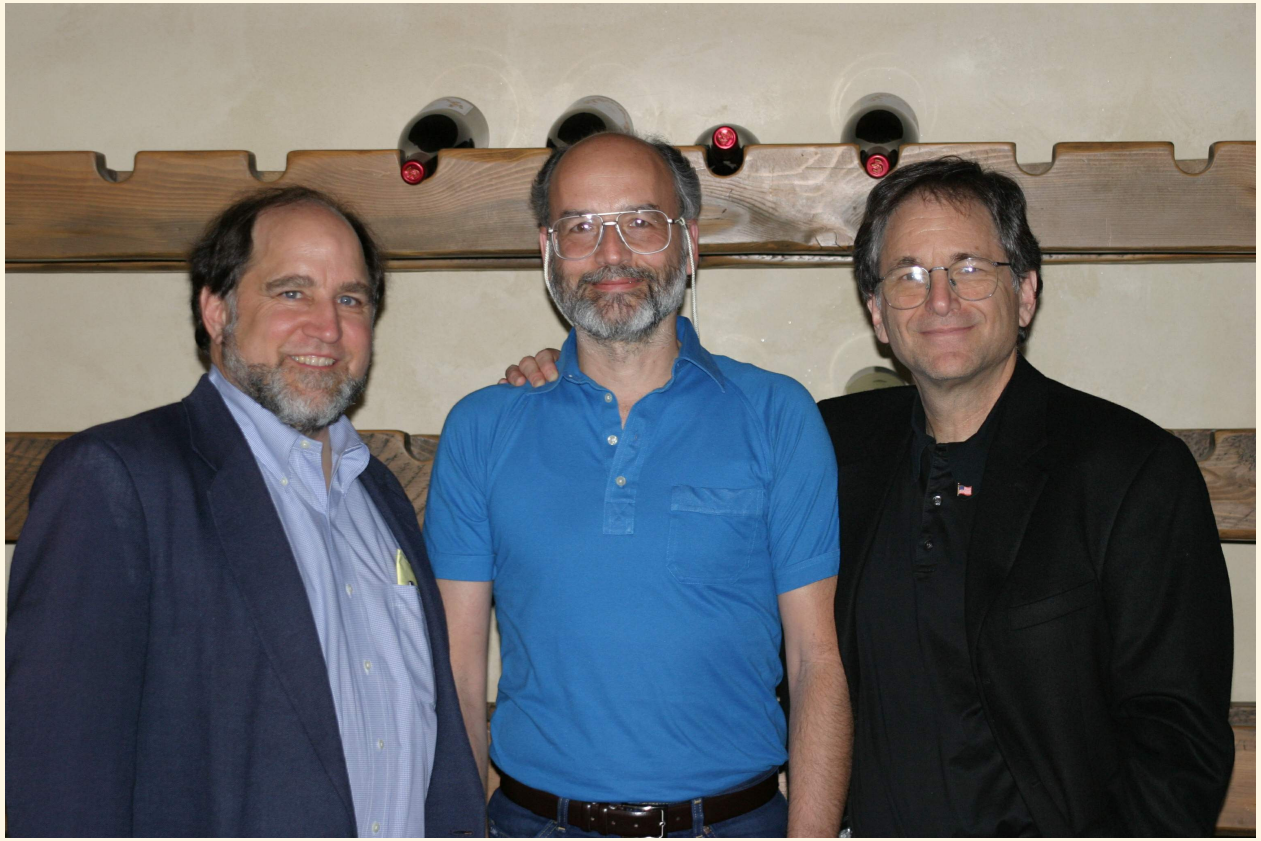
$$(p,q) \longrightarrow N = pq$$

$$(p,q) \longleftarrow N = pq$$

Asymétrie

- En décembre 2009, Thorsten Kleinjung et une dizaine de collègues ont factorisé un nombre de 232 décimales.
- *The sieving, which was done on many hundreds of machines, took almost two years.*
- Calculer le produit de deux nombres de 116 décimales prend 8 millionièmes de secondes sur mon ordinateur portable.

Protocole RSA



Rivest, Shamir et Adleman

Protocole RSA

- Soit $N = pq$ un produit de deux grands nombres premiers ;
- Soit e premier à $\varphi(N) = (p-1)(q-1)$ et d l'inverse de e modulo $\varphi(N)$;
- Chiffrement : $x \longmapsto x^e \mod N$;
- Déchiffrement : $x \longmapsto x^d \mod N$;

Théorème (Petit théorème de Fermat)

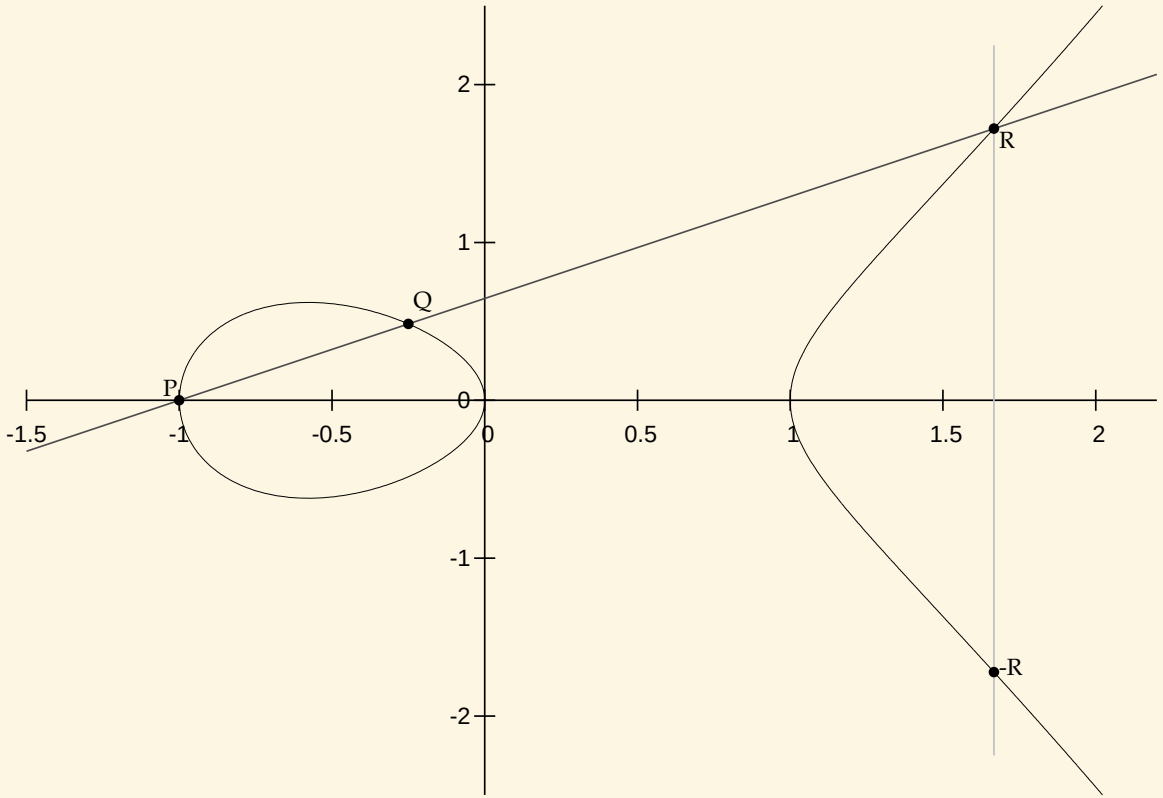
$x^{\#(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} = 1 \mod N.$

Les courbes elliptiques

Définition (char $k \neq 2,3$)

Une courbe elliptique est une courbe plane d'équation

$$y^2 = x^3 + ax + b \qquad 4a^3 + 27b^2 \neq 0.$$



Exponentiation :

$$(\ell, P) \mapsto \ell P$$

Logarithme discret :

$$(P, \ell P) \mapsto \ell$$

Utilisation des courbes elliptiques

Exemple (ECC 160 bits)

- E courbe elliptique $y^2 = x^3 + x + 333$ sur $\mathbb{F}_{1461501637330902918203684832716283019655932542983}$
- Clé publique :

$$P = (136996248758078877499219958849896155834136208629 6,$$
$$407160203592982096299905031630798490942043935021);$$
$$Q = (695697562436343265984113032286189105569389589 80,$$
$$112620361166019022170844963967766792502441296839 5);$$

- Clé secrète : ℓ tel que $Q = \ell P$.

- Utilisées par la NSA ;
- Utilisées dans les passeports biométriques Européens.
- Plus rapide, compact et puissant (couplages) que RSA.

ECC contre RSA pour 128 bits de sécurité

- ECC (Curve25519) 256 bits :

```
AAAAC3NzaC1lZDI1NTE5AAAAIMoNrNYhU7CY1Xs6v4Nm1V6oRHs/FEE8P+XaZ0PcxPzz
```

- RSA 3248 bits :

```
MIIHRgIBAAKCAZcAvlGW+b5L2tmqb5bUJMrfLHgr2jga/Q/8IJ5QJqeSsB7xLVT/
ODN3KNSPxyjaHmDNdDTwgsikZvPYeyZWWFLP0B0vgwDqQugUGHVfg4c73ZolqZk6
1nA45XZGHUPt98p4+ghPag5JyvAVsf1cF/VlttBHbu/noyIAC4F3tHP81nn+lOnB
eilEALbdmvGTTZ5jcRrt4IDT5a4IeI9yTe0aVdTsUJ6990hpKrVzyTOu1eoxp5eV
KQ7aIX6es9Xjnr8widZunM8rqhBW9EMmLqabnXZItPQoV3rUAnwKzDLV7E56viJk
S2xU5+95IctYu/RTTbf3wTxnkDOqxId0MONHyBJsukXgYKxVB1fWhBKZ4tWui1gw
UCIiKTqLml2zJhLn4WovaxrvvTx0082S0xncEfYDXYu4xbRnJn+ZsTTguqufwC1M
U4MYRdWy7uj+H1EmIGul69Fw9NkuCitWI9dFpcDtSP+/1eEN7wc2FlxhDIRwer0F
6I1P4StWn1uQyHzsTLVdcP+rqA1AsvbWBCKL4ravEO2CEQIDAQABAoIBllWt5YoJ
YZzk4RXbkSX/LvmWICfdmkjTKW6F1w+P4TnotCr0WPG0ObDoANJoUcnbSqNGMgCu
01SF8q9+UuDwZx4KBZm0j8IPOPzJ2nYcK5dYDhyMHzDq1LJ4zJfgPQGQ5WWq2BWm
2RHDhADdTth6YZArs/z9hAqtA9gqMPnMPcdQpIvlsHSOn06zBJD8sJQA+kOxG+Y2
GS8NakLcUVlDpNd/Q+QHkv4AW1ge2EF8QvmKtU/9rekOBqWNm2Tapd6RtAhZwPJX
UhD9yiesTF6rjZ1ZcMGXUaN5Rt0zD3D4zowRz2JLtCe4GkiJmtc3waN6hu1IaIqz
boI11evqnbatqnC4rCq8sf21yZqaLUIbwH4lW2G3K8xMJNh3iy8cgHTYneNYa+/d
7xyNWlMO9SKlHsyaPcWv98BdD+At0x/6R6YPYkeR+qXJ9ETGFKW4U6iNbBQXOMbh
kZb1Ry8vfMH8vsYIzh8Edg6aq00ScU57KiDS/Gc8KuqI6vmf2leCdCa487kVCgw6
cGXQ2bLZGYBiMZFfOOlpCQECgcwA5ZUh3/8yS0duNhsDz3sgC2u40HwHUbxuSOUa
a5t4CoUY9iuF7b7qhBEcvdLgIOiXA5xo+r4p0xgbLvDUTsRR1mrDM2+wRcjjwXcW
pFaMFRl2Rr72yLUC7N0WNcoUshrNL4X/1j8T4WLRcannpXcor+/kn1rwdLEbRCC+
zRTAdJlgMPt4kwJeHtE9Mzw2/O3GX3MeLvzvJklzvpCGw20N/2Yqjs++V5hXoHPs
21y6y6/FV097dvFctf7NahS04JsjubfnjOMx89AUNZsCgcwA1DfabCGJSCkmQ+mg
2q9lDPJz6r29wmBtYyT20oZ2kd4QBHrOp0t59yG4bvdRqcZG/Dr5LjuVDWMPyetV
dksK7hVYQz2B7Nzy7W3waPVrhA0N4fqbIFGxih5QiSFG7/oroZ8PdZDcfVRKroh1
/JJ7rIz/ZBQCLRS5t7/G2B0kBDOMMM+02wR60CTmxUhmgvsoDZWRp5KKha5PSvZa
WAu2CN3mXNK72RLF3RFUvuhNYnkOEj5Oau1RaGgpZoB0JTKYI9nffbe8up+DV8MC
gcwA18be28Ti5FXyg+/IGQ3EBHfucCTiTDQqA2Ew/8pTfK+z0kr9yYISsKXUuaSk
+skghkhPcrugW8LgabH4GT/zGu+lH4btyekSBxeCtFqTtpED1WJOWD2ozi7NXSjd
YrhF+VCcMCWA7ekOqSHjkmT4XMO/wPab4VFEKzgLnHzQlcZB3ke7/4/OHnDScIE7
vWVNeRCdYdRggT+wBX+Y6bxp142Smj8uyu1oDmpmR5ZUCnTdqT4O8K/RT0x4jCeC
CUhGv5rVillO7bS4CdkCgctXvnQwCzmwvVrV744TfTuhu8lTwHnqGWaA/LKU3wW9
T/x9ba1uHFXkaWvRba61LIcDGPsYM4hwTYokqYnfbC2rvOWOf6rtnXlP1An3y6lV
ovQfgDeNiFmIyvnviPPEm0JZA+QnburLYwOx4DgwYvyBnpal8WPo8c3L/J4hkwLm
Pc30DJ0xhUumLevAnCvOcjvgSfw8NenSVfzw+KToDIeKaP0rWfJTUWDAA79vY6tD
UNwRjPNtYIwtSAv+FpRvINko0ZeHamW9H+D1cwKBy2euc93qruYDtFej/biGSA5D
```

Identification par mot de passe

Alice 

mot de passe d'Alice BELOTE

BELOTE est envoyé

à Bob

mot de passe de Bob REBELOTE

REBELOTE est envoyé à Alice

Identification par mot de passe

- Alice et Bob doivent convenir d'un mot de passe secret partagé (question secrète)
- Avantage : simple
- Fragilités : risque de réutilisation e.g. par un tiers, gestion de mots de passe

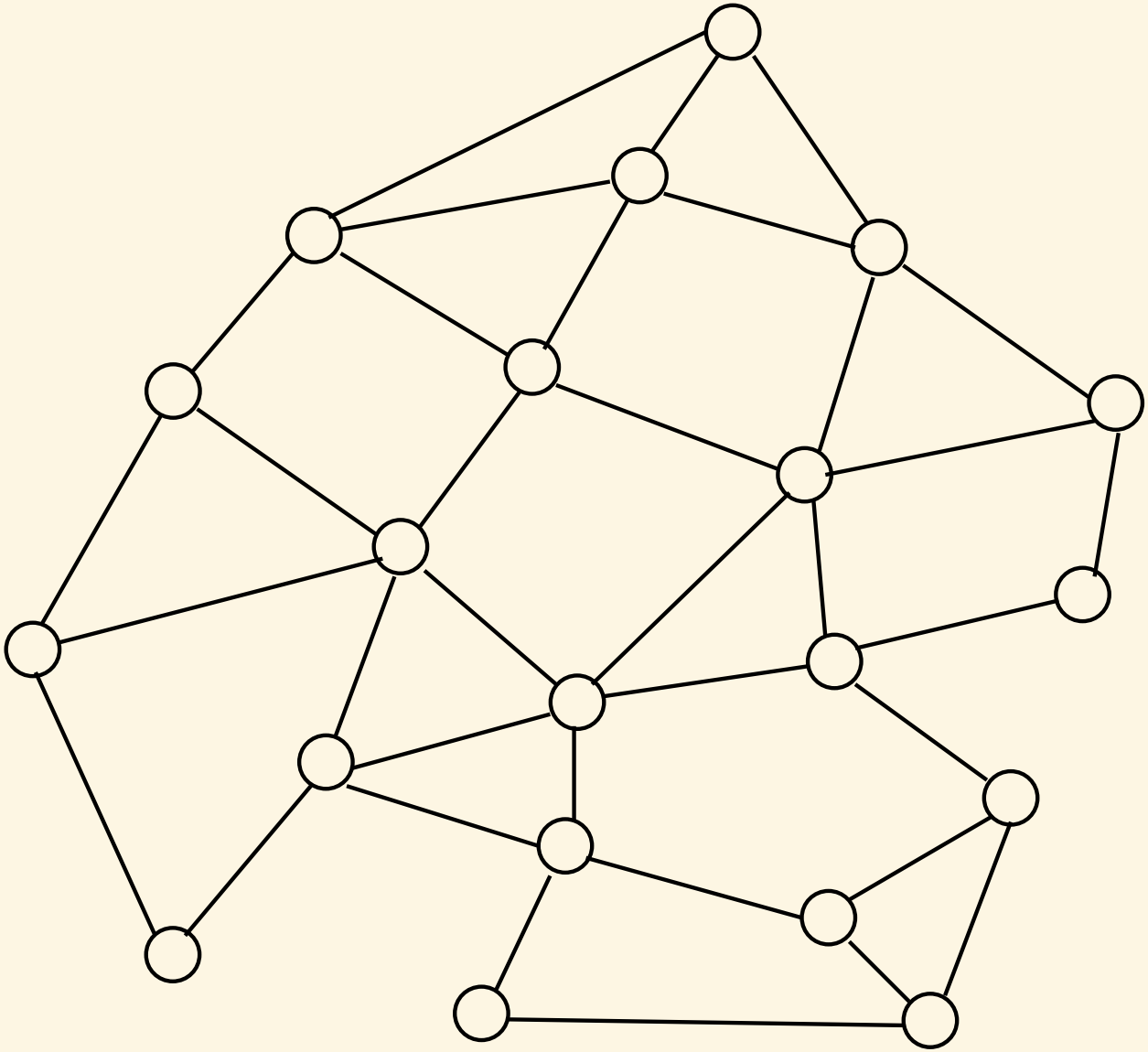
Identification sans divulgation de connaissance

Alice connaît un secret S_{Alice}

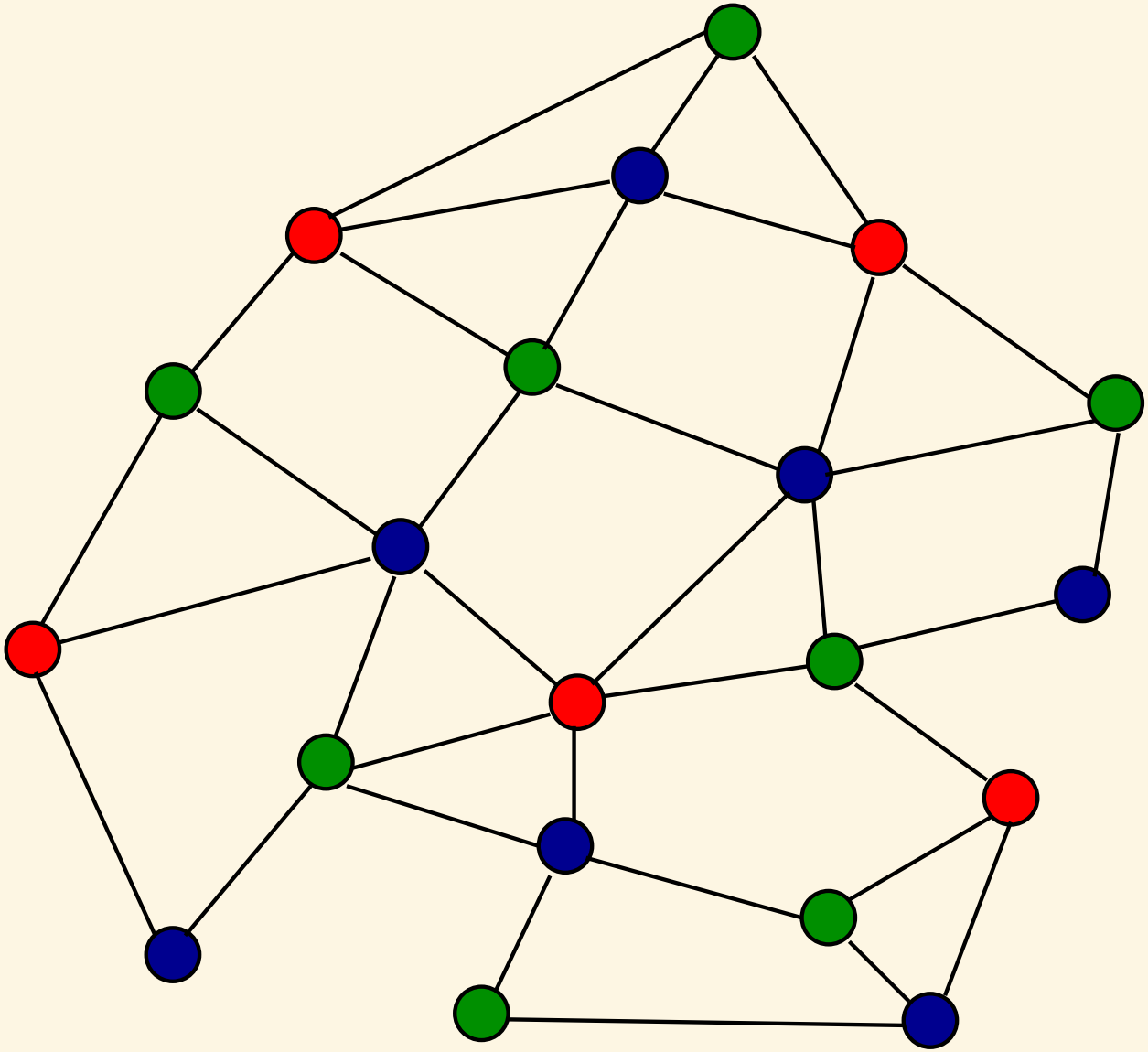
Bob interroge Alice et se convainc qu'elle connaît bien le secret.

À la fin de l'échange, Bob n'a rien appris sur ce secret !

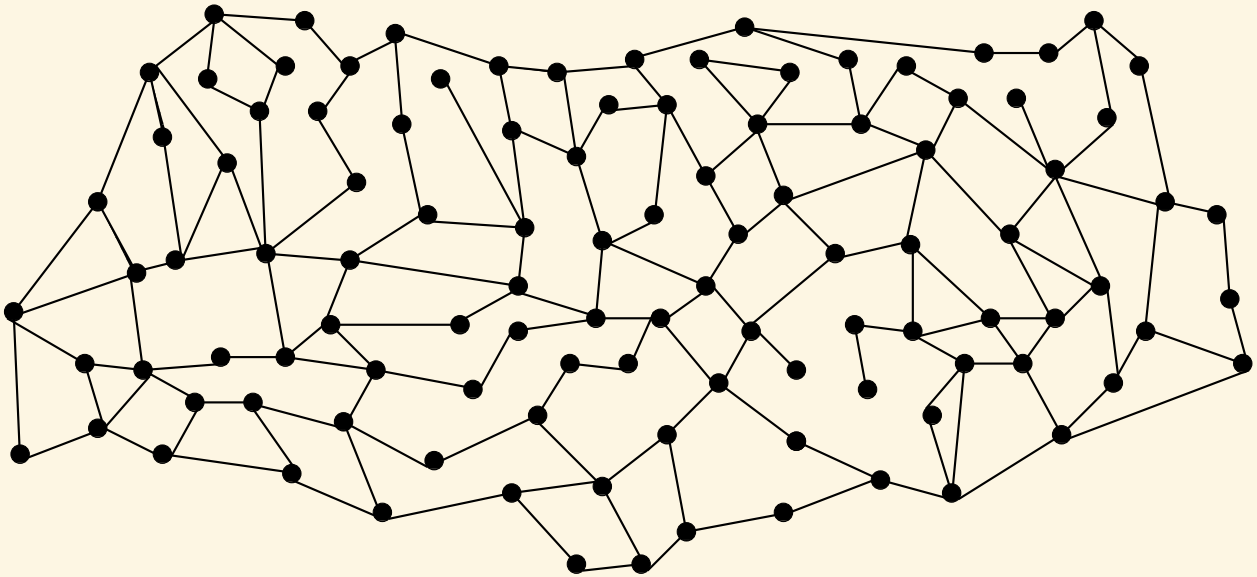
Coloriage de graphe



Coloriage de graphe



Coloriage de graphe

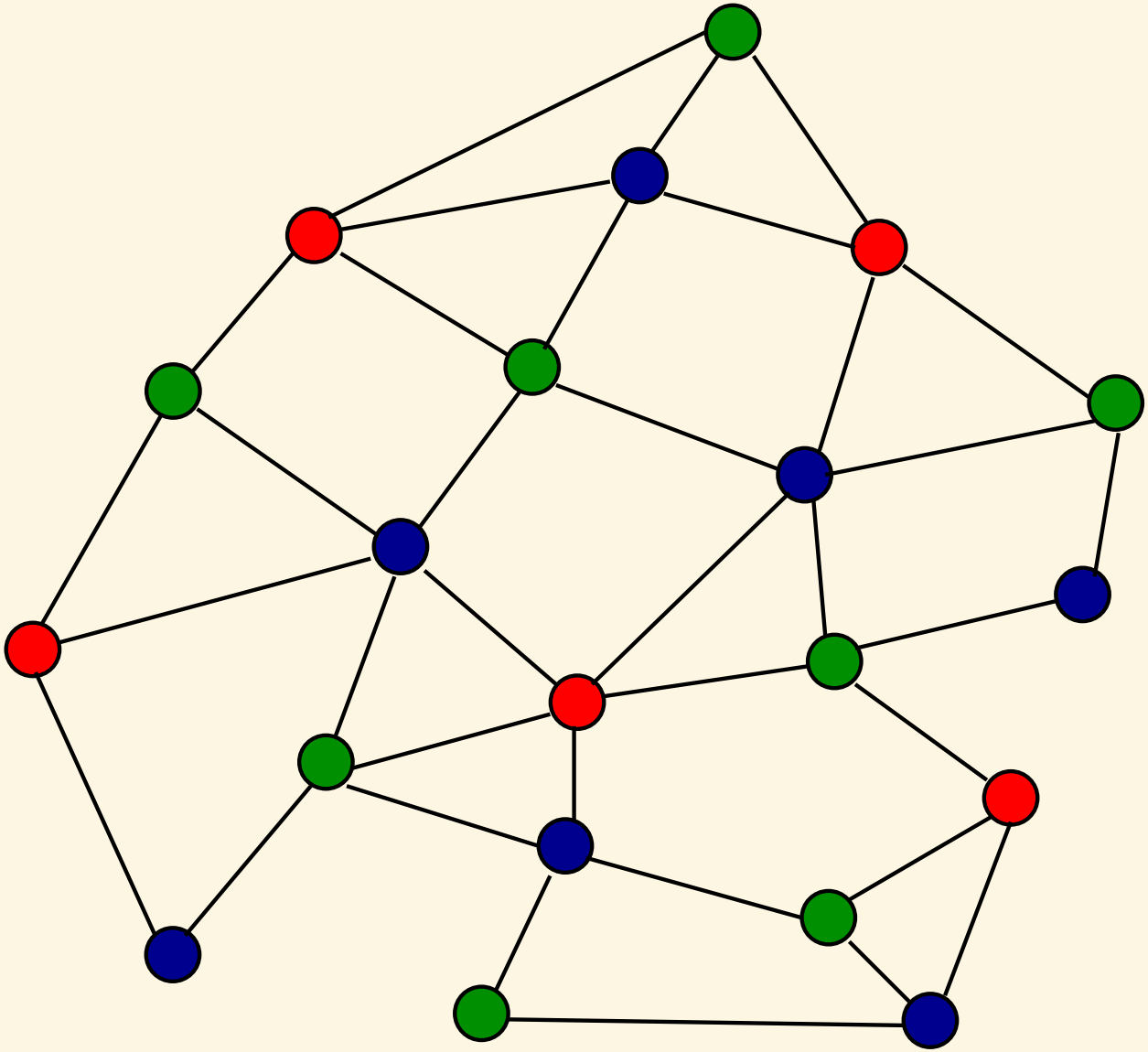


Zero Knowledge Proofs

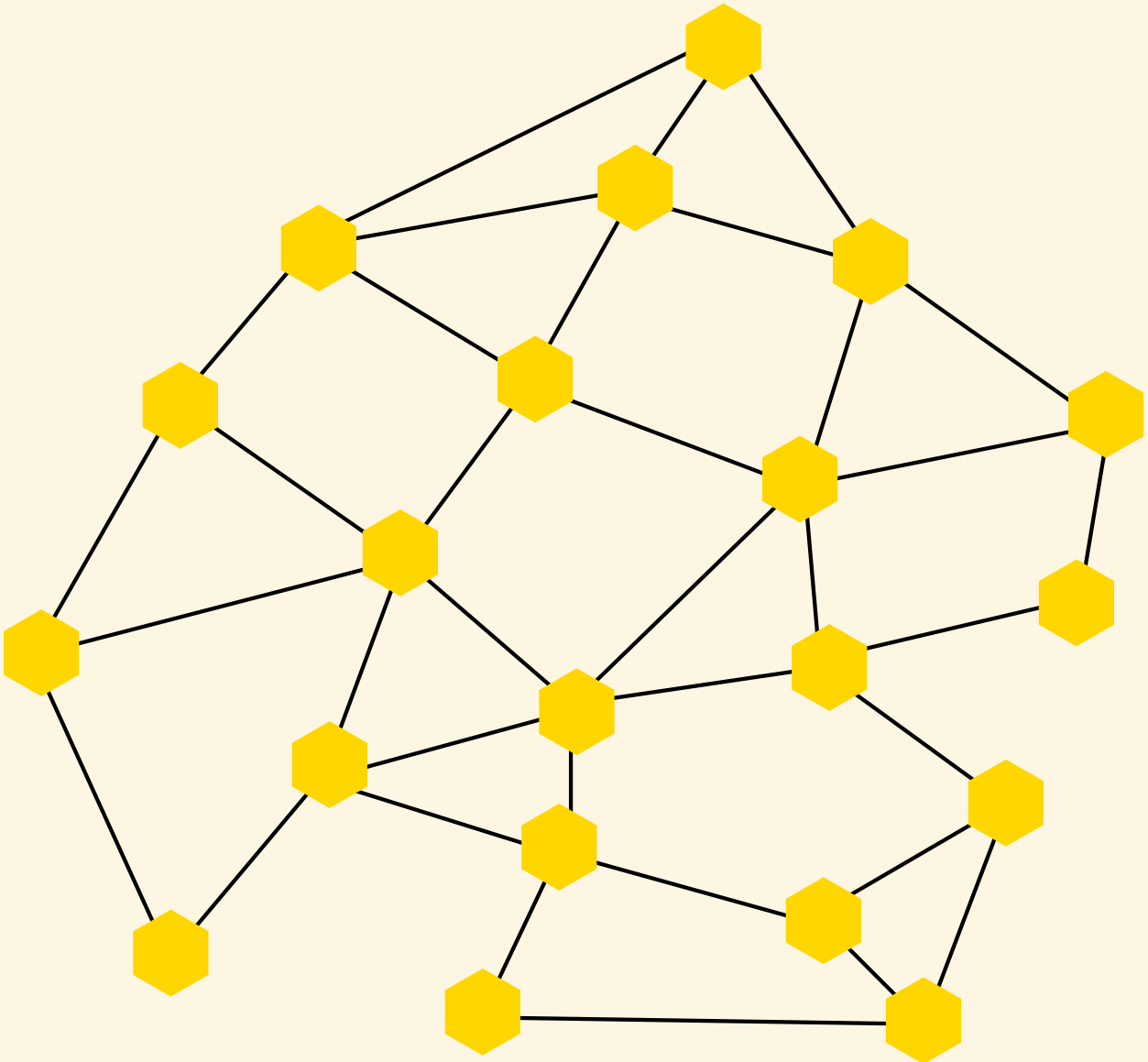
Shafi Goldwasser (1981)

Oded Goldreich (1991)

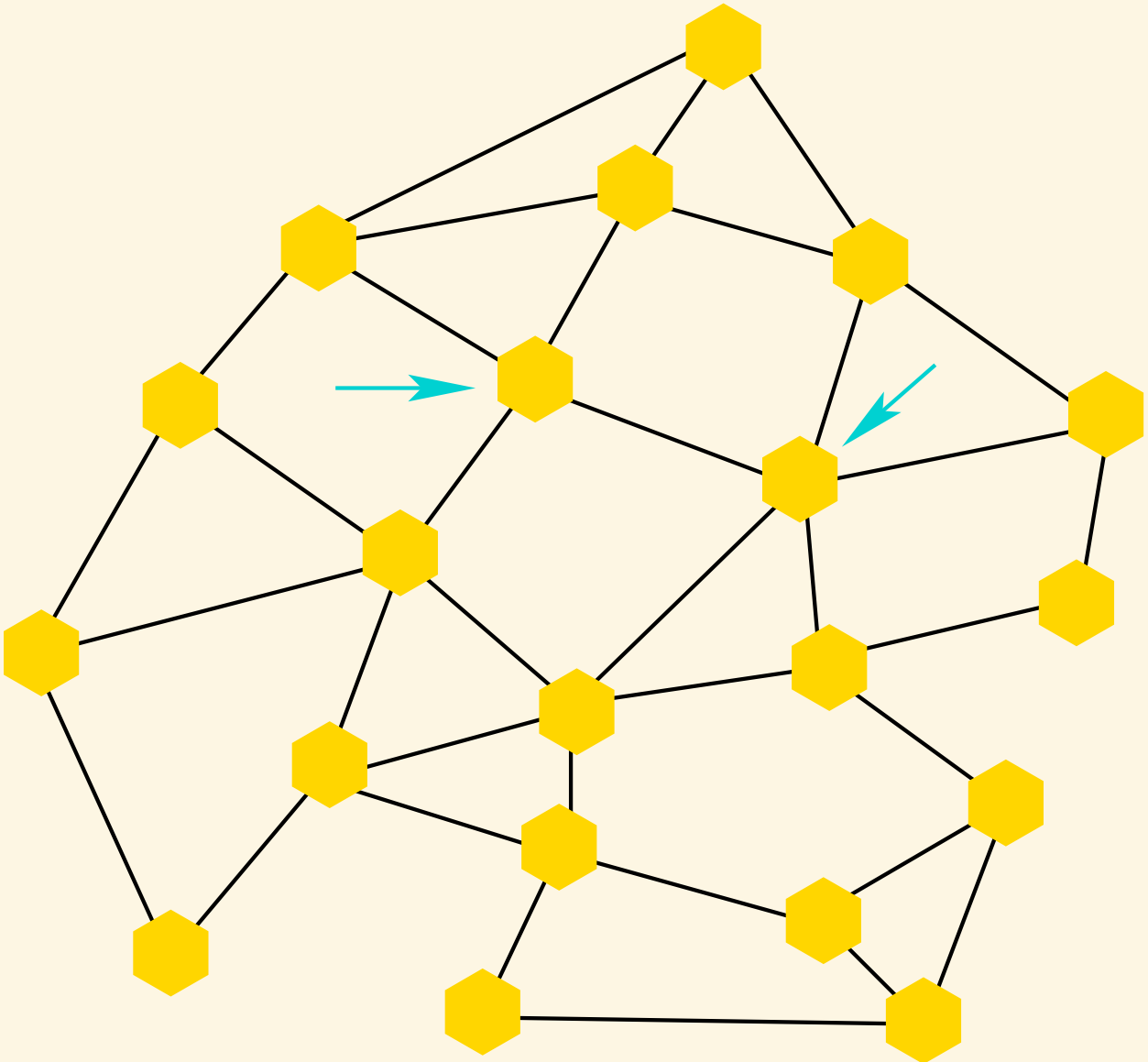
Le coloriage d'Alice (secret)



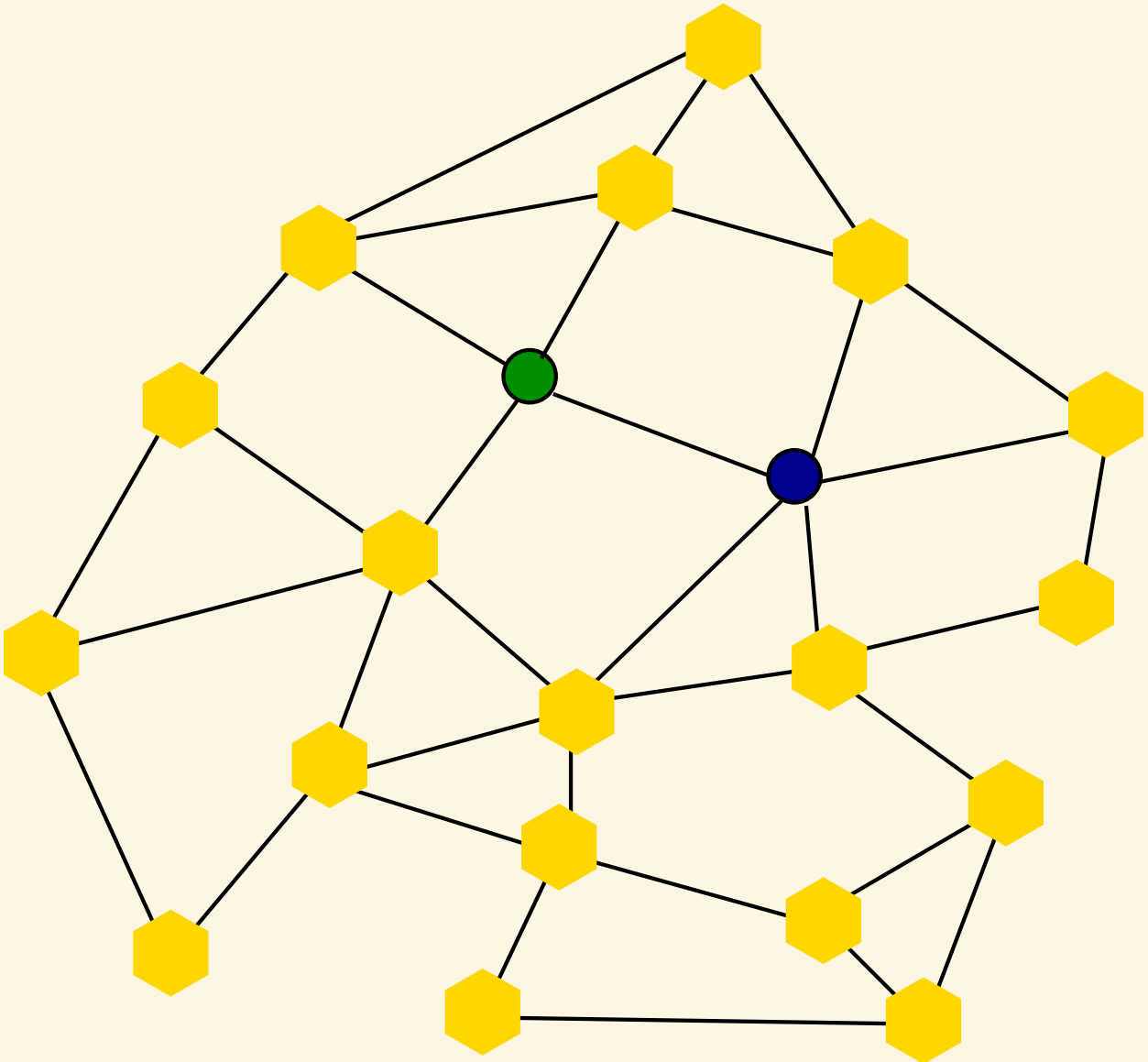
Le coloriage d'Alice caché



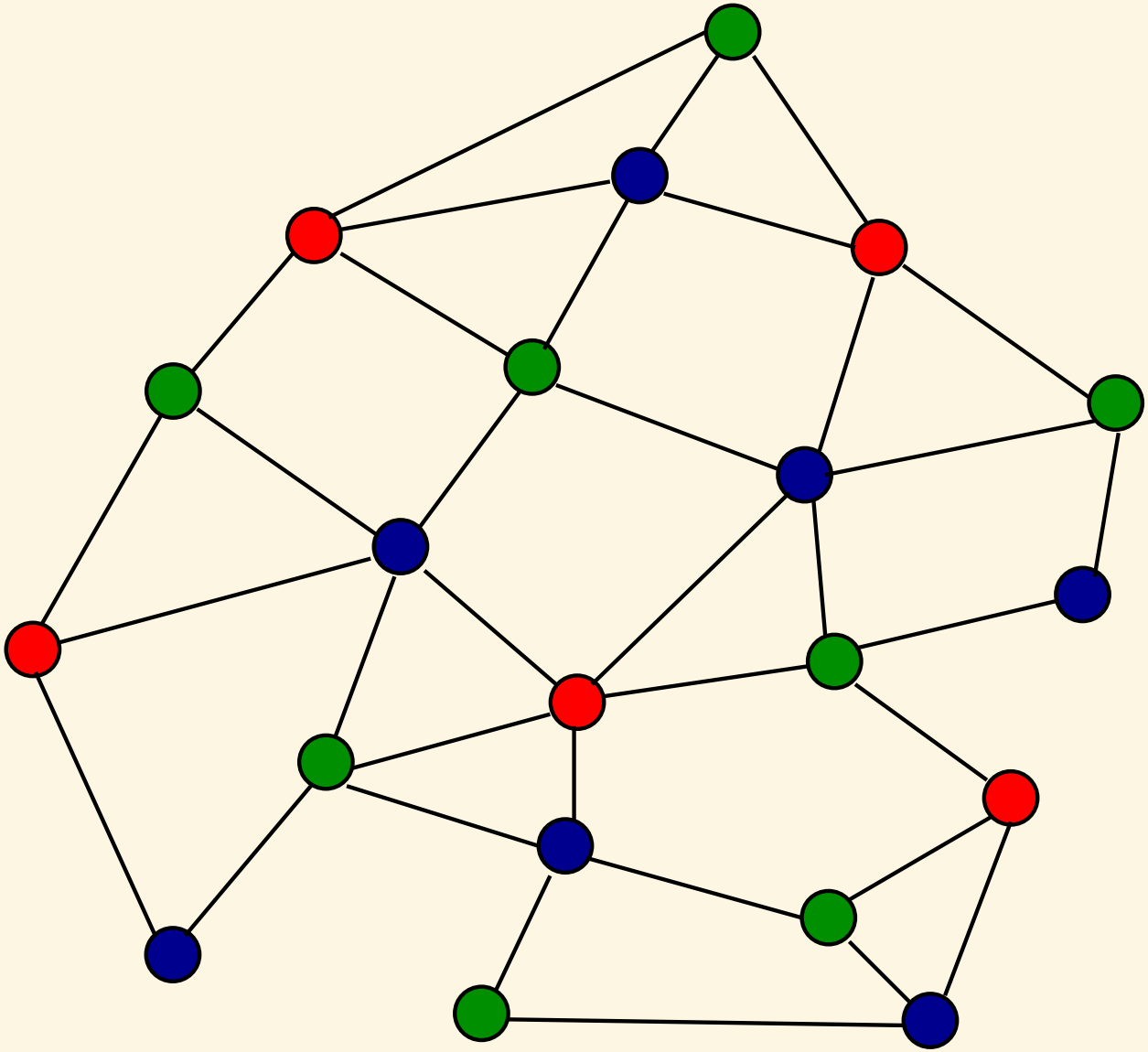
La question de Bob



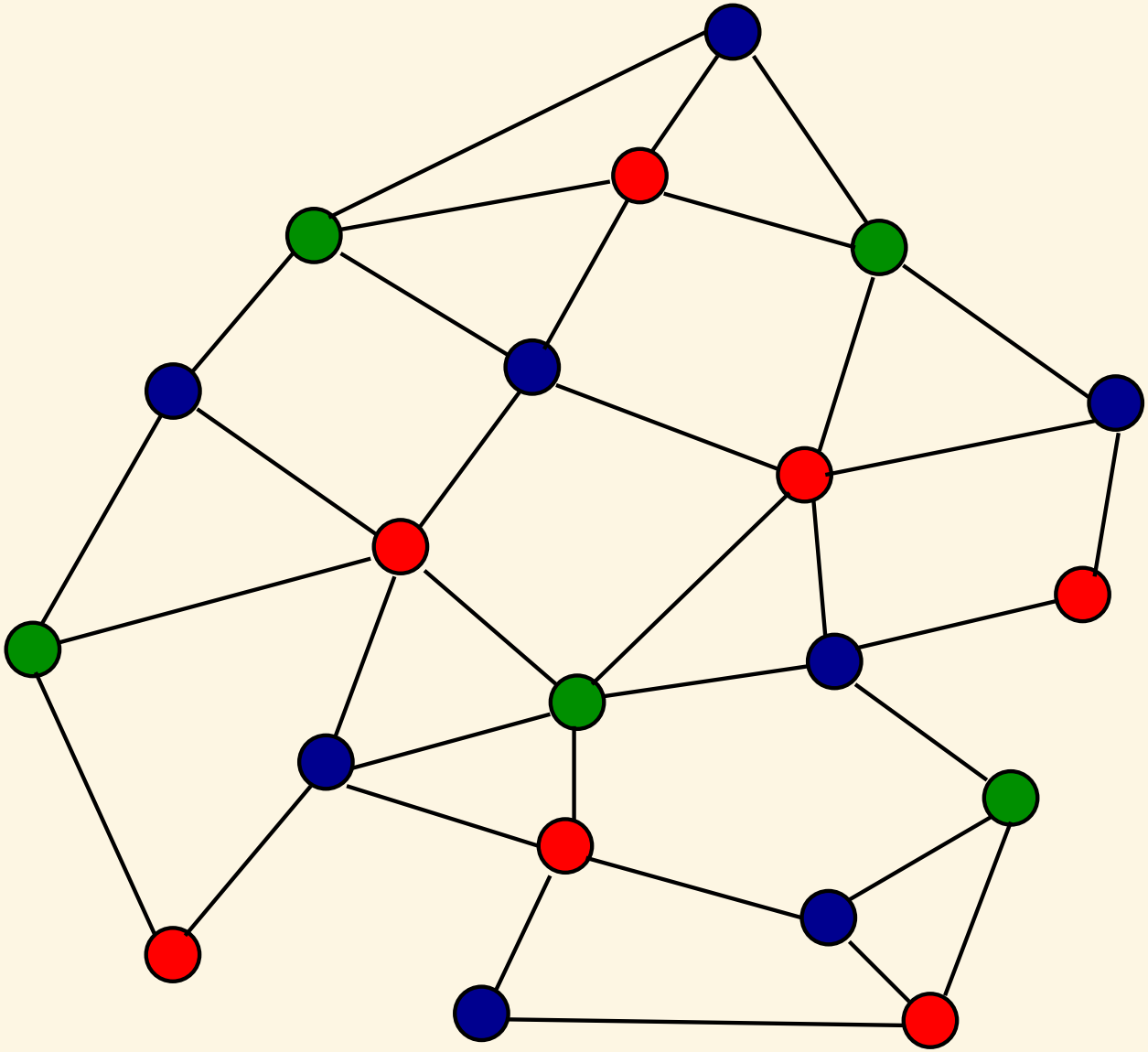
Dévoilement



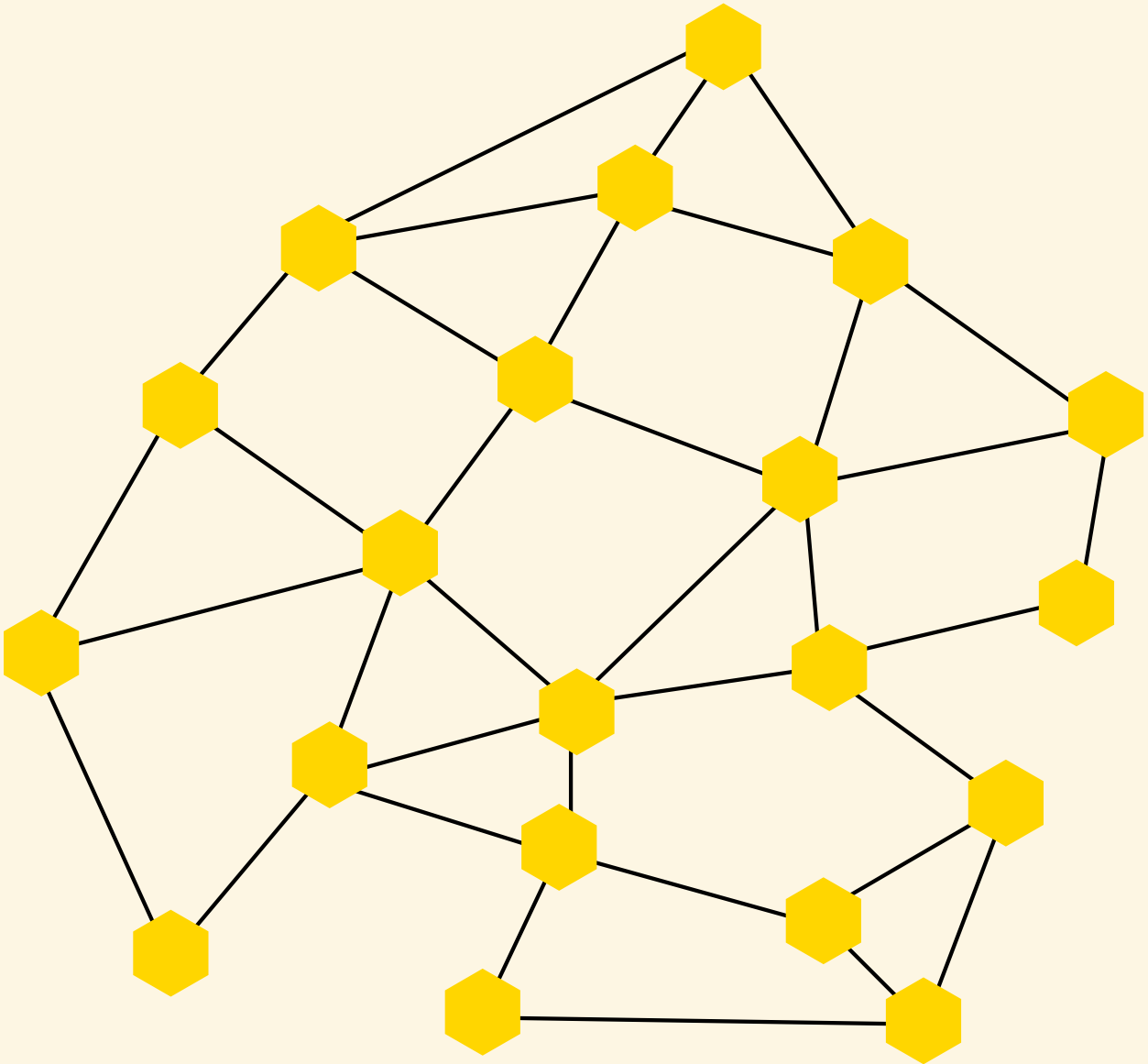
Le coloriage d'Alice (secret)



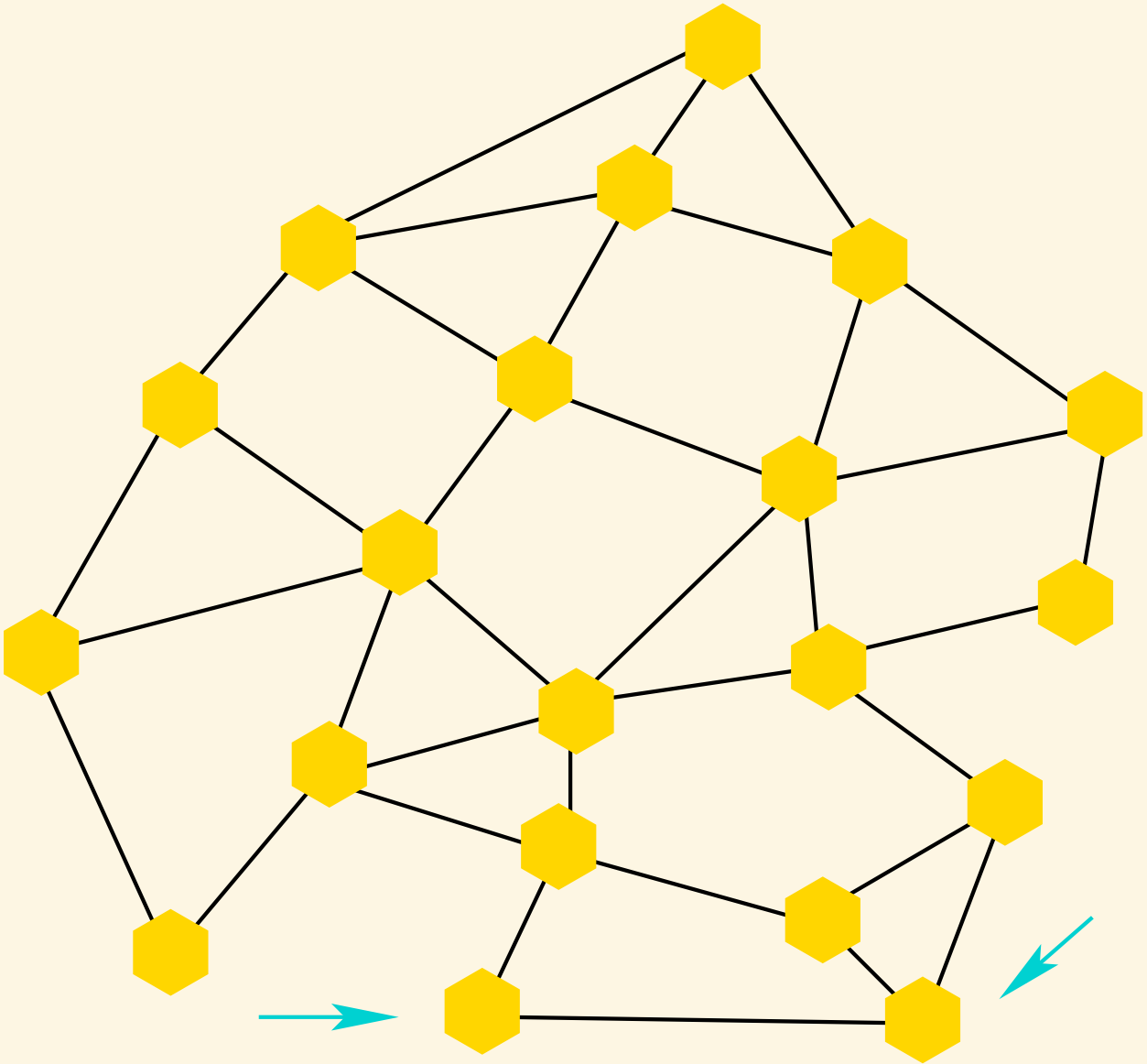
Le coloriage d'Alice permuté



Le coloriage d'Alice caché



La deuxième question de Bob



Dévoilement