Martingales - Exercices

pré-rentrée du MVA

Raphaël Forien
raphael.forien@cmap.polytechnique.Fr

vendredi 23 septembre 2016

EXERCICE 1 - Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. Pour $n \geq 0$, on note $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et on pose

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

1. Montrer que $(S_n)_n$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$.
2. Montrer que $\left(S_n^2 - n\right)_n$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$.
3. Montrer que $\left(S_n^3 - 3nS_n\right)_n$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$.
4. Montrer que si P est un polynôme de deux variables tel que, pour tout $s, n \in \mathbb{Z}$,

$$P(s+1, n+1) + P(s-1, n+1) = 2P(s, n),$$

   alors $(P(S_n, n))_n$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$.
5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Trouver $\xi \in \mathbb{R}$ tel que $(\exp(\lambda S_n - \xi n))_n$ soit une martingale pour $(\mathcal{F}_n)_n$.

EXERCICE 2 - Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variable aléatoire indépendantes et identiquement distribuées telles que

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = p \text{ et } \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1 - p$$

avec $p \in]0, 1/2[\cup]1/2, 1[$. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Soient K et N deux entiers tels que $0 \leq K \leq N$. On pose $S_0 = K$ et $S_n = K + X_1 + \ldots + X_n$ pour $n \geq 1$. On définit également $T = \inf\{n \geq 0 : S_n = 0 \text{ ou } S_n = N\}$. Pour $n \geq 0$, soit

$$M_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}.$$

1. Montrer que $(M_n)_n$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$.
2. En considérant la martingale arrêtée $(M_{n\wedge T})_n$, calculer $\mathbb{P}(S_T = 0)$ et $\mathbb{P}(S_T = N)$.

EXERCICE 3 - Soit $X \in L^1$ une variable aléatoire à densité (notée f) sur $\mathbb{R}$. On pose $Y_n = \frac{\lfloor 10^n X \rfloor}{10^n}$ et $X_n = \mathbb{E}[X \mid Y_n]$. Calculer X_n et montrer que $X_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X$ p.s. et dans L^1.

EXERCICE 4 - Soit $(\xi_n)_{n\geq 2}$ une suite de variable aléatoire indépendantes telles que

$$\mathbb{P}\left(\xi_n = -n^2\right) = \frac{1}{n^2} \text{ et } \mathbb{P}\left(\xi = \frac{n^2}{n^2-1}\right) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

On pose $M_n = \xi_2 + \ldots + \xi_n$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_2, \ldots, \xi_n)$ pour $n \geq 2$.

1. Montrer que $(M_n)_n$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$.
2. En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, montrer que $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \infty$.

EXERCICE 5 - (Processus de branchement). Soient $\{\xi_i^n, i, n \geq 1\}$ des variable aléatoire indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit une suite $(Z_n)_{n\geq 0}$ par $Z_0 = 1$ et

$$Z_{n+1} = \begin{cases} \xi_1^{n+1} + \ldots + \xi_{Z_n}^{n+1} & \text{si } Z_n > 0, \\ 0 & \text{si } Z_n = 0. \end{cases}$$

On appelle $(Z_n)_n$ un processus de Galton-Watson. Z_n s'interprète comme la taille d'une population à la génération n lorsque chaque individu donne naissance à un nombre aléatoire d'individus indépendamment de tous les autres individus (pas seulement de ceux de sa génération). La loi de ξ_i^n, donnée par $(p_k)_k$, où $p_k = \mathbb{P}(\xi_i^n = k)$, est appelée la loi de reproduction du processus. On note $\mu = \sum_{k\geq 0} kp_k = \mathbb{E}[\xi_i^n]$. Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_i^m, i \geq 1 \leq m \leq n)$.

1. Montrer que $\frac{Z_n}{\mu^n}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$.
2. Montrer que lorsque $\mu < 1$, $Z_n = 0$ pour tout n plus grand qu'un certain rang (aléatoire).
3. Montrer que c'est toujours le cas si on suppose $\mu = 1$ et $p_1 < 1$.

La population s'éteint donc presque sûrement dès que $\mu \leq 1$. On suppose pour la suite que $\mu > 1$. Pour $s \in [0, 1]$, on pose $\phi(s) = \sum_{k\geq 0} p_k s^k$ (ϕ est la fonction génératrice de la loi de reproduction).

4. Montrer que ϕ est convexe, croissante, et que $\phi'(1^-) = \mu$.
5. En déduire qu'il existe un unique $\rho \in [0, 1[$ tel que $\phi(\rho) = \rho$.

Pour $n \geq 0$, on pose $\theta_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$.

6. Montrer que $\theta_n \uparrow \rho$ quand $n \to \infty$. *(indication : calculer $\phi(\theta_n)$.)*
7. En conclure que $\mathbb{P}(Z_n = 0 \text{ à partir d'un certain rang}) = \rho$.

EXERCICE 6 - (Une preuve de la loi du 0-1 de Kolmogorov par la théorie des martingale). Soit $(X_n)_n$ une suite de variable aléatoire indépendantes. On définit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ et $\mathcal{Q}_n = \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots)$ ainsi que $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{n\geq 1}\mathcal{F}_n)$ et $\mathcal{Q}_\infty = \cap_{n\geq 1}\mathcal{Q}_n$.

Soit $A \in \mathcal{Q}_\infty$. Montrer, en utilisant la martingale $(M_n)_n$ définie par $M_n = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mid \mathcal{F}_n]$, que $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.

EXERCICE 7 - Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variable aléatoire indépendantes positives et de moyenne 1. Pour $n \geq 0$, on pose

$$M_n = \prod_{k=1}^{n} X_k, \qquad M_0 = 1$$

et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Montrer que $(M_n)_n$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$ et qu'elle converge p.s. vers une variable aléatoire que l'on note M_∞.

On pose pour $n \geq 1$, $a_n = \mathbb{E}\left[\sqrt{X_n}\right] \in]0, 1]$ et

$$N_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{X_n}}{a_n}, \qquad N_0 = 1.$$

2. Montrer que $(N_n)_n$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$.
3. Montrer que si $\prod a_n > 0$, alors N_n converge dans L^2.
4. En déduire que M_n converge vers M_∞ dans L^1 si et seulement si $\prod a_n > 0$.