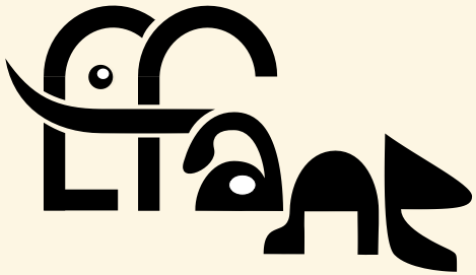
À quoi sert la cryptologie ? — Petit panorama des mathématiques de la cryptologie

2016/05/23 — Inria Alkindi, Bordeaux

Damien Robert

Équipe LFANT, Inria Bordeaux Sud-Ouest



Cryptologie à clé publique

Cryptologie :

- Chiffrement ;
- Authenticité ;
- Intégrité.

La cryptologie à clé publique est basée sur une fonction à sens unique (avec trappe)
$\Rightarrow$ chiffrement asymétrique, signatures, preuves sans connaissances...

Applications :

- Militaires ;
- Vie privée ;
- Communications (internet, téléphones...)
- Commerce électronique...

Contexte Historique

- Riche histoire ; chiffrement de messages depuis l'antiquité au moins ;
- Principale application auparavant militaire ;
- Dorénavant la cryptologie joue un rôle essentiel pour garantir la sécurité des communications ;
- Cryptanalyse : déchiffrement d'Énigma par le groupe Ultra (Secret) à Blentchey Park lors de la seconde guerre mondiale ;
- À la fin de la guerre, vente des machines Énigma capturées par les alliés à d'autres pays.

Contexte actuel

- http ://en.wikipedia.org/wiki/PRISM_(surveillance_program) :
  « The Prism program collects stored Internet communications based on demands made to Internet companies» (Microsoft, Yahoo !, Google, Facebook, Paltalk, YouTube, AOL, Skype, Apple...)
- En sus de ce programme d'espionnage, utilisation de virus extrêmement sophistiqués, capables de s'infiltrer dans le firmware des disques durs : Stuxnet, Flame, Equation Group.
- Officiellement pour lutter contre le terrorisme ;
- Mais aussi utilisé pour l'espionnage économique :
  http ://www.theguardian.com/world/2013/jun/09/edward-snowden-nsa-whistleblower-surveillance
- Les États-Unis ne sont pas les seuls à avoir des systèmes de surveillance...
  http ://www.theguardian.com/world/2013/jul/04/france-electronic-spying-operation-nsa

⇒ L'utilisation de la cryptographie est un enjeu de souveraineté nationale !

Quelle cryptographie ?

- Tout système ad-hoc, non basé sur des standards a été cassé (DECSS, GSM, WEP...)
- Utiliser un standard suffit-il ?

Standards :

- NIST workshop to standardize new elliptic curves ;
- IETF CFRG workgroup (Crypto Forum Research Group).

Quelle cryptographie ?

http ://blog.cryptographyengineering.com/2013/09/on-nsa.html

Matthew Green — « The NSA has been :

- Tampering with national standards (NIST is specifically mentioned) to promote weak, or otherwise vulnerable cryptography.
- Influencing standards committees to weaken protocols.
- Working with hardware and software vendors to weaken encryption and random number generators.
- Attacking the encryption used by “the next generation of 4G phones”.
- Obtaining cleartext access to “a major internet peer-to-peer voice and text communications system”
- Identifying and cracking vulnerable keys.
- Establishing a Human Intelligence division to infiltrate the global telecommunications industry.
- decrypting SSL connections.

»

Quelle cryptographie ?

- Tout système ad-hoc, non basé sur des standards a été cassé (DECSS, GSM, WEP...)
- Utiliser un standard suffit-il ?

Standards :

- NIST workshop to standardize new elliptic curves ;
- IETF CFRG workgroup (Crypto Forum Research Group).

⇒ On a besoin d'une cryptographie issue de la recherche publique, conduite par des experts universitaires, en lien avec le milieu économique local.

But de la présentation : expliquer les concepts clés de la cryptologie, plutôt que de donner des « boîtes à outils » toutes prêtes.

Protocoles cryptographiques

- Briques de base (primitives), s'appuyant sur des objets mathématiques
- Ces primitives sont combinées pour former des algorithmes/modes opératoires (algorithme de chiffrement, algorithme de signature)
- Ces modes opératoires sont combinés pour former des protocoles (protocole de session TLS, protocole de vote)
- Ces protocoles sont implémentés en logiciel ou matériel
- Puis ils sont utilisés.

Example : De RSA à un algorithme de chiffrement

- RSA permet de chiffrer un message m d'une certaine taille k : $m \longmapsto E(m)$;
- Comment chiffrer un message de longueur arbitraire ?
- Idée naturelle : découper m en messages $m_1 \| m_2 \ldots \| m_d$ de taille k, et poser $E(m) = E(m_1) \| E(m_2) \ldots \| E(m_d)$;
- Problème : RSA est malléable. $E(m \times m') = E(m) \times E(m')$.

$\Rightarrow$ A partir de plusieurs chiffrés on peut en produire plein d'autres ;

- La solution est de chiffrer les blocs m_i avec du padding : $E(m_i \oplus G(r) \| r \oplus H(m_i \oplus G(r))$ où r est aléatoire et H et G sont deux fonctions de hachage (on a une preuve de sécurité).

Example : De RSA à un algorithme de chiffrement

- RSA permet de chiffrer un message m d'une certaine taille k : $m \longmapsto E(m)$;
- Comment chiffrer un message de longueur arbitraire ?
- Idée naturelle : découper m en messages $m_1 \| m_2 \ldots \| m_d$ de taille k, et poser $E(m) = E(m_1) \| E(m_2) \ldots \| E(m_d)$;
- Problème : RSA est malléable. $E(m \times m') = E(m) \times E(m')$.

$\Rightarrow$ A partir de plusieurs chiffrés on peut en produire plein d'autres ;

- La solution est de chiffrer les blocs m_i avec du padding : $E(m_i \oplus G(r) \| r \oplus H(m_i \oplus G(r))$ où r est aléatoire et H et G sont deux fonctions de hachage (on a une preuve de sécurité).

Example : intégrité et chiffrement

- Comment combiner les deux briques de base que sont le chiffrement (Encrypt) et l'intégrité (MAC Message Authentification Code) ;
- Encrypt then MAC ?
- MAC then Encrypt ?
- Encrypt + Mac ?

Example : intégrité et chiffrement

- Comment combiner les deux briques de base que sont le chiffrement (Encrypt) et l'intégrité (MAC Message Authentification Code) ;
- Encrypt then MAC ?
- MAC then Encrypt ?
- Encrypt + Mac ?

Attaques

- Attaques sur les briques de base (très rare) ;
- Attaques sur l'empilement des briques en algorithmes ou protocoles ;
- Attaques sur l'implémentation ;
- Attaques sur l'exécution.

Sécurité

- Briques de base : repose sur des problèmes mathématiques bien identifiés et très étudiés (difficulté de la factorisation, logarithme discret dans les courbes elliptiques)
- Algorithmes et protocoles : si un attaquant peut attaquer le protocole (avec une certaine probabilité p en temps T), alors il peut attaquer une brique de base (avec une certaine probabilité p' en temps T')

Sécurité ?

- Erreur dans les preuves
- Preuves justes mais modèle incorrect
- Modèle correct mais utilisé dans un autre contexte
- Réductions de sécurités inefficaces
- Bug dans les programmes
- Attaques physiques (par canaux cachés) : mesure des impulsions électromagnétiques, du bruit, du temps de calcul, des cache miss

Attaques sur TLS

SSL (Secure Sockets Layer) / TLS (Transport Layer Security)

- Protocole : Renegociation attack / Version rollback attack
- BEAST (attack on Cipher Block Chaining)
- CRIME and BREACH (attack on compression)
- Downgrade attack : FREAK (export grade cryptography), Logjam (precomputation)
- Bugs : Heartbleed (buffer overflow), BERserk, goto fail
- Bogus certificates

Mitigating future loss of private keys : perfect foward secrecy via ephemeral Diffie-Hellman key exchange.

Sécurité !

Preuves formelles

- Des protocoles
- Des implémentations
- Des compilateurs (voir « Reflections on Trusting Trust» de Ken Thomson)
- Du matériel

Implémentation

- En temps constant ;
- Sans branches ;
- Faites par des experts (librairies opensource comme NaCl)

Ne jamais concevoir son propre système cryptographique ad hoc ou sa propre implémentation à moins d'être un expert.

Aléa

- Générer une clé nécessite de l'aléa de qualité
- Aléa matériel ou pseudo-aléa logiciel
- Modèle d'entropie et extracteur d'aléa
- Un aléa de faible qualité peut complètement compromettre un système. (Par exemple si l'aléa dans le système de chiffrement El-Gamal a ses premiers bits prédictables alors la système est cassé)
- Playstation (aléa constant), Clés ssh Debian (aléa = date)
- Instruction RDRAND : instruction Intel retournant un nombre aléatoire grâce à un générateur d'aléa matériel
- Theodore Ts'o : « I am so glad I resisted pressure from Intel engineers to let /dev/random rely only on the RDRAND instruction. To quote from the article below: 'By this year, the Sigint Enabling Project had found ways inside some of the encryption chips that scramble information for businesses and governments, either by working with chipmakers to insert back doors....' Relying solely on the hardware random number generator which is using an implementation sealed inside a chip which is impossible to audit is a BAD idea.»

Aléa

- Générer une clé nécessite de l'aléa de qualité
- Aléa matériel ou pseudo-aléa logiciel
- Modèle d'entropie et extracteur d'aléa
- Un aléa de faible qualité peut complètement compromettre un système. (Par exemple si l'aléa dans le système de chiffrement El-Gamal a ses premiers bits prédictables alors la système est cassé)
- Playstation (aléa constant), Clés ssh Debian (aléa = date)
- Instruction RDRAND : instruction Intel retournant un nombre aléatoire grâce à un générateur d'aléa matériel
- Theodore Ts'o : « I am so glad I resisted pressure from Intel engineers to let /dev/random rely only on the RDRAND instruction. To quote from the article below: 'By this year, the Sigint Enabling Project had found ways inside some of the encryption chips that scramble information for businesses and governments, either by working with chipmakers to insert back doors....' Relying solely on the hardware random number generator which is using an implementation sealed inside a chip which is impossible to audit is a BAD idea.»

Aléa

- Générer une clé nécessite de l'aléa de qualité
- Aléa matériel ou pseudo-aléa logiciel
- Modèle d'entropie et extracteur d'aléa
- Un aléa de faible qualité peut complètement compromettre un système. (Par exemple si l'aléa dans le système de chiffrement El-Gamal a ses premiers bits prédictables alors la système est cassé)
- Playstation (aléa constant), Clés ssh Debian (aléa = date)
- Instruction RDRAND : instruction Intel retournant un nombre aléatoire grâce à un générateur d'aléa matériel
- Theodore Ts'o : « I am so glad I resisted pressure from Intel engineers to let /dev/random rely only on the RDRAND instruction. To quote from the article below: 'By this year, the Sigint Enabling Project had found ways inside some of the encryption chips that scramble information for businesses and governments, either by working with chipmakers to insert back doors....' Relying solely on the hardware random number generator which is using an implementation sealed inside a chip which is impossible to audit is a BAD idea.»

Authentification

La cryptographie (à clé publique) permet de transformer un canal publique un canal authentifié et confidentiel, à partir d'un premier échange authentifié. Comment authentifier ce premier échange ?

- Certificats (TLS)
- Web of trust (GPG)
- Trust on first use (SSH)

Applications cryptographiques : Bitcoin

- Monnaie électronique décentralisée
- Fichier de transaction public (blockchain)
- Signature des transactions par une courbe elliptique
- La vérification de la blockchain (et validation des nouvelles transactions) fabrique de nouveaux bitcoins.

Applications cryptographiques : Vote électronique Belenios

- Confidentialité du vote (partage de secret)
- Résultats corrects (preuves Zero-Knowledge)
- Validation (et confidentialité) de la liste des électeurs

Résumé : importance de la cryptographie

- Chiffrement (pli confidentiel)
- Identification (badge cantine, carte à puce, empreinte digitale)
- Intégrité (clé RIB, scellés)
- Signature (ordre de virement) : identification, intégrité, non-répudiation
- Vie privée, anonymat, argent électronique, vote électronique, certificats, calcul distribué, stockage distribué

Applications : Développement des cartes à puces, commerce électronique, téléphonie mobile, armement, intérieur, sécurité des logiciels, sécurité des réseaux, objets interconnectés

Chiffrement

Alice (Sophie Germain) 

veut écrire

à Bob (Carl Friedrich Gauss)

Chiffrement à clé secrète

Alice 

m=QUARTIQUE

clé secrète de chiffrement $K = +3$

$c = f_K(m)$

c =TXDUWLTXH est envoyé

à Bob 

c =TXDUWLTXH

clé secrète de déchiffrement $K' = -K = -3$

$m = f_K^{(-1)}(c) = f_{K'}(c)$

Chiffrement à clé secrète

Alice 

m=QUARTIQUE

clé secrète de chiffrement $K = +3$

$c = f_K(m)$

c =TXDUWLTXH est envoyé

à Bob

c =TXDUWLTXH

clé secrète de déchiffrement $K' = -K = -3$

$m = f_K^{(-1)}(c) = f_{K'}(c)$

Chiffrement à clé secrète

Alice 

m=QUARTIQUE

clé secrète de chiffrement $K = +3$

$c = f_K(m)$

c =TXDUWLTXH est envoyé

à Bob 

c =TXDUWLTXH

clé secrète de déchiffrement $K' = -K = -3$

$m = f_K{}^{(-1)}(c) = f_{K'}(c)$

Chiffrement à clé secrète

- Trois étapes : création et distribution de clés, chiffrement, déchiffrement
- Boîte mail, consultation de compte en banque, ...
- Avantages : simple, rapide, bien connu
- Fragilités : attaques statistiques, gestion de clés

Chiffrement à clé publique

Alice veut envoyer m à Bob.
Elle trouve la clé publique de chiffrement K_{Bob}^{pub} dans l'annuaire.
Elle calcule $c = f_{K_{Bob}^{pub}}(m)$

c est envoyé

à Bob 

c

qui utilise sa clé secrète de déchiffrement K_{Bob}^{sec}

$m = f_{K_{Bob}^{pub}}^{(-1)}(c) = g_{K_{Bob}^{sec}}(c)$

Chiffrement à clé publique

Alice veut envoyer m à Bob.
Elle trouve la clé publique de chiffrement K_{Bob}^{pub} dans l'annuaire.
Elle calcule $c = f_{K_{Bob}^{pub}}(m)$

c est envoyé

à Bob 

c

qui utilise sa clé secrète de déchiffrement K_{Bob}^{sec}

$m = f_{K_{Bob}^{pub}}^{(-1)}(c) = g_{K_{Bob}^{sec}}(c)$

Chiffrement à clé publique

Alice 
veut envoyer m à Bob.
Elle trouve la clé publique de chiffrement K_{Bob}^{pub} dans l'annuaire.
Elle calcule $c = f_{K_{Bob}^{pub}}(m)$

c est envoyé

à Bob 

c

qui utilise sa clé secrète de déchiffrement K_{Bob}^{sec}

$$m = f_{K_{Bob}^{pub}}{}^{(-1)}(c) = g_{K_{Bob}^{sec}}(c)$$

Chiffrement à clé publique

- Trois étapes : création et publication de clés, chiffrement, déchiffrement
- Avantages : gestion de clé simplifiée, solidité mathématique
- Fragilités : plus lent, plus compliqué à implémenter

En pratique on combine les deux chiffrements : clé publique pour échanger une clé de session (secrète) qui servira à chiffrer à la volée.

Comment faire ?

- Situations asymétriques : l'un saît l'autre pas.
- Celui qui connaît le secret a un avantage (il peut déchiffrer, il peut se prouver).
- Mesurer cet avantage : théorie de la complexité algorithmique.
- S'appuyer sur des problèmes difficiles.

La thèse de Turing-Church

Alan Turing

Alonzo Church

Tests de primalité

Savoir si un entier P est premier.

Pierre de Fermat

Agrawal, Kayal et Saxena

$$T = n^{6+\varepsilon(n)}$$

où n est le nombre de chiffres décimaux de P.

Factorisation

Théorème fondamental de l'arithmétique.

Euclide

Carl Friedrich Gauss

$N = \prod_{1 \leq i \leq I} p_i^{e_i}$.

Factorisation

Hendrik Lenstra

Brigitte Vallée

Factoriser un entier N prend un temps $T = \exp(\sqrt{n})$ où n est le nombre de chiffres décimaux de n.

Asymétrie

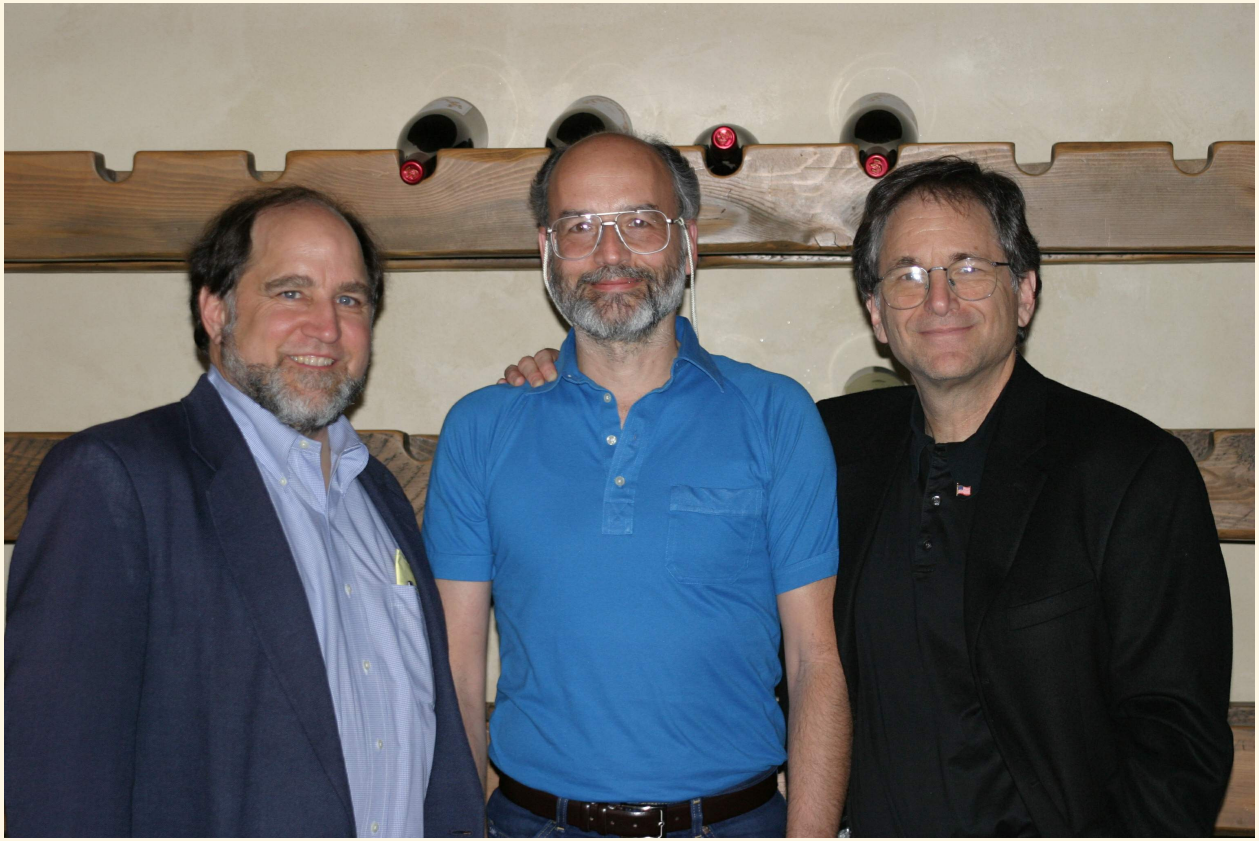
$$(p,q) \longrightarrow N = pq$$

$$(p,q) \longleftarrow N = pq$$

Asymétrie

- En décembre 2009, Thorsten Kleinjung et une dizaine de collègues ont factorisé un nombre de 232 décimales.
- *The sieving, which was done on many hundreds of machines, took almost two years.*
- Calculer le produit de deux nombres de 116 décimales prend 8 millionièmes de secondes sur mon ordinateur portable.

Protocole RSA



Rivest, Shamir et Adleman

Protocole RSA

- Soit $N = pq$ un produit de deux grands nombres premiers ;
- Soit e premier à $\varphi(N) = (p-1)(q-1)$ et d l'inverse de e modulo $\varphi(N)$;
- Chiffrement : $x \longmapsto x^e \mod N$;
- Déchiffrement : $x \longmapsto x^d \mod N$;

Théorème (Petit théorème de Fermat)

$x^{\#(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} = 1 \mod N.$

Identification par mot de passe

Alice
mot de passe d'Alice BELOTE

BELOTE est envoyé

à Bob
mot de passe de Bob REBELOTE

REBELOTE est envoyé à Alice

Identification par mot de passe

- Alice et Bob doivent convenir d'un mot de passe secret partagé (question secrète)
- Avantage : simple
- Fragilités : risque de réutilisation e.g. par un tiers, gestion de mots de passe

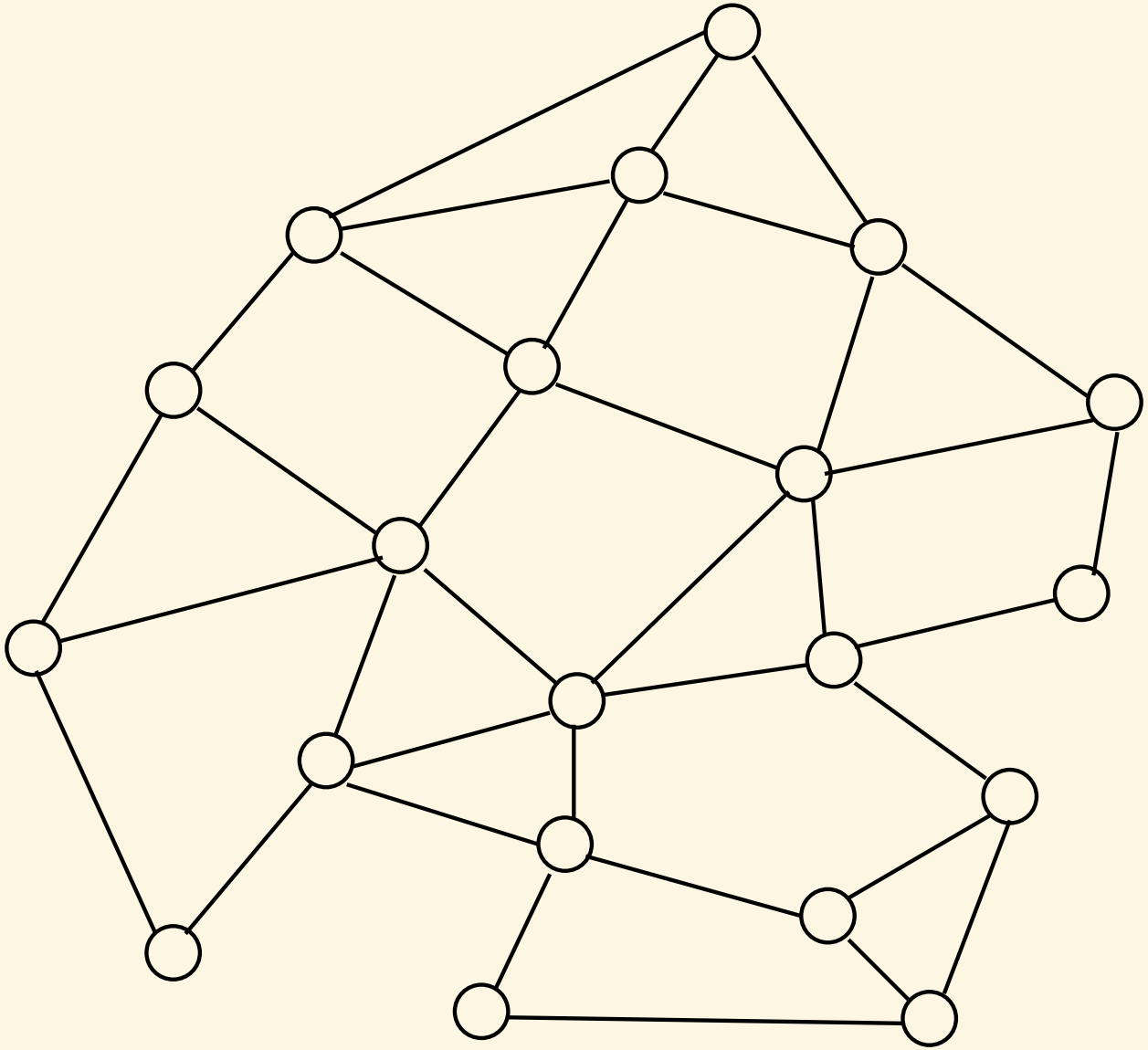
Identification sans divulgation de connaissance

Alice 
connaît un secret S_{Alice}

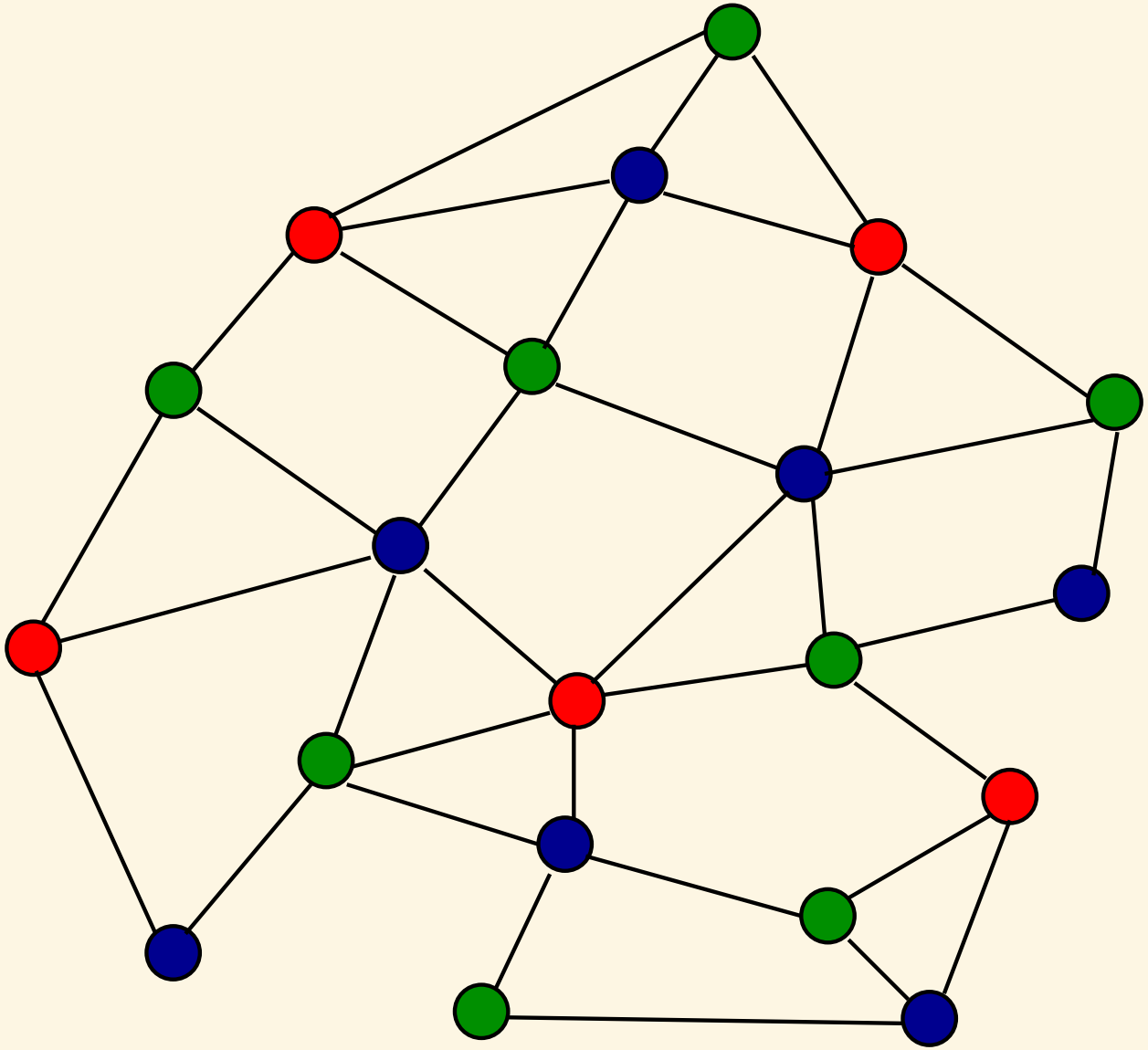
Bob 
interroge Alice et se convainc qu'elle connaît bien le secret.

À la fin de l'échange, Bob n'a rien appris sur ce secret !

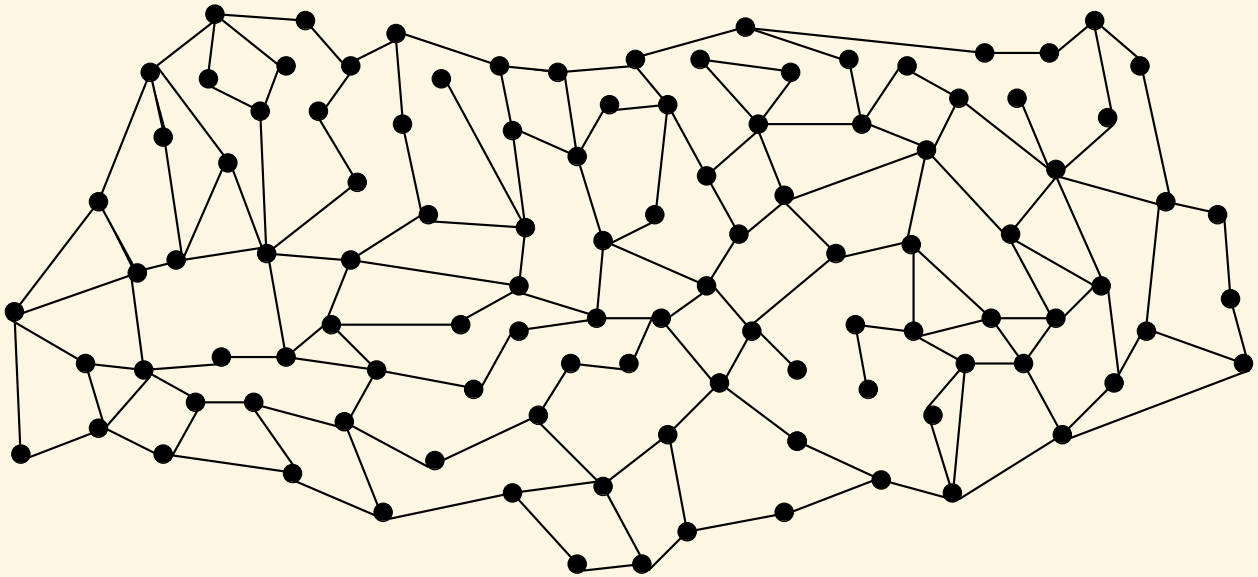
Coloriage de graphe



Coloriage de graphe



Coloriage de graphe

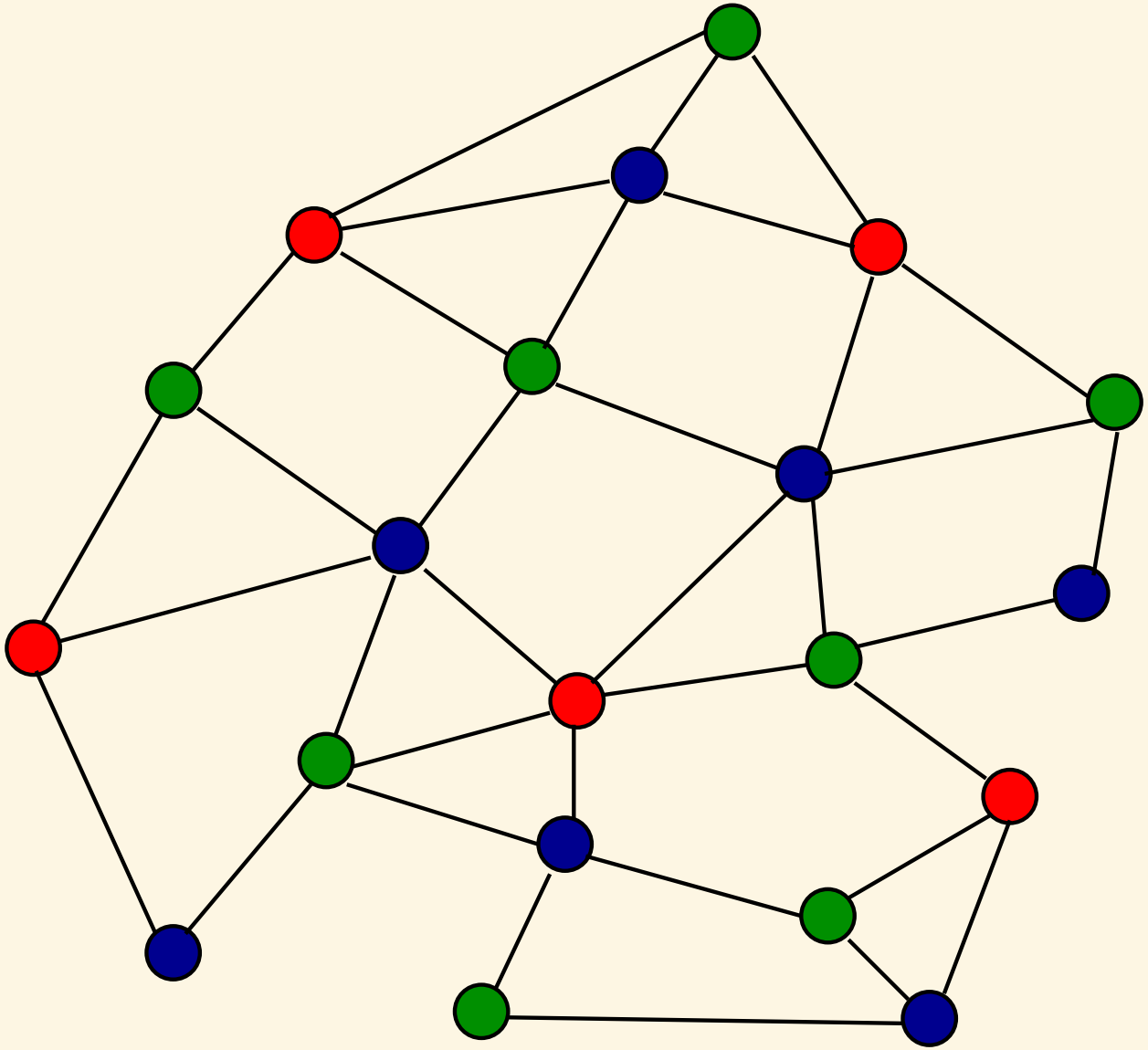


Zero Knowledge Proofs

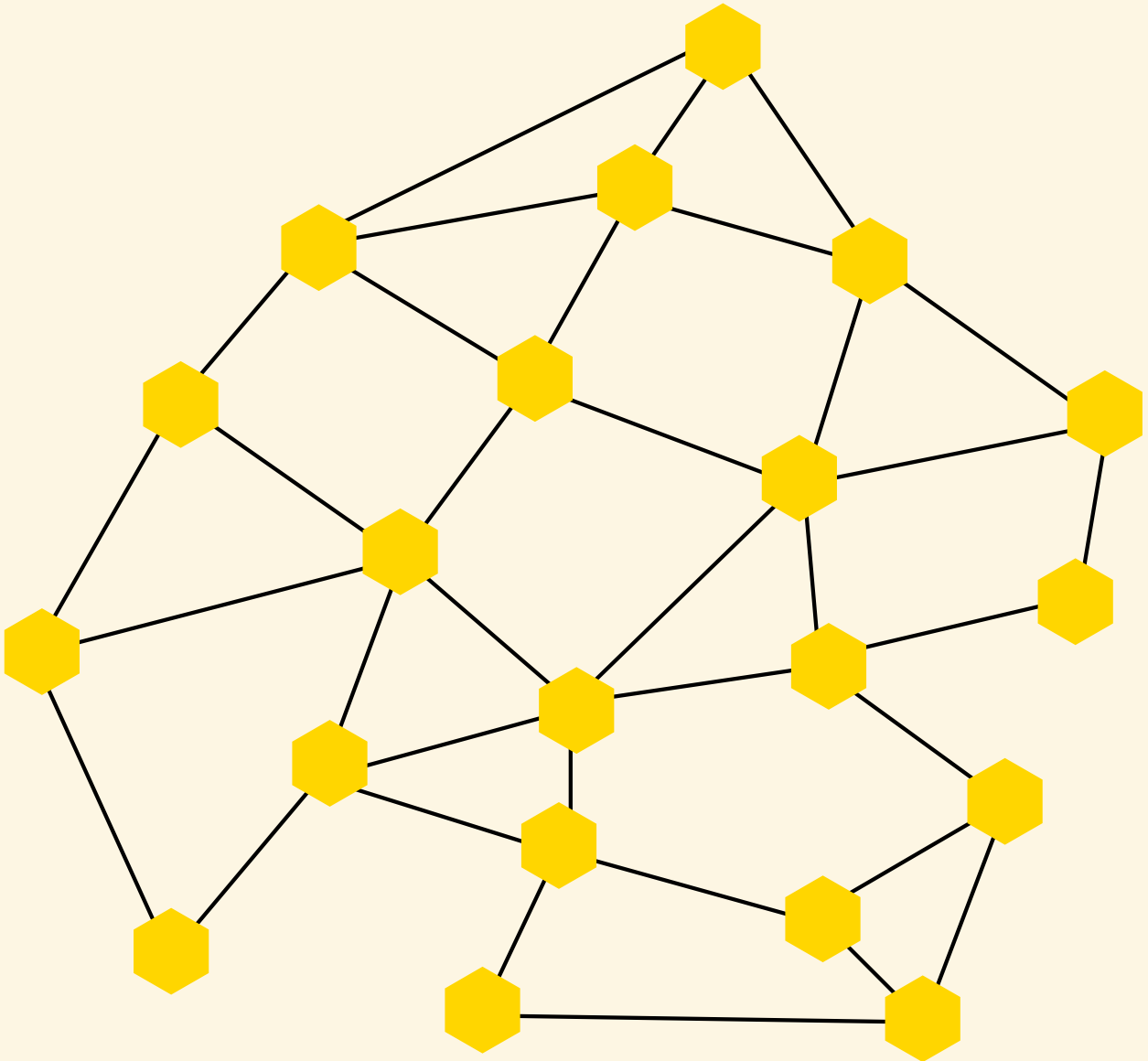
Shafi Goldwasser (1981)

Oded Goldreich (1991)

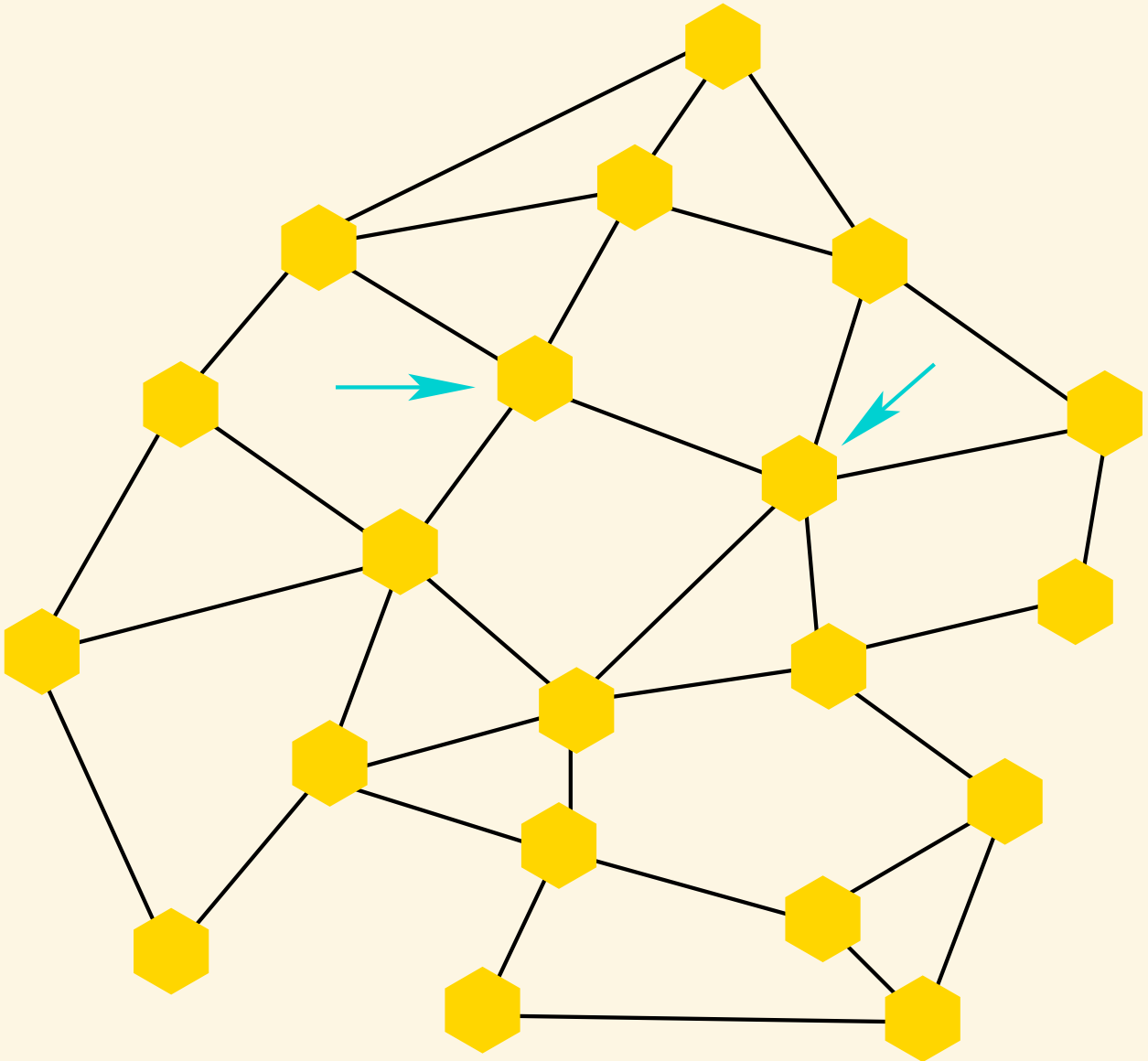
Le coloriage d'Alice (secret)



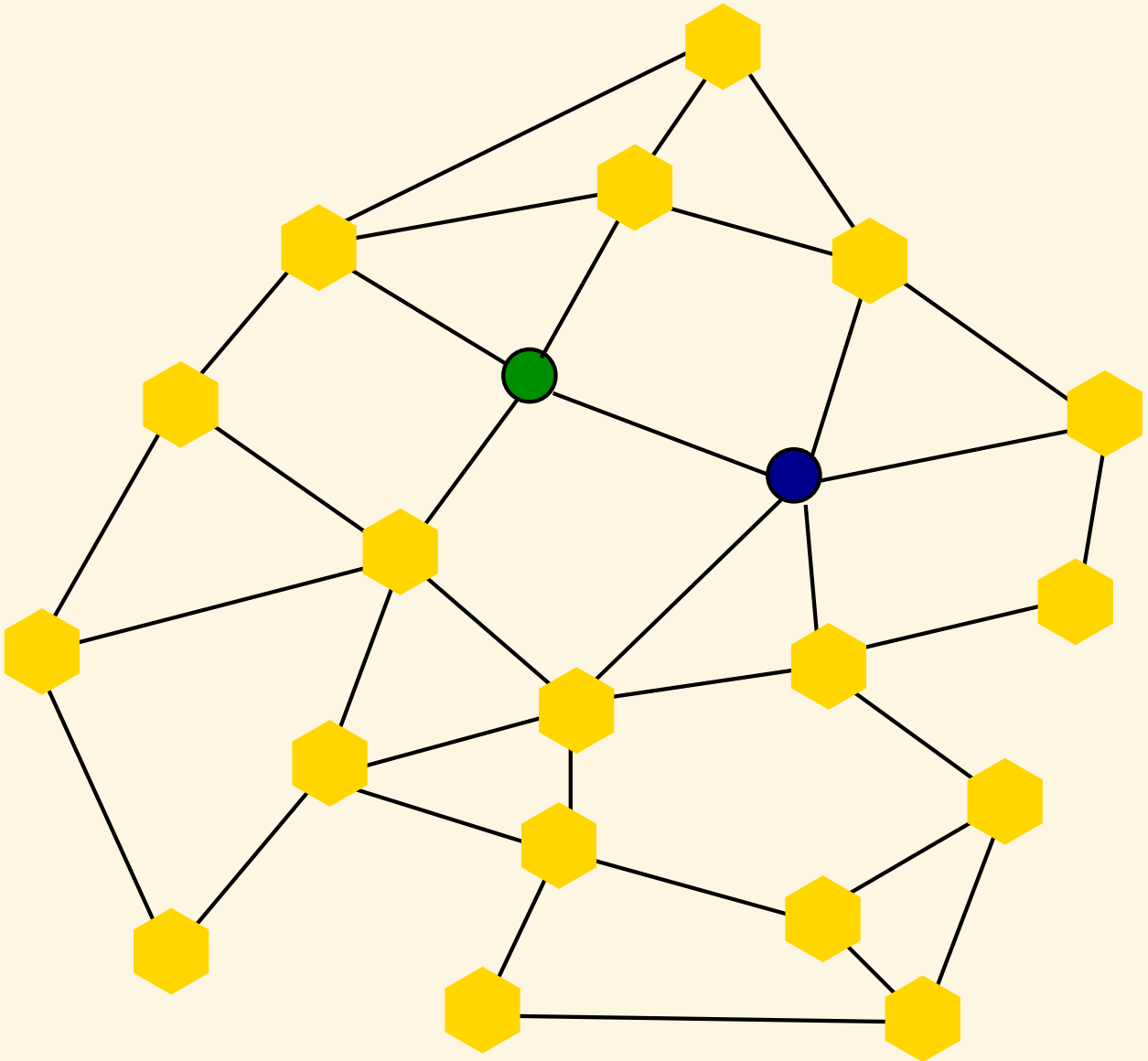
Le coloriage d'Alice caché



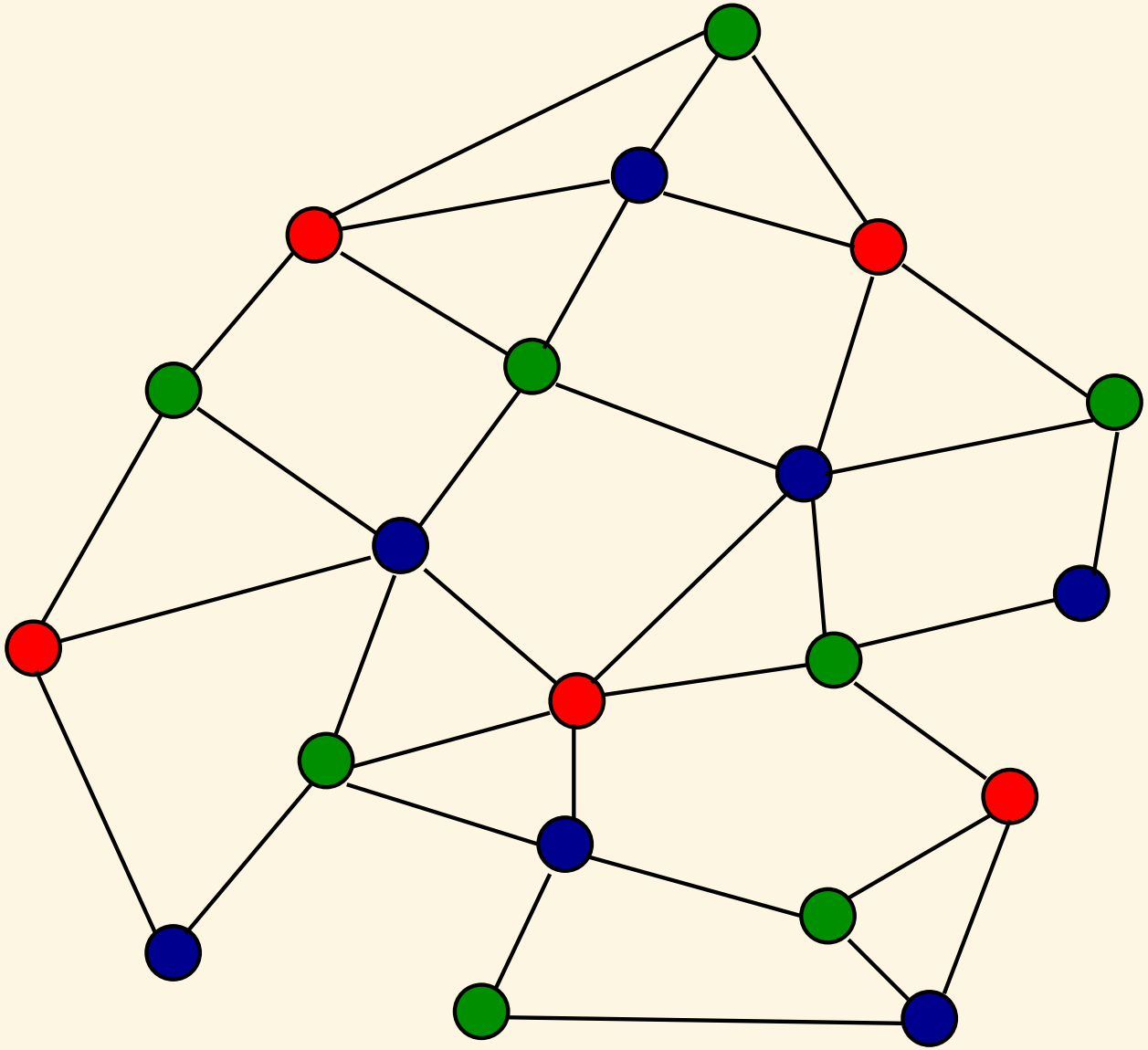
La question de Bob



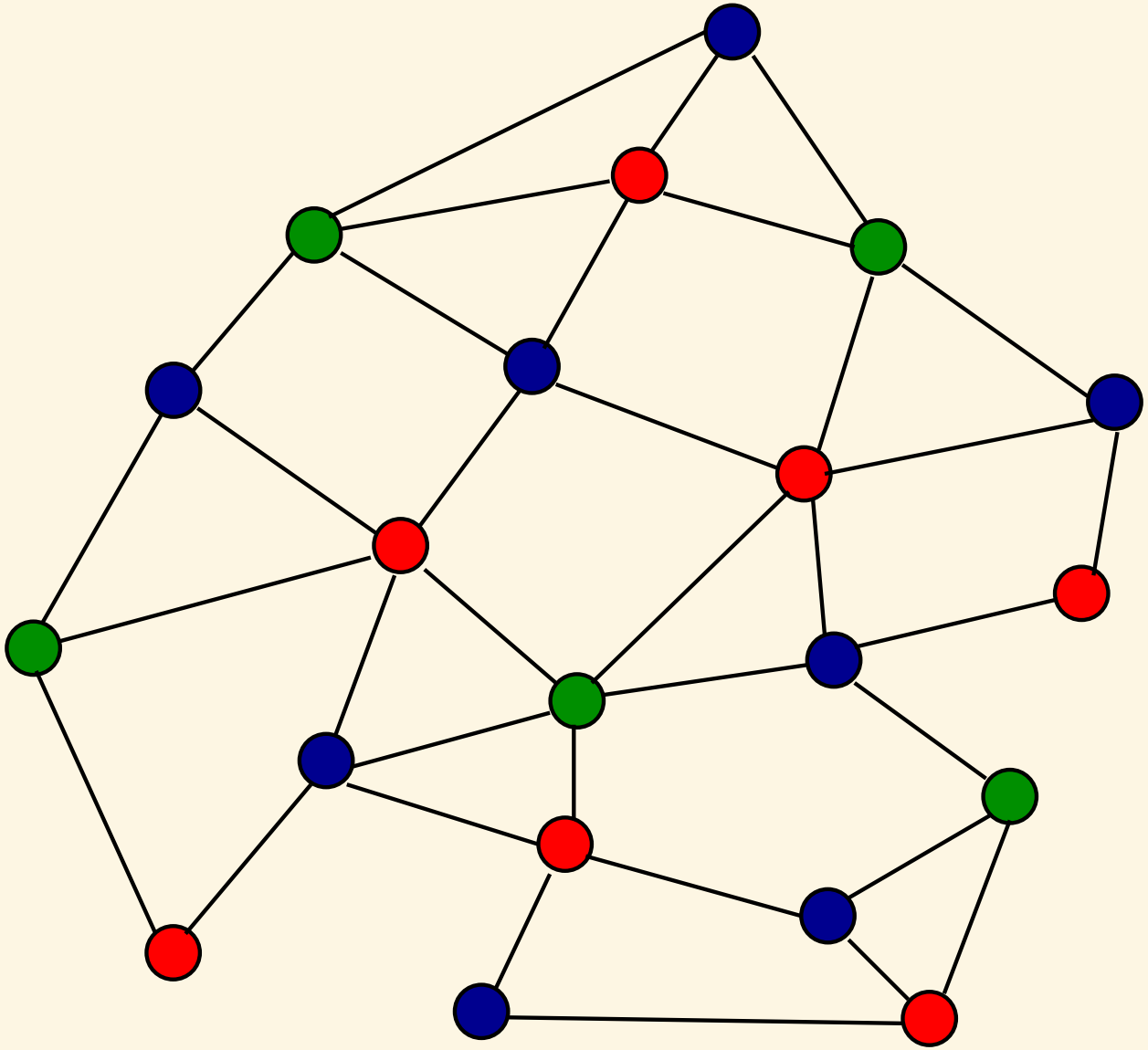
Dévoilement



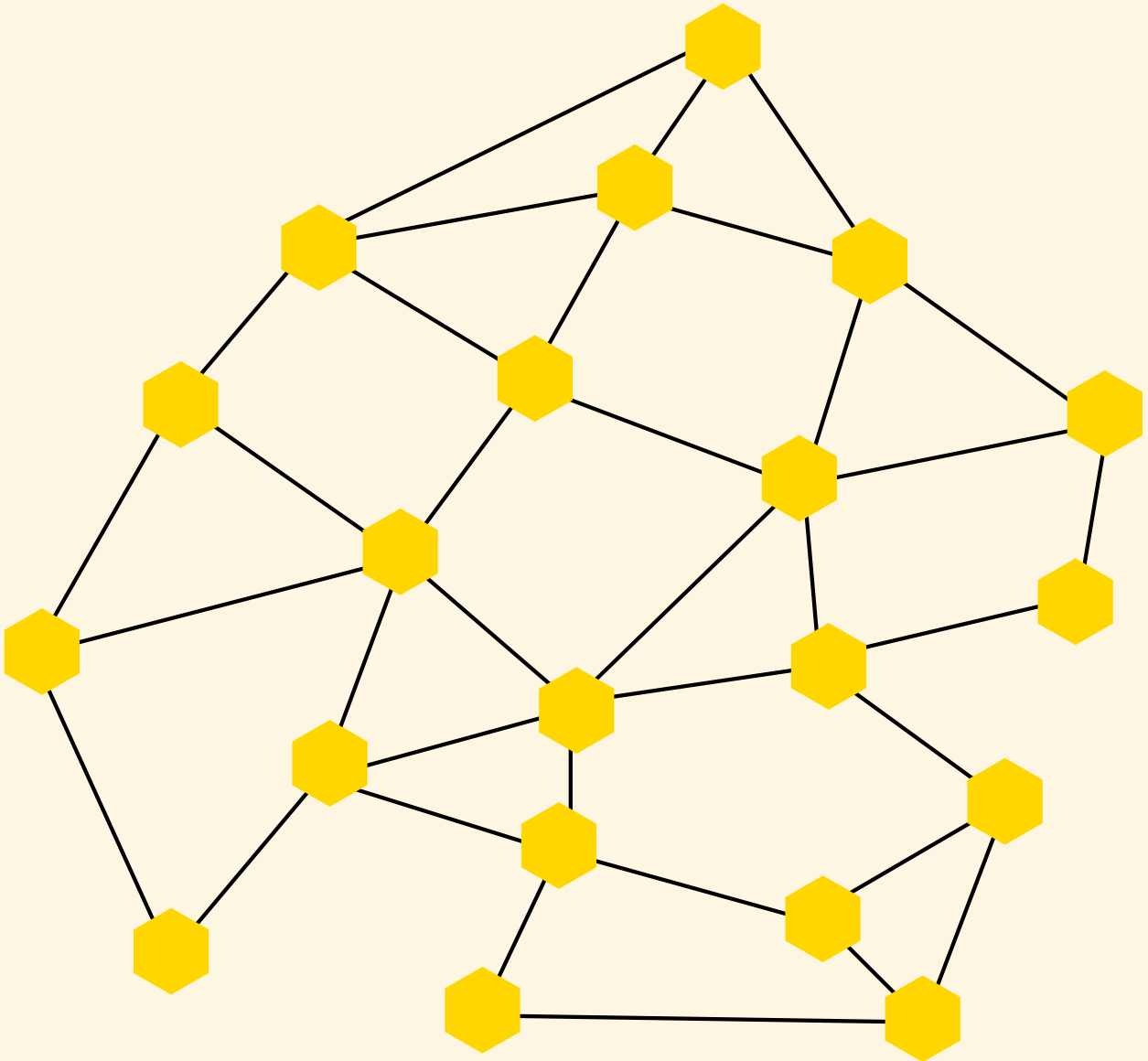
Le coloriage d'Alice (secret)



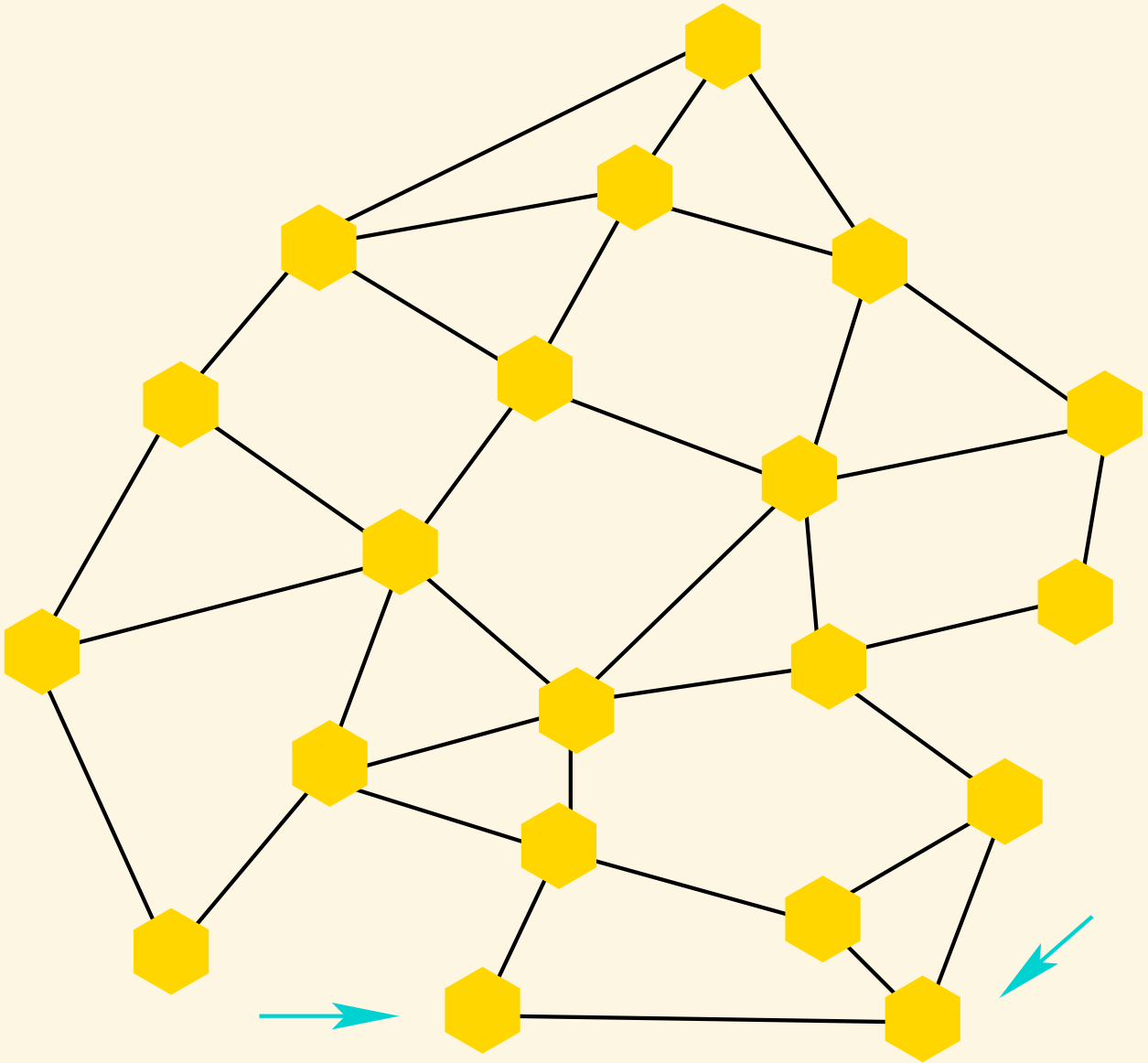
Le coloriage d'Alice permuté



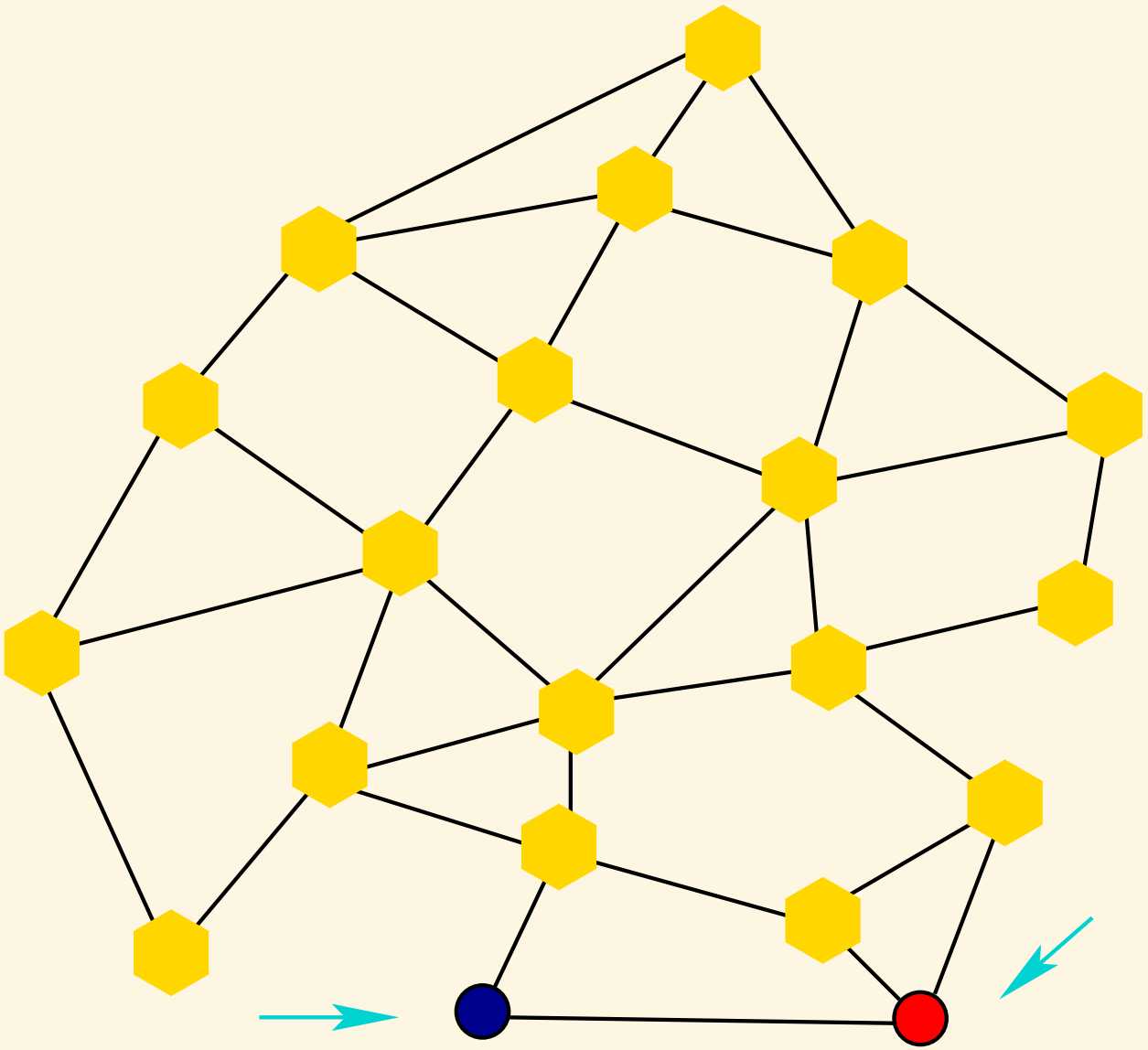
Le coloriage d'Alice caché



La deuxième question de Bob



Dévoilement



Fonctions de Hachage cryptographique

Définition

Compresse des données arbitraires en un “hash” de longueur fixée (typiquement 128 bits).

Une fonction de hachage est dite cryptographiquement sûre si

- Très difficile de trouver des collisions.
- Très difficile de retrouver m à partir de $H(m)$ (si l'on ne connaît pas m).

Mettre en gage des données

Jouer à pile ou face par téléphone.

- Alice lance une pièce
- Bob dit « tu as lancé pile »
- Alice répond « perdu c'était face ! »

Mettre en gage des données

Jouer à pile ou face par téléphone.

- Alice lance une pièce
- Alice envoie le haché de “Pile” ou “Face” à Bob.
- ...

Mettre en gage des données

Jouer à pile ou face par téléphone.

- Alice lance une pièce
- Alice envoie le haché $H(m||\text{Pile})$ ou $H(m||\text{Face})$ à Bob, où m est un message aléatoire.
- Bob dit « tu as lancé pile »
- Alice dévoile m à Bob pour qu'il puisse vérifier le résultat.

Remark

Attention : en cas de plusieurs tirages, Alice doit changer le message aléatoire m à chaque fois !

Échange de clé de Diffie Hellmann

Alice et Bob veulent échanger une clé commune via un canal non sécurisé.

- On part de $7 \mod 61$;
- Alice choisit $17 \mod 61$ et envoie $17 \times 7 = 58 \mod 61$;
- Bob choisit $31 \mod 61$ et envoie $31 \times 7 = 34 \mod 61$;
- Le clé commune est $29 = 34 \times 17 = 58 \times 31$.

Remark

Pour retrouver la clé, Eve calcule $1/7 = 35 \mod 61$ et retrouve $17 = 58 \times 35 \mod 61$ ☹.

Exponentielle et logarithme discrets

$p = 7$ un nombre premier et $b = 5 \bmod 7$

x	b^x
1	$5 \bmod 7$
2	$4 \bmod 7$
3	$6 \bmod 7$
4	$2 \bmod 7$
5	$3 \bmod 7$
6	$1 \bmod 7$
7	$5 \bmod 7$

$y = b^x$	$x = \log_b(y)$
1	$0 \bmod 6$
2	$4 \bmod 6$
3	$5 \bmod 6$
4	$2 \bmod 6$
5	$1 \bmod 6$
6	$3 \bmod 6$

$\exp_b : \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ $\qquad$ $log_b : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \to \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$

Exponentiation rapide : $b^x \bmod p$

$p = 139,\ b = 112,\ x = 73$

$x = 2^6 + 2^3 + 1 = (1001001)_2$

$b^x = b\, b^{2^3}\, b^{2^6}$

$b_0 = b = 112 \bmod 139,$
$b_1 = b_0^2 = 34 \bmod 139,$
$b_2 = b_1^2 = b^{2^2} = 44 \bmod 139,$
$b_3 = (b_2)^2 = b^{2^3} = 129 \bmod 139,$
$b_4 = (b_3)^2 = b^{2^4} = 100 \bmod 139,$
$b_5 = (b_4)^2 = b^{2^5} = 131 \bmod 139,$
$b_6 = (b_5)^2 = b^{2^6} = 64 \bmod 139.$

$b^x = b_0 b_3 b_6 = 112 \times 129 \times 64 = 44 \bmod 139.$

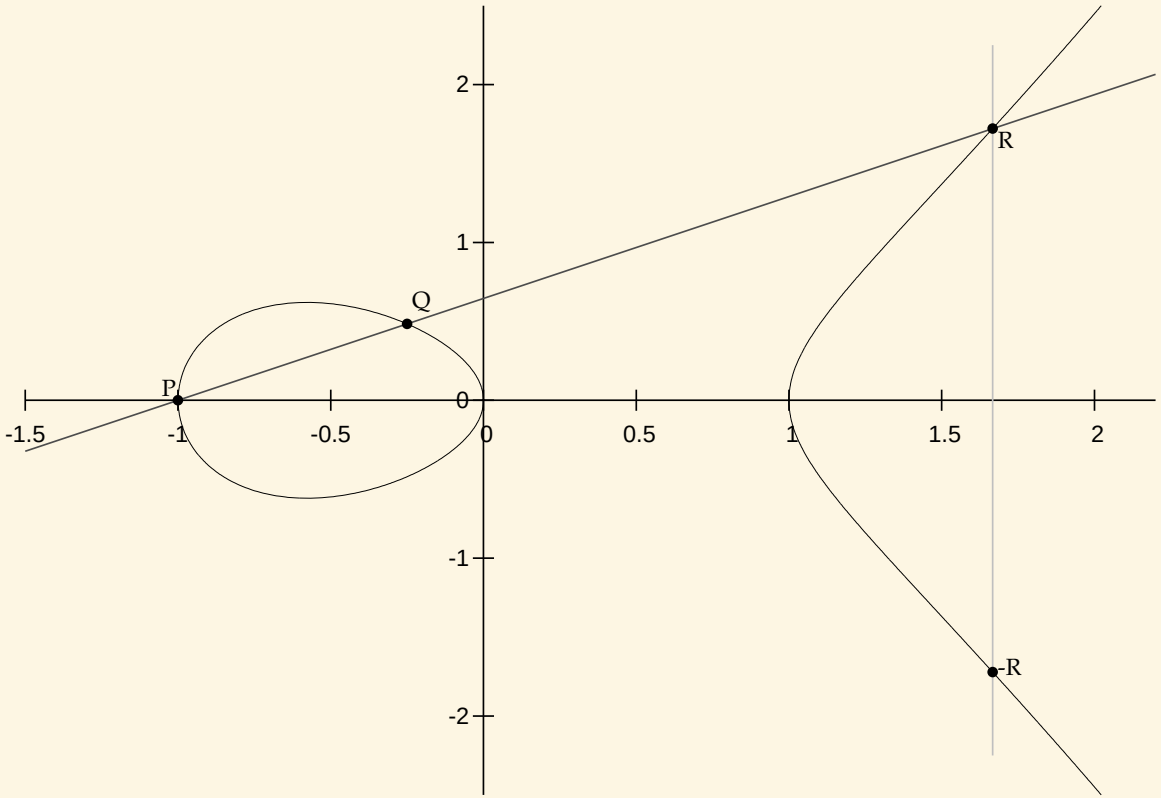
Pigala, *Chandah-sûtra* (avant -200).

Les courbes elliptiques

Définition (char $k \neq 2,3$)

Une courbe elliptique est une courbe plane d'équation

$$y^2 = x^3 + ax + b \qquad 4a^3 + 27b^2 \neq 0.$$



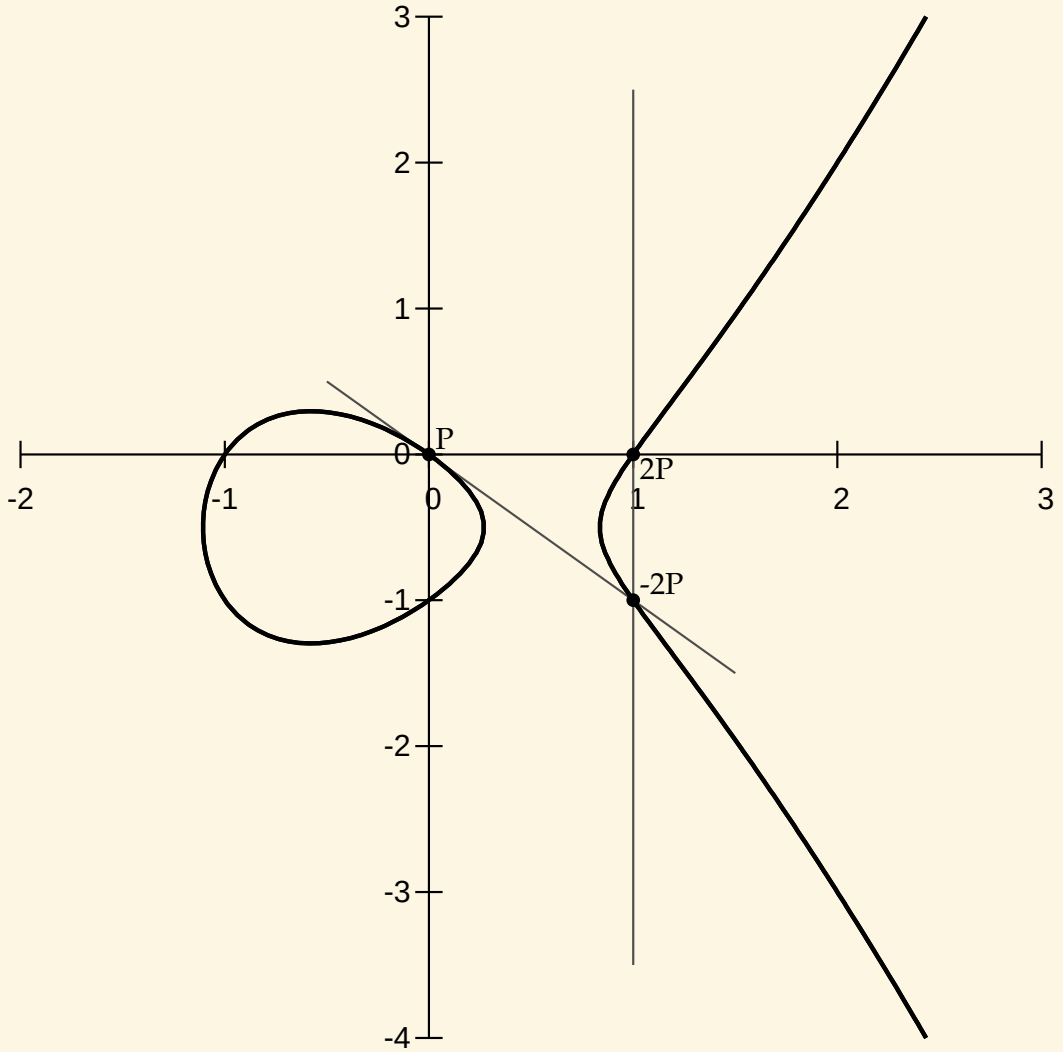
Exponentiation :

$$(\ell, P) \mapsto \ell P$$

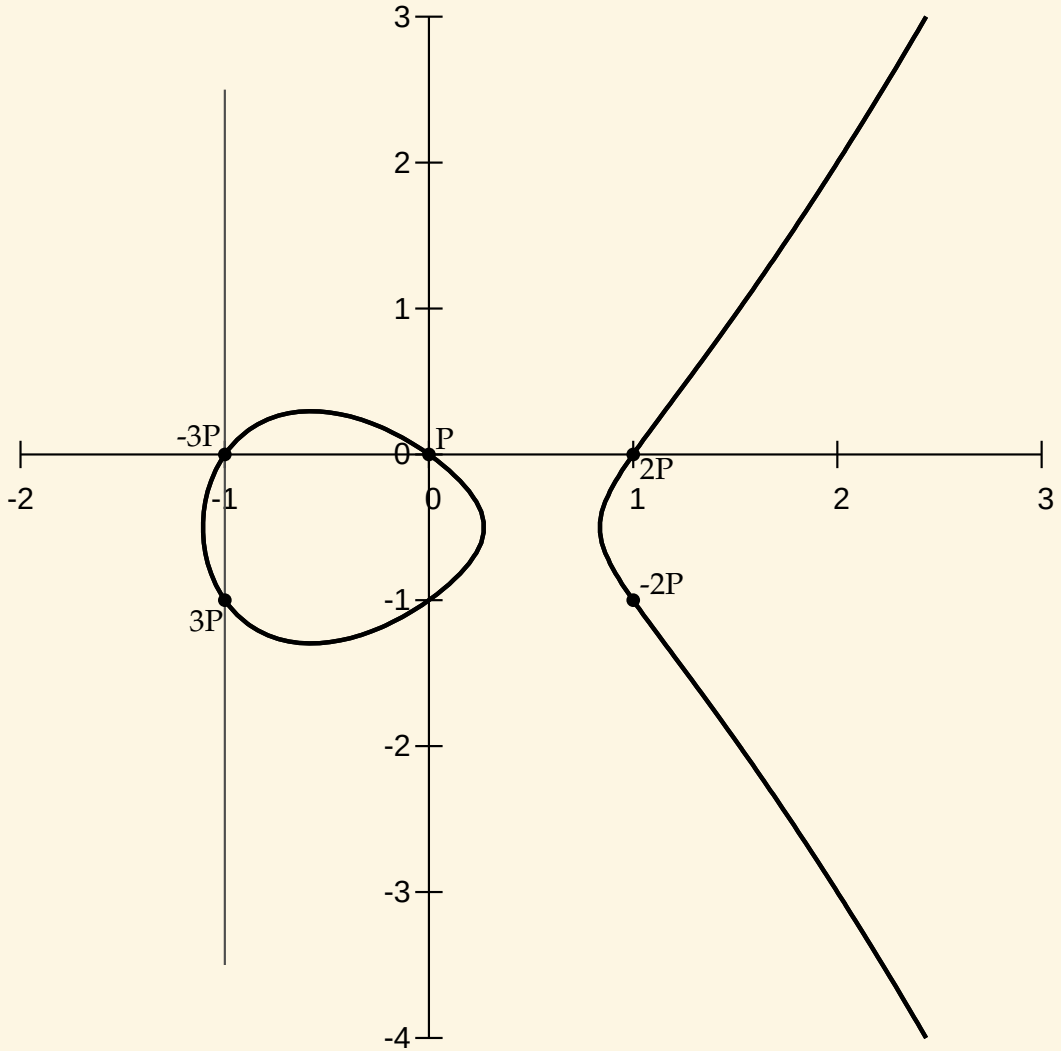
Logarithme discret :

$$(P, \ell P) \mapsto \ell$$

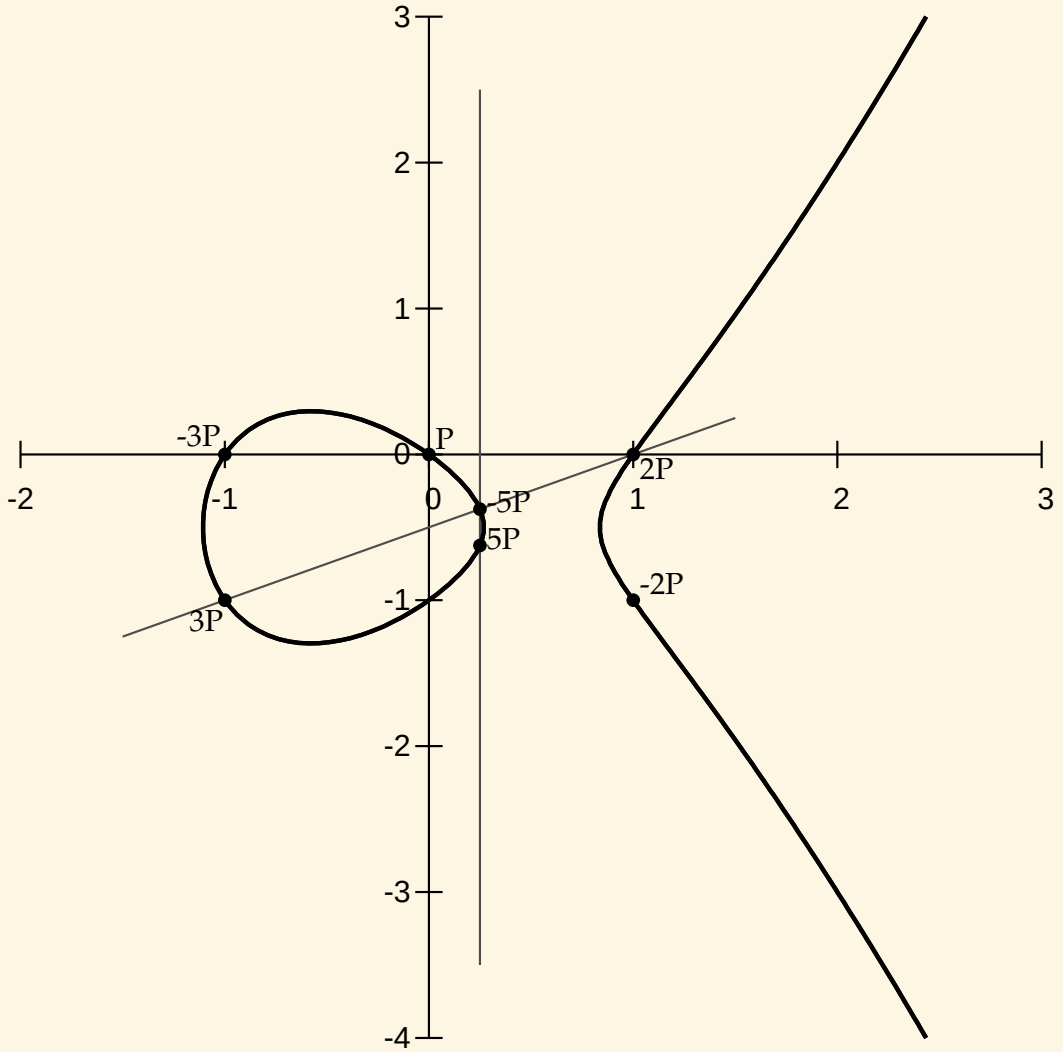
Exponentiation sur une courbe elliptique



Exponentiation sur une courbe elliptique



Exponentiation sur une courbe elliptique



Utilisation des courbes elliptiques

Exemple (ECC 160 bits)

- E courbe elliptique $y^2 = x^3 + x + 333$ sur $\mathbb{F}_{1461501637330902918203684832716283019655932542983}$
- Clé publique :

$$P = (1369962487580788774992199588498961558341362086296,$$
$$407160203592982096299905031630798490942043935021);$$
$$Q = (695697562436343265984113032286189105569389589 80,$$
$$1126203611660190221708449639677667925024412968395);$$

- Clé secrète : ℓ tel que $Q = \ell P$.

- Utilisées par la NSA ;
- Utilisées dans les passeports biométriques Européens.

Avantage des courbes elliptiques

À niveau de sécurité égale, les cryptosystèmes basés sur les courbes elliptiques, par rapport à RSA sont

- plus rapides ;
- plus compacts ;
- plus puissants.

Exemple (Couplages)

Sur une courbe elliptique, à partir d'une clé publique on peut générer d'autres clé publiques. De même pour la clé secrète.
⇒ Certificats anonymes.

Exemple (Fonctions de hachage)

Les graphes d'isogénies de courbes elliptiques supersingulières fournissent des fonctions de hachage cryptographiquement sûres.

Choisir une courbe elliptique

Modèle de Weierstrass ou d'Edwards, petite caractéristique, grande caractéristique, GLV, GLS, petits coefficients, coefficients aléatoires...

- Courbes du NIST ;
- Courbes Brainpool (BSI) ;
- Courbes ANSSI ;
- Courbes NUMS – Nothing Up My Sleeve (Microsoft) ;
- Curve25519 (DJB) ;
- Courbe Goldilock (Mike Hamburg).

Exemple : méthode de la multiplication complexe pour générée une courbe elliptique sécurisée (Enge-Sutherland)

- Les polynômes de classe de corps quadratiques imaginaires permettent de construire des courbes elliptiques avec un nombre de points prescrit $\Rightarrow$ générer des courbes elliptiques optimisées pour les applications
- Le polynôme de classe pour $D = 10^{15} + 15$ a un degré 15209152, une borne sur la taille des coefficients est de 2337598720 bits ($= 2\mathrm{GB}$) pour une taille totale d'environ $4.4\mathrm{PB}$.
- Comment calcul de tels objets gigantesque ?
- Il faut des algorithmes asymptotiquement rapide, utiliser au maximum le parrallélisme, et réduire les résultats modulo p directement ($= 4\mathrm{GB}$) pour consommer moins de mémoire.

L'essor du cloud computing

- Chiffrement homomorphe : l'utilisateur fournit au nuage un message chiffré $f_K(m)$ et un programme P, et le nuage renvoie $f_K(P(m))$.
  Le nuage n'a rien appris sur la donnée m, ni sur le résultat !
- L'utilisateur fournit au nuage un message chiffré $f_K(m)$ et le chiffrement $f_K(P)$ d'un programme P, et le nuage renvoie $f_K(P(m))$.
  Le nuage ne sait pas ce qu'il a calculé !

$\Rightarrow$ Une version faible utilise les couplages de courbes elliptiques ;

$\Rightarrow$ La version complète utilise des réseaux, en particulier des réseaux d'idéaux dans des corps de nombres ;

☹ Encore très lent.

Carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

- Soit $p>2$ un nombre premier. $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*,\times)$ est un groupe cyclique d'ordre $p-1$;
- Il y a $(p-1)/2$ carrés et $(p-1)/2$ non carrés ;
- Si $x\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*$ alors x est un carré si et seulement si $x^{\frac{p-1}{2}}=1$ (par le petit théorème de Fermat $x^{p-1}=1$ pour tous les $x\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*$) ;
- Symbole de Legendre :

$$\left(\frac{x}{p}\right)=\begin{cases}0 & \text{si } x=0 \bmod p\\ 1 & \text{si } x \text{ est un carré}\\ -1 & \text{si } x \text{ n'est pas un carré}\end{cases}$$

- $\left(\frac{x}{p}\right)=x^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$;
- Multiplicativité : $\left(\frac{xy}{p}\right)=\left(\frac{x}{p}\right)\left(\frac{y}{p}\right)$;
- Réciprocité quadratique (p,q premiers >2) :

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}.$$

Jacobi symbol

- Symbole de Jacobi : si n est impair, le symbole de Jacobi est l'extension du symbole de Legendre par multiplicativité de l'argument du bas :

$$\left(\frac{x}{n_1 n_2}\right)=\left(\frac{x}{n_1}\right)\left(\frac{x}{n_2}\right);$$

- Réciprocité quadratique générale :

$$\left(\frac{m}{n}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n}{m}\right) \quad (m \text{ et } n \text{ impairs et premiers})$$

avec les équations supplémentaires $\left(\frac{-1}{n}\right)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}$, $\left(\frac{2}{n}\right)=(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$;

$\Rightarrow$ Le symbole de Jacobi peut être calculé en temps polynomial ;

- Test de primalité : si $\left(\frac{x}{n}\right)\neq x^{\frac{n-1}{2}}$ alors n n'est pas premier (et réciproquement si n n'est pas premier alors au moins la moitié des x premiers à n seront des témoins de non primalité).

Digression : Miller-Rabin

Test de primalité de Miller-Rabin

- Si n est premier et $n-1=d2^t$, alors pour tous les a premiers à n soit
- $a^d = 1 \mod n$
- ou $a^{d2^u} = -1 \mod n$ (pour $0 \leqslant u \leqslant t-1$)
- réciproquement si n est impair et non premier, au moins $3/4$ des bases a seront témoins de la non primalité de n.

Pile ou face

- Soit $n = pq$ un nombre RSA, par le théorème chinois $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^*, \times) = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^*, \times)$;
- $\left(\frac{x}{n}\right) = \left(\frac{x}{p}\right)\left(\frac{x}{q}\right)$ donc si x est premier à n, $\left(\frac{x}{n}\right) = 1$ quand x est un carré modulo n (=carré modulo p et carré modulo q) ou quand x n'est un carré ni modulo p ni modulo q ;
- Calcul de $\left(\frac{x}{n}\right)$: temps polynomial ;
- Décider si x est un vrai carré (et calculer la racine carré) ou un faux carré : factorisation de n
- $x \longmapsto x^2$ est une fonction à sens unique !

Pile ou face :

- Bob choisit $n = pq$ et envoie x tel que $\left(\frac{x}{n}\right) = 1$;
- Alice répond "vrai carré" ou "faux carré" ;
- Bob envoie p et q pour qu'Alice puisse vérifier si elle avait raison ou non.

Identification sans divulgation d'informations

- Clé secrète d'Alice : p, q, s mod $n = pq$;
- Clé publique d'Alice : $n = pq$, $r = s^2$;

Identification Zero Knowledge :

- Alice choisit u mod n aléatoirement, calcule $z = u^2$ et envoie $t = zr = u^2 s^2$ à Bob ;
- Bob choisit soit
  - De vérifier z : il demande u à Alice et vérifie que $z = u^2$;
  - De vérifier t : il demande us à Alice et vérifie que $t = (us)^2$.
- Un usurpateur va produire soit un faux u soit un faux t et a une chance sur deux de se faire attraper.
- Bob va demander plusieurs tours de vérification (par exemple 30) Si Alice donne toujours la bonne réponse, soit elle connaît le secret, soit elle est très chanceuse (probabilité $1/2^{30}$).